Chapitre 02 : Les suites Numériques :

Un cas particulier de fonctions, est les suites. c'est un cas particulier dans le sens où l'ensemble de départ n'est pas réel mais dans les entiers naturels.

1) Définition :

On rappelle suite réelle tout application

$$\begin{cases} \mathbb{N} \longrightarrow \mathbb{R} \\ n \longmapsto u_n \end{cases}$$

On note une telle application $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$. Le nombre u_n est appelé terme général de la suite $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$.

Exemple :

* $(\sqrt{n})_{n \geq 0}$ est la suite de termes : $0, 1, \sqrt{2}, \sqrt{3}, \ldots$
* $((-1)^n)_{n \geq 0}$ " " qui alterne : $+1, -1, +1, -1, \ldots$

Remarque :

On peut définir les suites de deux façons différents

1) Soit directement par une formule, en général une fonction f, et on pour tout $n \in \mathbb{N}$: $u_n = f(n)$. c'est ce qu'on appelle une formulation explicite de la suite.

2) Soit en exprimant u_{n+1} en fonction du terme précédent u_n et en définissant une valeur initiale, comme par exemple :

$$\begin{cases} u_{n+1} = f(u_n) \\ u_0 = a \end{cases}$$

c'est ce qu'on appelle une formulation par récurrence.

2) Suites majorée, minorée, bornée :

Définition : soit $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ une suite :

- $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ est majorée si : $\exists M \in \mathbb{R}, \forall n \in \mathbb{N} : u_n \leq M$.
- $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ est minorée si : $\exists m \in \mathbb{R}, \forall n \in \mathbb{N} : u_n \geq m$.
- $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ est bornée si elle est majorée et minorée,

ce qui revient à dire : ~~$\exists M \in \mathbb{R}, \forall n \in \mathbb{N} : |u_n| \leq M$~~.

$\exists m, M \in \mathbb{R} : m \leq u_n \leq M$.

Exemple :

soit $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ définie par : $\forall n \in \mathbb{N} : \begin{cases} u_{n+1} = \sqrt{u_n + 2} \\ u_0 = 0 \end{cases}$

Montrer que $\forall n \in \mathbb{N} : u_n \leq 2$.

solution : pour $n = 0$ on a : $u_0 = 0 \leq 2$ (vérifie).

pour $n \geq 1$: supposons que $u_n \leq 2$ et montrons que $u_{n+1} \leq 2$.

On a $u_n \leq 2$ donc $u_n + 2 \leq 4 \Rightarrow \sqrt{u_n + 2} \leq \sqrt{4} = 2$

$\Rightarrow u_{n+1} \leq 2$.

3) Suite croissante, décroissante :

Définition : Soit $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ une suite :

- $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ est croissante si $\forall n \in \mathbb{N} ; u_{n+1} \geq u_n$.
- $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ est décroissante si $\forall n \in \mathbb{N} ; u_{n+1} \leq u_n$.

• $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est strictement croissante si $\forall n \in \mathbb{N}$: $u_{n+1} > u_n$.

• $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ " " décroissante " " : $u_{n+1} < u_n$.

* $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est monotone (resp: strictement monotone) si elle est croissante ou décroissante (resp: " croissante ou strictement décroissante).

Exemple:

* La suite $(u_n)_{n\geq 1}$ définie par $u_n = \frac{(-1)^n}{n}$ pour $n \geq 1$, la suite est ni croissante et ni décroissante. Elle est majorée par $\frac{1}{2}$ (borne atteinte en $n = 2$), minorée par -1 (borne atteinte en $n = 1$).

* La suite $\left(\frac{1}{n}\right)_{n\geq 1}$ est une suite strictement décroissante. Elle est majorée par 1 (borne atteinte en $n = 1$), et minorée par 0 mais cette valeur n'est jamais atteinte.

4/ Suite convergente:

• Une suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est convergente si elle admet une limite finie i.e: $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n = \ell$. ($\forall \varepsilon > 0, \exists N \in \mathbb{N}, \forall n > N$: $|u_n - \ell| < \varepsilon$).

Elle est divergente si la suite tend vers $\pm\infty$, ou elle n'admet pas de limite.

proposition:

* Si la suite est convergente, sa limite est unique.

Remarque :

1) si $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est une suite croissante et majorée alors $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est converge vers $l = \sup u_n$.

2) Si $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est une suite décroissante et minorée alors $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est converge vers $l = \inf u_n$.

5/ opérations sur les limites :

soient $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ et $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ deux suites convergentes alors :

1) si $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n = l \in \mathbb{R}$, $\forall \lambda \in \mathbb{R}$ on a : $\lim\limits_{n\to+\infty} \lambda u_n = \lambda l$.

2) si $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n = l$ et $\lim\limits_{n\to+\infty} v_n = l'$, $l, l' \in \mathbb{R}$ alors :

- $\lim\limits_{n\to+\infty} (u_n + v_n) = l + l'$.
- $\lim\limits_{n\to+\infty} (u_n \times v_n) = l \times l'$.

3) si $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n = l$, $l \in \mathbb{R}^*$ alors : $\lim\limits_{n\to+\infty} \frac{1}{u_n} = \frac{1}{l}$.

4) si $\forall n \in \mathbb{N} :$ $u_n \leq v_n$ alors : $l \leq l'$. $(l = \lim\limits_{n\to+\infty} u_n,\ l' = \lim\limits_{n\to+\infty} v_n)$.

5) si $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n = \lim\limits_{n\to+\infty} v_n = l$ et $u_n \leq w_n \leq v_n$ alors

$\lim\limits_{n\to+\infty} w_n = l$.

c/ suites adjacentes :

Soient $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ et $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ deux suites de réels. On dit qu'elles sont adjacentes si et seulement si :

1) l'une des suites est croissante,

2) l'autre suite est décroissante

3/ $\lim\limits_{n \to +\infty} (u_n - v_n) = 0.$

Proposition :

- Si les suites $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ et $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ sont adjacentes, elles convergent vers la même limite.

Exemple :

Soient (u_n) et (v_n) les deux suites définies pour $n \geq 1$

par : $u_n = \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k^2} = 1 + \frac{1}{2^2} + \frac{1}{3^2} + \cdots + \frac{1}{n^2}.$

et $v_n = u_n + \frac{2}{n+1}.$

Montrons que (u_n) et (v_n) sont deux suites adjacentes.

1/ a/ (u_n) est croissante car : $u_{n+1} - u_n = \sum_{k=1}^{n+1} \frac{1}{k^2} - \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k^2} = \frac{1}{(n+1)^2} > 0$

b/ (v_n) est décroissante car :

$$v_{n+1} - v_n = u_{n+1} + \frac{2}{n+2} - u_n - \frac{2}{n+1}$$

$$= \frac{1}{(n+1)^2} + \frac{2}{n+2} - \frac{2}{n+1} = \frac{n+2 + 2(n+1)^2 - 2(n+1)(n+2)}{(n+1)^2(n+2)}$$

$$= \frac{-n}{(n+2)(n+1)^2} < 0.$$

2/ pour tout $n \geq 1$: $v_n - u_n = \frac{2}{n+1} > 0$ donc $u_n \leq v_n$.

3/ Enfin comme $v_n - u_n = \frac{2}{n+1}$ alors $\lim\limits_{n\to+\infty} (v_n - u_n) = 0.$

alors (u_n) et (v_n) sont deux suites adjacentes.

7/ Suites extraites :

Définition : Etant donnée une suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$, on dit que $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est une suite extraite ou encore une sous-suite, s'il existe une application : $\varphi : \mathbb{N} \longrightarrow \mathbb{N}$ strictement croissante telle que pour tout $n \in \mathbb{N}$: $v_n = u_{\varphi(n)}$.

Exemple :

Soit la suite $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ de terme général $u_n = (-1)^n$.

Si on considère $\varphi : \mathbb{N} \longrightarrow \mathbb{N}$ donnée par $\varphi(n) = 2n$, alors la suite extraite correspondante a pour terme général $u_{\varphi(n)} = (-1)^{2n} = 1$, donc la suite $(u_{\varphi(n)})_{n \in \mathbb{N}}$ est constante égale à 1.

Proposition :

Soit $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ une suite. Si $\lim\limits_{n \to +\infty} u_n = l$, alors pour tout suite extraite $(u_{\varphi(n)})_{n \in \mathbb{N}}$ on a $\lim\limits_{n \to \infty} u_{\varphi(n)} = l$.

Corollaire :

~~Soit la suite $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ de terme général~~.

Soit $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ une suite, si elle admet une sous-suite divergente, ou bien si elle admet deux sous-suites convergent vers des limites distinctes, alors elle diverge.

Théorème : (de Bolzano-Weierstrass).

Tout suite bornée admet une sous-suite convergente.

8) Suite de Cauchy :

Définition : Une suite réelle $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ est dite de Cauchy si elle vérifie le critère de Cauchy :

$$\forall \varepsilon > 0, \exists N \in \mathbb{N} \text{ tel que : } \forall p, q \in \mathbb{N}, \text{ si } p, q \geq N \text{ alors } |u_p - u_q| \leq \varepsilon.$$

Proposition : Toute suite de Cauchy est bornée.

Proposition : Une suite réelle est convergente si et seulement si elle est de Cauchy.

9/ Suites arithmétiques:

Définition: Soient u_0 et r deux réels. La suite u est une suite arithmétique de premier terme u_0 et de raison r si et seulement si pour tout entier n on a:

$$u_{n+1} = u_n + r. \qquad (u_n = u_0 + n \cdot r).$$

plus généralement on aura: $u_n = u_p + (n-p) r$.

Somme de n termes:

$$S_n = u_0 + u_1 + \dots + u_{n-1} = \underset{\text{le nombre de termes.}}{\underset{\uparrow}{n}} \cdot \frac{u_0 + u_{n-1}}{2}$$

10/ Suites géométriques:

Définition: Soient $u_0 \in \mathbb{R}$ et $q \in \mathbb{R}^*$. La suite u est une suite géométrique de premier terme u_0 et de raison q ssi on a pour tout entier n on a:

$$u_{n+1} = q \cdot u_n \qquad (u_n = u_0 \cdot q^n).$$

plus généralement: $u_n = u_p \cdot q^{n-p}$.

si $S_n = 1 + q + q^2 + \dots + q^n$. alors on a:

si $q = 1 \Rightarrow S_n = n+1$ (la somme a $n+1$ terme).

si $q \neq 1 \Rightarrow S_n = \dfrac{1 - q^{n+1}}{1 - q}$ ($n+1$ est le # des termes).