Chapitre 01: Nombres réels et Nombres complexes:

1/ Nombres réels:

1.1/ Sous ensembles de $\mathbb{R}$:

On rappelle les notations usuelles pour les ensembles des nombres:

$\mathbb{N} = \{0, 1, 2, \ldots, n, \ldots\}$ est l'ensemble des entiers naturels.

$\mathbb{Z} = \{\ldots, -2, -1, 0, 1, 2, \ldots\}$ est l'ensemble des entiers relatifs.

$\mathbb{Q} = \{ p/q \,,\, p \in \mathbb{Z},\ q \in \mathbb{N}^* \}$ " des rationnels.

$\mathbb{D} = \{ r = \frac{p}{10^k} \in \mathbb{Q} \,,\, p \in \mathbb{Z},\ k \in \mathbb{N} \}$ est l'ensemble des nombres décimaux.

$\mathbb{R}$: l'ensemble des nombres réels.

Remarque:

1) On a les inclusions: $\mathbb{N} \subset \mathbb{Z} \subset \mathbb{D} \subset \mathbb{Q} \subset \mathbb{R}$.

2) les éléments de $\mathbb{R}/\mathbb{Q}$ sont appelés nombres irrationnels.

1.2/ propriétés de $\mathbb{R}$:

Le corps des nombres réels est un ensemble $\mathbb{R}$ pour lequel sont définies:

* deux lois $(x, y) \longrightarrow x + y$ et $(x, y) \longrightarrow x \cdot y$ de $\mathbb{R} \times \mathbb{R}$ dans

$\mathbb{R}$ qui prolongent les opérations d'addition (+) et de multiplication (·) définies dans $\mathbb{N}$, $\mathbb{Z}$ et $\mathbb{Q}$

* une relation d'ordre totale $\leq$ (ou bien $\geq$) qui satisfont les axiomes suivants :

a) axiome 1 : $\mathbb{R}$ est un corps commutatif i.e :

1) $\forall x, y \in \mathbb{R}$: $x + y = y + x$. (+ est commutative).

2) $\forall x, y, z \in \mathbb{R}$: $(x+y)+z = x+(y+z)$. (+ est associative).

3) $\exists\, 0 \in \mathbb{R}$ tel que $0 + x = x + 0 = x$, pour tout $x \in \mathbb{R}$ (0 est un élément neutre pour +).

4) $\forall x \in \mathbb{R}$, $\exists (-x) \in \mathbb{R}$ tel que : $x + (-x) = 0$ ($-x$ est l'élément symétrique de x dans $\mathbb{R}$).

5) $\forall x, y \in \mathbb{R}$: $x \cdot y = y \cdot x$, (· est commutative).

6) $\forall x, y, z \in \mathbb{R}$: $x \cdot (y \cdot z) = (x \cdot y) \cdot z$ (· est associative).

7) $\forall x \in \mathbb{R}$, $\exists\, 1 \in \mathbb{R}$ tel que : $1 \cdot x = x \cdot 1 = x$.
(1 est l'élément neutre pour ·)

8) pour chaque élément $x \neq 0$ de $\mathbb{R}$, il existe un élément $x^{-1} \in \mathbb{R}$ tel que : $x \cdot x^{-1} = x^{-1} \cdot x = 1$. (l'élément inverse).

9) $\forall x, y, z \in \mathbb{R}$: $x \cdot (y + z) = x \cdot y + x \cdot z$
(la distributivité de la multiplication sur l'addition).

axiome 2 : $\mathbb{R}$ est un corps totalement ordonné : la rélation vérifier les propriétés suivantes :

10) $\forall x \in \mathbb{R} : x \leq x$ (réflexive)

11) $\forall x, y \in \mathbb{R} : x \leq y$ et $y \leq x \Rightarrow x = y$ (antisymétrique).

12) $\forall x, y, z \in \mathbb{R} : x \leq y$ et $y \leq z \Rightarrow x \leq z$ (transitive).

13) $\forall x, y, z \in \mathbb{R} : x \leq y \Rightarrow x + z \leq y + z$.

14) $\forall x \geq 0, y \geq 0$, alors : $x \cdot y \geq 0$.

c) axiome 3 :

* Toute partie A non vide de $\mathbb{R}$ et majoré admet une borne supérieure qu'on note $\sup(A)$.
* Toute partie A non vide de $\mathbb{R}$ et minoré admet une borne inférieure qu'on note $\inf(A)$.

Remarque : soit A une partie non vide de $\mathbb{R}$ alors :

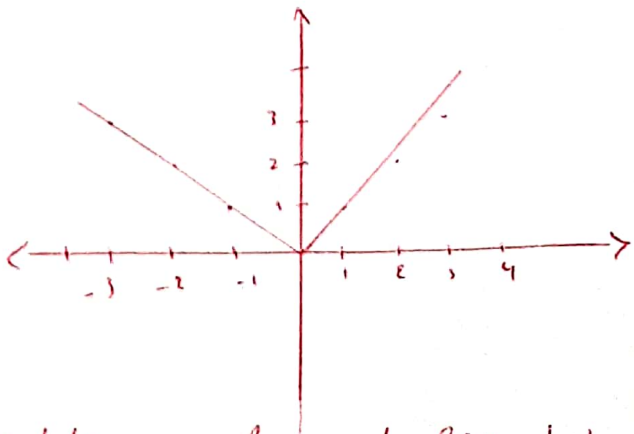
$$A = \{x \in \mathbb{R} \mid x \in A\}$$

$$-A = \{x \in \mathbb{R} \mid -x \in A\}.$$

d) Valeur absolue :

Définition : soit $x \in \mathbb{R}$, on appelle valeur absolue de x (notée $|x|$), le réel définie par :

$$|x| = \begin{cases} x, & \text{si } x > 0 \\ 0, & \text{si } x = 0 \\ -x, & \text{si } x < 0 \end{cases}$$



Représentation graphique de $f(x) = |x|$.

propriétés de la valeur absolue :

La valeur absolue vérifié les propriétés suivantes :

1) $\forall x \in \mathbb{R} : |x| \geq 0$.

2) $\forall x, y \in \mathbb{R} : |x \cdot y| = |x| \cdot |y|$

3) $\forall x, y \in \mathbb{R} : |x+y| \leq |x| + |y|$.

4) $\forall x, y \in \mathbb{R} : \big||x| - |y|\big| \leq |x+y|$.

5) $\forall \varepsilon > 0, \forall x \in \mathbb{R} : |x-a| < \varepsilon \iff a - \varepsilon \leq x \leq \varepsilon + a$.

e) propriété d'Archimed :

$\mathbb{R}$ est archimédienn, c'est-à-dire :

$\forall x \in \mathbb{R}, \exists n \in \mathbb{N}$ tel que : $n > x$.

f) La partie entière :

Définition : soit $x \in \mathbb{R}$, il existe un entier relatif noté $E(x)$ tel que :

$E(x) \leq x \leq E(x) + 1$.

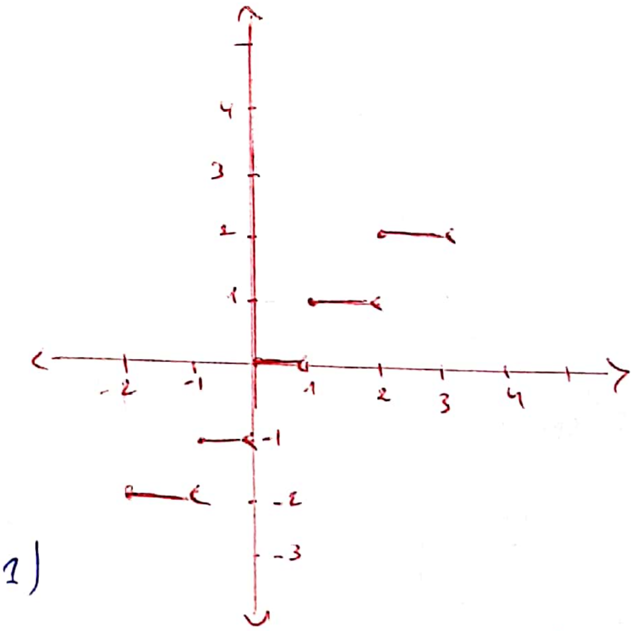
c'est le plus grand des entiers inferieur ou égal à x.

Exemple : $E(0,3) = 0 \quad (0 \leq 0,3 \leq 0+1 = 1)$

$E(3,3) = 3 \quad (3 \leq 3,3 \leq 3+1 = 4)$

$E(-4) = -4, \quad E(5) = 5$

$E(-1,5) = -2 \quad (-2 \leq -1,5 \leq -2+1 = -1)$



Représentation graphique de la fonction $f(x) = E(x)$

Propriétés:

1/ La partie entière est une application croissante.

2/ $\forall x \in \mathbb{R}$, $x = E(x) \Leftrightarrow x \in \mathbb{Z}$.

3/ $\forall (x,n) \in (\mathbb{R} \times \mathbb{Z})$: $E(x+n) = E(x) + n$.

g) Densité de $\mathbb{Q}$ dans $\mathbb{R}$:

Théorème: Entre deux réels quelconques, il existe un rationnel, c'est-à-dire :

$\forall x, y \in \mathbb{R}$, $x < y \Rightarrow \exists\, q \in \mathbb{Q}$ tel que : $x < q < y$.

h) Les intervalles:

Soient $a, b \in \mathbb{R}$ tel que : $a < b$, les seuls intervalles de $\mathbb{R}$ sont :

1/ $\mathbb{R} =]-\infty, +\infty[$

2/ $\emptyset$: l'ensemble vide.

3/ $[a, b] = \{x \in \mathbb{R} \mid a \leq x \leq b\}$ fermé.

4/ $]a, b[= \{x \in \mathbb{R} \mid a < x < b\}$ ouvert.

5/ $]a, b] = \{x \in \mathbb{R} \mid a < x \leq b\}$ ouvert en a.

6/ $[a, b[= \{x \in \mathbb{R} \mid a \leq x < b\}$ " " b.

Les intervalles non bornées :

7/ $[a, +\infty[= \{x \in \mathbb{R} \mid x \geq a\}$

8/ $]a, +\infty[= \{x \in \mathbb{R} \mid x > a\}$

9/ $]-\infty, b] = \{x \in \mathbb{R} \mid x \leq b\}$

10/ $]-\infty, b[= \{x \in \mathbb{R} \mid x < b\}$

Notation :

$\mathbb{R}^* = \mathbb{R} - \{0\}$; $\mathbb{R}^*_+ = \{x \in \mathbb{R}, x > 0\}$

$\mathbb{R}^*_- = \{x \in \mathbb{R}, x < 0\}$; $\mathbb{R}_+ = \{x \in \mathbb{R}, x \geq 0\}$

$\mathbb{R}_- = \{x \in \mathbb{R}, x \leq 0\}$.

Proposition : Formule du binôme de Newton :

Soient x, y deux réels et n un entier naturel non nul. On a,

$$(x+y)^n = \sum_{k=0}^{n} C_n^k \, x^k y^{n-k}, \quad \text{où } C_n^k = \frac{n!}{k!\,(n-k)!}, \quad 1! = 1, \quad 0! = 1.$$

Droite numérique achevée $\overline{\mathbb{R}}$: (prolongement de $\mathbb{R}$).

Définition : On note $\overline{\mathbb{R}}$ l'ensemble $\mathbb{R} \cup \{-\infty, +\infty\}$. Cet ensemble est appelé droite numérique achevée.

Relation d'ordre sur $\overline{\mathbb{R}}$:

On munit $\overline{\mathbb{R}}$ d'un ordre total $\leq$ prolongeant celui de $\mathbb{R}$ et défini en outre par :

$$\forall x \in \mathbb{R}, \ -\infty \leq x \leq +\infty \quad (\text{en fait } -\infty < x < +\infty).$$

Opération sur $\overline{\mathbb{R}}$:

De même, on "étend" (de façon toujours commutative) les lois $+$ et $\times$ de $\mathbb{R}$ en posant :

1) $(+\infty) + (+\infty) = +\infty$; $(-\infty) + (-\infty) = -\infty$.

2) $\forall x \in \mathbb{R}$, $x + (+\infty) = +\infty$, et $x + (-\infty) = -\infty$.

3) $(+\infty)(+\infty) = +\infty$, $(-\infty)(-\infty) = +\infty$, $(+\infty)(-\infty) = -\infty$.

$\forall x \in \mathbb{R}^*_-$, $x(+\infty) = -\infty$ et $x(-\infty) = +\infty$.

3) $\forall x \in \mathbb{R}^*_+$, $x(+\infty) = +\infty$ et $x(-\infty) = -\infty$.

Formes indéterminées :

Les expressions suivantes sont appelées formes indéterminées :

$(+\infty) + (-\infty)$; $0(-\infty)$, $0(+\infty)$. $\frac{\infty}{\infty}$, $\frac{0}{0}$.

1.3/ Ordre dans $\mathbb{R}$:

a) Majorants, Minorants :

Définition soit A un sous-ensemble non vide de $\mathbb{R}$, on dit que :

* A est majorée par M (ou $M \in \mathbb{R}$ est un majorant de A) si $\forall x \in A$; $x \leq M$.

* A est minorée par m (ou m est un minorant de A) si $\forall x \in A$: $x \geq m$.

* A est bornée si elle est à la fois majorée et minorée, c'est-à-dire :

$\exists (m, M) \in \mathbb{R}^2$, $\forall x \in A$: $m \leq x \leq M$.

b/ Maximum, Minimum :

Définition : soit A un sous-ensemble non vide de $\mathbb{R}$, on dit que :

* $M \in \mathbb{R}$ est un maximum de A et on note $\max A$ si $M \in A$ et M est un majorant de A.

* $m \in \mathbb{R}$ est un minimum de A et on note $\min A$ si $m \in A$ et m est un minorant de A.

c/ Borne supérieure, Borne inférieure:

Soit A un sous-ensemble non vide de $\mathbb{R}$

définition: On appelle borne supérieure (resp: borne inférieure) de A le plus petit des majorants de A, s'il existe on le note $\sup(A)$ (resp: le plus grand des minorants de A, s'il existe on le note $\inf(A)$).

Exemples:

1) Soit $A =]0,1[$, A est majoré par 1 et minoré par 0.

* l'ensemble des majorants est $[1,+\infty[$, celui ci admet le plus petit des majorants qui est $1 \notin A$. donc:

$\sup(A) = 1$ et $\max(A)$ n'existe pas.

* $]-\infty,0]$ est l'ensemble des minorants ~~qui~~, celui ci admet le plus grand des minorants qui est $0 \notin A$.

donc $\inf(A) = 0$ et $\min(A)$ n'existe pas.

2) Soit $B = \{x \in \mathbb{Z},\ x^2 \leq 49\} = \{-7,-6,\dots,5,6,7\}$.

* l'ensemble des majorants : $M = [7,+\infty[$ et $7 \in B$

donc : $\sup(B) = \max(B) = 7$.

* l'ensemble des minorants : $m =]-\infty,-7]$ et $-7 \in B$

donc : $\max(B) = \inf(B) = -7$.

$=]-\infty, 1]$, donc c est majoré par $[1, +\infty[$ et non minoré. Alors: $\max(c) = \sup(c) = 1$.

et $\inf(c)$, $\min(c)$ ne sont pas existe.

1.4 | Caractérisation de la borne supérieure et la borne inférieure:

proposition: soit $A \neq \phi$, $A \subset \mathbb{R}$.

- Si A est un ensemble majoré et $M \in \mathbb{R}$, alors:

$$M = \sup(A) = \begin{cases} \forall x \in A : x \leq M. \\ \forall \varepsilon > 0, \exists x \in A : M - \varepsilon < x \leq M \end{cases}$$

- Si A est un ensemble minoré et $m \in \mathbb{R}$, alors:

$$m = \inf(A) = \begin{cases} \forall x \in A : x \geq m. \\ \forall \varepsilon > 0, \exists x \in A : m \leq x < m + \varepsilon. \end{cases}$$

Application:

Soit $A = \{ x_n = \frac{1}{2} + \frac{n}{2n+1}, n \in \mathbb{N} \}$

1) Montrer que: $\forall x_n \in A$, alors $\frac{1}{2} \leq x_n < 1$.

2) Trouver $\sup A$ et $\inf A$.

3) Montrer que $\sup(A) = 1$

solution:

1) On montre que: $\forall x_n \in A : \frac{1}{2} \leq x < 1$. On a $\forall n \in \mathbb{N}$:

$$x_n = \frac{1}{2} + \frac{n}{2n+1}$$

$\forall n \in \mathbb{N}$: $0 \leq 2n < 2n+1 \Rightarrow 0 \leq \frac{2n}{2n+1} < 1$

$$\Rightarrow 0 \leq \frac{1}{2} \cdot \frac{2n}{2n+1} < \frac{1}{2}$$

alors, $0 \leq \frac{n}{2n+1} < \frac{1}{2} \Rightarrow \frac{1}{2} \leq \frac{1}{2} + \frac{n}{2n+1} < 1.$

donc : $\forall n \in \mathbb{N}, \ \frac{1}{2} \leq x_n < 1.$

2) on a, $\frac{1}{2} \leq x_n < 1$, alors A est borné, c'est-à-dire

inf(A) et sup(A) existent.

on a, $\frac{1}{2}$ est un minorant de A et $\frac{1}{2} \in A$, alors,

$\min A = \inf A = \frac{1}{2}.$

et 1 le plus petit majorant de A donc $\sup A = 1.$

3) Montrons que $\sup A = 1$.

on utilise la propriété caractéristique de la borne supérieure,

$$\sup A = 1 \Leftrightarrow \begin{cases} 1) & 1 \text{ est majorant de } A. \\ 2) & \forall \varepsilon > 0, \exists x_n \in A \ (n \in \mathbb{N}), \ x_n > 1 - \varepsilon. \end{cases}$$

posons : $x_n = \frac{1}{2} + \frac{n}{2n+1} > 1 - \varepsilon$, et cherchons n

en fonction de ε.

$$x_n = \frac{1}{2} + \frac{n}{2n+1} > 1 - \varepsilon \Rightarrow -\frac{1}{2} + \frac{n}{2n+1} > -\varepsilon$$

$$\Rightarrow \frac{1}{2} - \frac{n}{2n+1} < \varepsilon.$$

$$\Rightarrow \frac{\cancel{2n}+1-\cancel{2n}}{2(2n+1)} < \varepsilon$$

$$\Rightarrow \frac{1}{2(2n+1)} < \varepsilon \Rightarrow \frac{1}{2n+1} < 2\varepsilon$$

$$\Rightarrow 2n+1 > \frac{1}{2\varepsilon}$$

$$\Rightarrow 2n > \frac{1}{2\varepsilon} - 1 \Rightarrow n > \frac{1}{4\varepsilon} - \frac{1}{2}$$

$\exists n_1 = E\left(\frac{1}{4\varepsilon} - \frac{1}{2}\right) + 1$ alors $\sup A = 1$.

Nombres complexes :

1) **Définition :** un nombre complexe est un couple $(a,b) \in \mathbb{R}^2$ que l'on notera : $z = a+ib$.

On note $\mathbb{C}$ l'ensemble des nombres complexe.

si $b=0$, alors $z = a$, dans ce cas on dira que z est réel.

si $b \neq 0, a=0$, z est dit imaginaire pur.

2) **Opérations :**

si $z = a+ib$ et $z' = a'+ib'$ sont deux nombres complexes, alors on définit les opérations suivantes :

a) addition : $(a+ib) + (a'+ib') = (a+a') + i(b+b')$.

b) multiplication : $(a+ib)(a'+ib') = (aa' - bb') + i(ab' + ba')$.

On développe en suivant les règles de la multiplication usuelle avec la convention suivante : $i^2 = -1$.

3) **partie réelle et imaginaire :**

Soit $z = a+ib$ un nombre complexe, sa partie réelle est le réel a et on note $Re(z)$, sa partie imaginaire est le réel b et on note $Im(z)$.

* si $z = a+ib$ et $z' = a'+ib'$, $z = z'$ alors : $\begin{cases} a = a' \\ b = b' \end{cases}$

4) **conjugué, module :**

* le conjugué de $z = a+ib$ est $\bar{z} = a-ib$, autrement dit $Re(\bar{z}) = Re(z)$ et $Im(\bar{z}) = -Im(z)$.

* Le module de $z = a+ib$ est le réel positif
$|z| = \sqrt{a^2+b^2}$. Comme $z \times \bar{z} = (a+ib)(a-ib) = a^2+b^2$
alors le module vaut aussi $|z| = \sqrt{z\bar{z}}$.

<u>propriétés</u>;

1) $\overline{z+z'} = \bar{z} + \bar{z'}$; $\bar{\bar{z}} = z$; $\overline{zz'} = \bar{z}\,\bar{z'}$.

2) $z = \bar{z} \Leftrightarrow z \in \mathbb{R}$.

3) $|z|^2 = z \times \bar{z}$; $|\bar{z}| = |z|$, $|zz'| = |z||z'|$.

4) $|z| = 0 \Leftrightarrow z = 0$.

5) $|z+z'| \leq |z| + |z'|$ (Inégalité triangulaire).

6) $\left|\frac{z}{z'}\right| = \frac{|z|}{|z'|}$, $z' \neq 0$.

7) $\left|\frac{1}{z}\right| = \frac{1}{|z|}$, $z \neq 0$.

<u>Démonstration</u> (Inégalité triangulaire).

$$
\begin{aligned}
|z+z'|^2 &= (z+z')(\overline{z+z'}) \\
&= z\bar{z} + z'\bar{z'} + z\bar{z'} + z'\bar{z} \\
&= |z|^2 + |z'|^2 + 2\,\mathrm{Re}(z'\bar{z}) \\
&\leq |z|^2 + |z'|^2 + 2|zz'| \\
&\leq (|z| + |z'|)^2
\end{aligned}
$$

8) $|\mathrm{Re}(z)| \leq |z|$ et $|\mathrm{Im}(z)| \leq |z|$

9) $z + \bar{z} = 2\,\mathrm{Re}(z)$ et $z - \bar{z} = 2i\,\mathrm{Im}(z)$.

<u>Preuve</u>: $z + \bar{z} = (a+ib) + (a-ib) = 2a = 2\,\mathrm{Re}(z)$.

Argument :

Définition : pour tout $z \in \mathbb{C}^* = \mathbb{C} \setminus \{0\}$, un nombre $\theta \in \mathbb{R}$ tel que $z = |z|(\cos\theta + i\sin\theta)$ est appelé un argument de z et noté $\theta = \arg(z)$.

cet argument est défini d'un multiple entier de 2π près par.

$\cos\theta = \frac{x}{|z|}$ et $\sin\theta = \frac{y}{|z|}$.

i.e : $\arg(z) = \begin{cases} \cos\theta = x/|z| \\ \sin\theta = \frac{y}{|z|} \end{cases}$.

Proposition :

L'argument satisfait les propriétés suivantes :

1/ $\arg(zz') = \arg(z) + \arg(z')$.

2/ $\arg(z^n) = n\arg(z)$.

3) $\arg\left(\frac{1}{z}\right) = -\arg(z)$.

4) $\arg(\bar{z}) = -\arg(z)$

5) $\arg(z/z') = \arg(z) - \arg(z')$.

Démonstration :

$$zz' = |z|(\cos\theta + i\sin\theta)\,|z'|(\cos\theta' + i\sin\theta')$$
$$= |zz'|(\cos\theta\cos\theta' - \sin\theta\sin\theta' + i(\cos\theta\sin\theta' + \sin\theta\cos\theta'))$$
$$= |zz'|(\cos(\theta+\theta') + i\sin(\theta+\theta')).$$

donc $\arg(zz') = \arg(z) + \arg(z')$.

d/ Forme trigonométrique:

soit $z = x+iy$, $|z| = \sqrt{x^2+y^2}$ et $\theta = \arg(z)$.

on a, $x = |z|\cos\theta$, $y = |z|\sin\theta$. donc,

$$z = x+iy = |z|\cos\theta + i|z|\sin\theta = |z|(\cos\theta + i\sin\theta).$$
$$= |z|e^{i\theta}$$

c'est la forme trigonométrique de z.

cette représentation est très utile pour la multiplication et la division des nombres complexes:

- $z_1 \times z_2 = |z_1|e^{i\theta_1} \times |z_2|e^{i\theta_2} = |z_1| \times |z_2| e^{i(\theta_1+\theta_2)}$,
- $\dfrac{z_1}{z_2} = \dfrac{|z_1|e^{i\theta_1}}{|z_2|e^{i\theta_2}} = \dfrac{|z_1|}{|z_2|} e^{i(\theta_1-\theta_2)}$.

e/ Formule de Moivre:

$(e^{i\theta})^n = e^{in\theta} \Leftrightarrow (\cos\theta + i\sin\theta)^n = \cos n\theta + i\sin n\theta$ et la formule de Moivre.

pour le calcul, on utilise suivant les expressions:

$$\cos\theta = \frac{e^{i\theta}+e^{-i\theta}}{2}, \quad \sin\theta = \frac{e^{i\theta}-e^{-i\theta}}{2i}, \quad \theta \in \mathbb{R}.$$

application:

- En développant la formule de Moivre à l'aide de la formule de binôme Newton;

$$(\cos\theta + i\sin\theta)^n = \sum_{k=0}^{n} C_n^k (\cos\theta)^{n-k}(i\sin\theta)^k.$$

tel que, $C_n^k = \dfrac{n!}{k!(n-k)!}$, $C_n^n = \dfrac{n!}{n!\,0!} = 1$ et $C_n^0 = \dfrac{n!}{0!\,n!} = 1$

et $0! = 1$

on a

$$(\cos\theta + i\sin\theta)^n = C_n^0 (\cos\theta)^n (i\sin\theta)^0 + C_n^1 (\cos\theta)^{n-1} (i\sin\theta)^1 + \dots +$$

$$C_n^k (\cos\theta)^{n-k} (i\sin\theta)^k + \dots + C_n^n (\cos\theta)^0 (i\sin\theta)^n.$$

on a donc :

<u>la partie réel</u> : $\cos n\theta = (\cos\theta)^n - C_n^2 (\cos\theta)^{n-2} (\sin\theta)^2 + C_n^4 (\cos\theta)^{n-4} (\sin\theta)^4 + \dots$

et

<u>la partie imaginaire</u> :

$$\sin n\theta = C_n^1 (\cos\theta)^{n-1} (\sin\theta)^1 - C_n^3 (\cos\theta)^{n-3} (\sin\theta)^3 + \dots$$

donc. $(\cos\theta + i\sin\theta) = \cos n\theta + i\sin n\theta.$

<u>Exemple</u>:

pour $n = 3$:

$$(\cos 3\theta + i\sin 3\theta)^3 = \sum_{k=0}^{3} C_3^k (\cos\theta)^{3-k} (i\sin\theta)^k$$

$$= C_3^0 (\cos\theta)^3 (i\sin\theta)^0 + C_3^1 (\cos\theta)^2 (i\sin\theta)^1 + C_3^2 (\cos\theta)^1 (i\sin\theta)^2$$

$$+ C_3^3 (\cos\theta)^0 (i\sin\theta)^3.$$

$$= \cos^3\theta + 3i\cos^2\theta \sin\theta - 3\cos\theta\sin^2\theta - i\sin^3\theta.$$

En identifiant les parties réelles et imaginaires, on déduit que ;

$\cos 3\theta = \cos^3\theta - 3\cos\theta\sin^2\theta$ et $\sin 3\theta = 3\cos^2\theta\sin\theta - \sin^3\theta.$

f) Racines n-ièmes:

Définition 3:

pour $z \in \mathbb{C}$ et $n \in \mathbb{N}^*$ une racine n-ième est un ~~nob~~ nombre $w \in \mathbb{C}$ tel que : $w^n = z$. (où $w = \rho(\cos\delta + i\sin\delta)$ $= \rho e^{i\delta}$. (et $z = r e^{i\theta}$)

$$w^n = z \Rightarrow \rho^n e^{in\delta} = r e^{i\theta}$$

$$\Rightarrow \begin{cases} \rho^n = r \\ e^{in\delta} = e^{i\theta} \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \rho^n = r \\ n\theta = \theta + 2k\pi, \; k \in \mathbb{Z} \end{cases}$$

donc, $\begin{cases} \rho = \sqrt[n]{r} \\ \delta = \dfrac{\theta}{n} + \dfrac{2k\pi}{n}, \end{cases} k \in \mathbb{Z}.$

d'où expression n racines n-ièmes de z:

$$z_k = \sqrt[n]{r}\left[\cos\left(\frac{\theta}{n} + \frac{2k\pi}{n}\right) + i\sin\left(\frac{\theta}{n} + \frac{2k\pi}{n}\right)\right], \quad 0 \leq k \leq n-1$$

Cas particulier:

$z = 1$, les racines n-ièmes de 1 sont:

$$z_k = \cos\left(\frac{2k\pi}{n}\right) + i\sin\left(\frac{2k\pi}{n}\right), \quad 0 \leq k \leq n-1.$$

$(\theta = 0)$