

Chapitre I et II

Modélisation générale des machines pour les régimes dynamiques

I. Généralités sur les machines électriques

I.1 Introduction

Une machine électrique tournante est un système électromécanique réversible, qui transforme l'énergie électrique en énergie mécanique (fonctionnement moteur) et vice versa (fonctionnement générateur).

Les machines électriques constituent aujourd'hui l'une des principales forces motrices de la civilisation contemporaine. Elles sont quasiment omniprésentes dans les industries : production d'énergie électrique, transport (voitures, trains, avions), robotique, machines à outils, usages domestiques... etc.

Ce chapitre est dédié à la présentation des machines électriques : leurs structures, principes de fonctionnement, domaines d'application, leur mise en équations et leurs modèles en vue de la commande.

I.2 Structure des machines électriques

Les machines électriques tournantes sont constituées d'une partie fixe, le stator, et d'une partie tournante, le rotor, comme illustré dans la figure (I.1). Ces deux parties sont séparées par un entrefer, qui peut être constant, on parle alors de machines à pôles lisses, ou variable, dans le cas des machines à pôles saillants, figure (I.2).

On distingue plusieurs catégories de machines électriques selon :

- Leur alimentation statorique : continue ou alternative ;
- Leur rotor : bobiné excité, bobiné en court-circuit, à aimant permanent, à réluctance variable, à cage, etc.
- Leur entrefer : pôles lisses ou saillants.

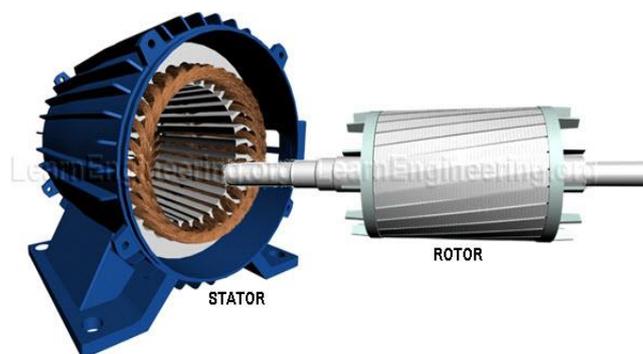
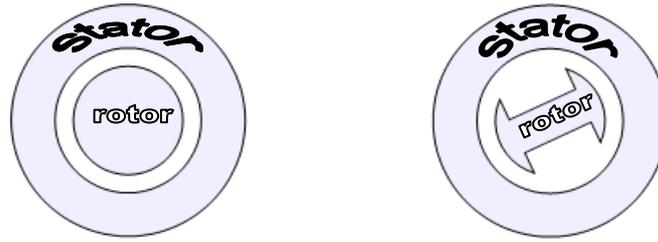


Figure (I.1) : stator et rotor d'une machine tournante



(a) Pôles lisses

(b) Pôles saillants

Figure 1.2 : vue de la structure simplifiée des machines à pôles lisses et à pôles saillants

Pour la classification des machines électriques tournantes, on distingue deux grandes catégories de machines électriques :

- * les machines à courant continu.
- * les machines à courant alternatif.

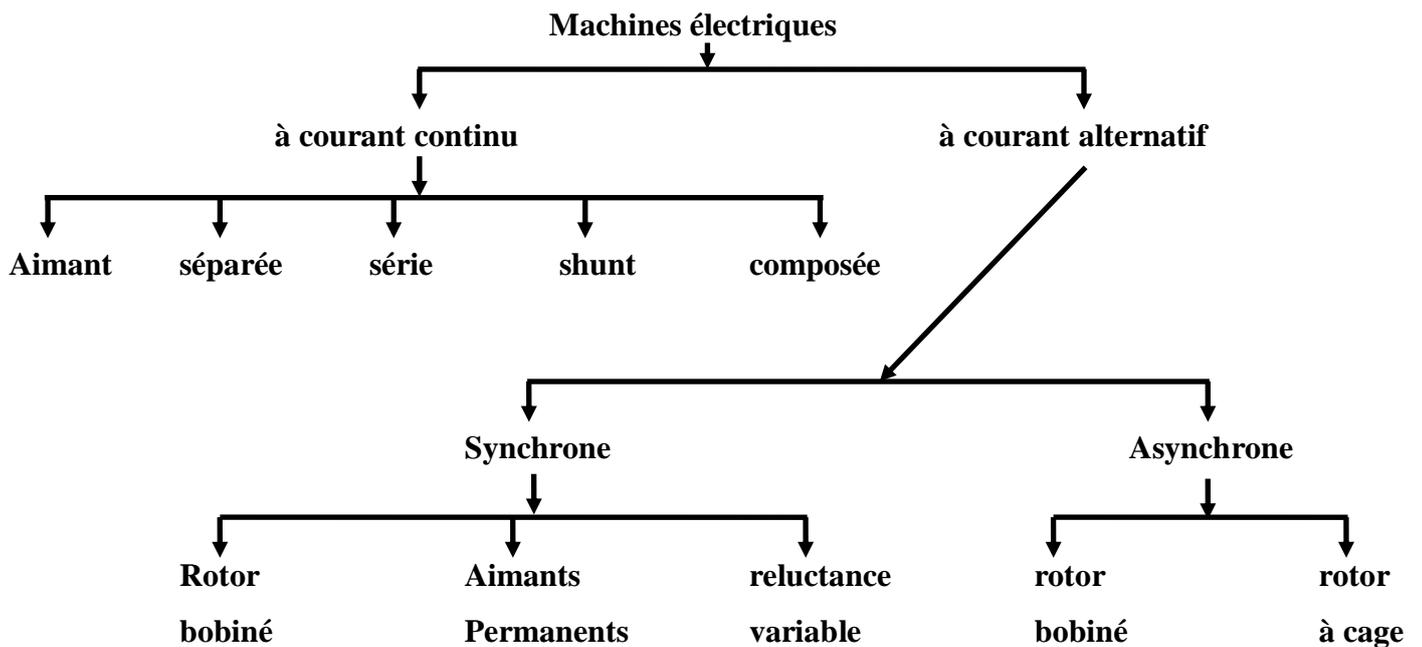


Figure (I.3): Nature des machines électriques

I.3 Les machines à courant continu (DC)

Les machines DC sont les premières à apparaître parmi les machines électriques. Leur principe de fonctionnement repose sur : le stator (inducteur) fournit un champ magnétique de direction et sens constants dans l'entrefer (via un électro-aimant ou un aimant permanent). Le rotor (induit) est équipé d'un certain nombre d'électro-aimants (spires) dont la polarité est inversible par un système mécanique de balais-collecteurs, figure(I.4); la polarité de chaque

spire est inversée une fois par demi-tour de façon à créer un champ magnétique induit en quadrature avec le champ inducteur pour produire un couple électromagnétique.

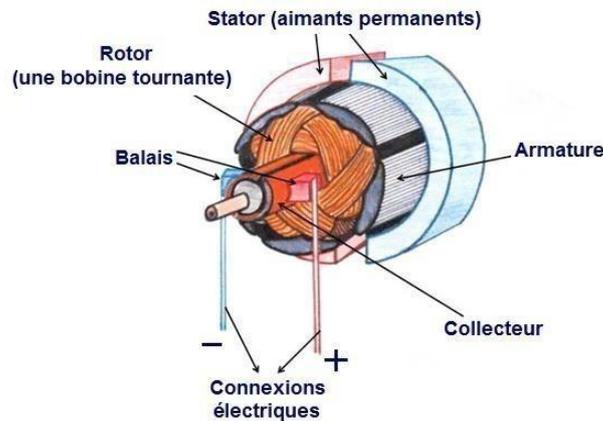


Figure (I.4): vue éclatée d'une machine DC

Suivant la configuration des bobinages statorique et rotorique, il existe 5 sous-catégories de machines DC:

- ✓ Machine à excitation séparée : le stator et le rotor sont séparément alimentés.
- ✓ Machine série : les enroulements statoriques et rotoriques sont montés en série.
- ✓ Machine shunt ou à excitation parallèle : les enroulements inducteur et induit sont montés en parallèle.
- ✓ Machine à excitation composée : une partie du stator est montée en série avec le rotor et une autre est de type shunt.
- ✓ Machine à aimant permanent : l'inducteur est un aimant permanent.

La machine DC se trouve dans une large gamme d'activités industrielles; elle est utilisée dans le secteur automobile pour les démarreurs, les petits actionneurs (essuie-glaces, vitres électriques, etc.), elle est également utilisée dans la traction ferroviaire, dans la robotique et dans les produits électroménagers.

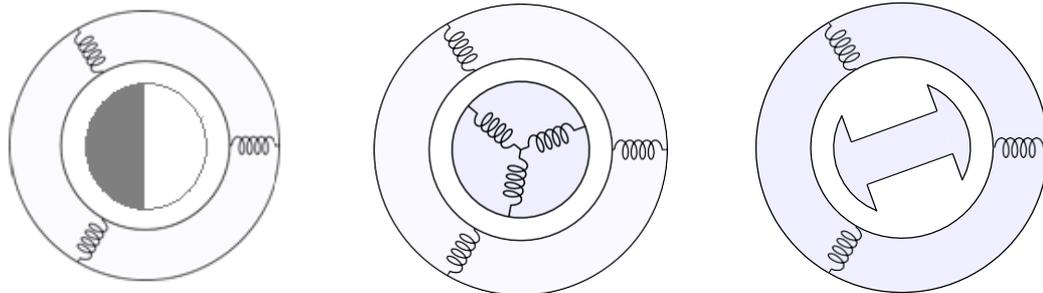
Avantages et inconvénients Les machines DC sont plus faciles à commander que les machines AC. En revanche, elles ont un rapport puissance/volume inférieur à celui des machines AC, et la présence d'une commutation mécanique raccourcit la durée de vie de ces machines (entretien nécessaire) et limite leur utilisation dans certains lieux vulnérables aux étincelles générées par le système de commutation.

I.4 Les machines à courant alternatif AC

Le stator, alimenté par un système polyphasé, crée dans l'entrefer un champ magnétique tournant qui interagit avec le rotor pour fournir un couple sur l'arbre de la machine. Il existe trois types d'interactions entre le champ tournant et le rotor :

- ✓ interaction champ tournant - aimant : c'est le cas des machines synchrones à aimants permanents,
- ✓ interaction champ tournant - courant : comme dans les machines asynchrones et les machines synchrones à rotor bobiné,
- ✓ interaction champ tournant - matériau ferromagnétique : il s'agit des machines à réluctance variable.

La figure 1.5 montre des exemples sur les différents types d'interaction pour les machines triphasées.



Champ tournant (a) aimant

(b) courant

(c) matériau ferromagnétique

Figure 1.5: Exemples de différents types d'interaction entre le champ tournant et le rotor

Les machines AC se divisent en deux grandes familles :

- ✓ Machines synchrones : le rotor peut contenir des aimants permanents, un électroaimant, ou simplement un matériau ferromagnétique avec une saillance. Dans tous les cas, il tourne à la même vitesse que le champ tournant (vitesse de synchronisme).
- ✓ Machines asynchrones, ou à induction : la vitesse du rotor est légèrement différente de celle du champ tournant ; la vitesse relative entre le rotor et le champ tournant est appelée glissement. Le rotor d'une machine asynchrone est généralement en court-circuit.

Les machines asynchrones sont largement utilisées dans les applications ne nécessitant pas une haute précision. La machine synchrone à rotor bobiné est souvent utilisée en fonctionnement générateur dans les centrales électriques, ou en tant que compensateur

synchrone. La machine synchrone à aimants permanents est très performante, elle est utilisée en tant que moteur dans des applications de haute précision et de haute puissance. Les machines à réluctance variable sont moins performantes que les machines à aimants.

Avantages et inconvénients : Par rapport aux machines DC, les machines AC présentent un plus grand rapport puissance sur volume. La plupart des machines AC sont des machines sans balais, nécessitant moins de maintenance. En revanche, la commande performante de ces machines n'est pas simple comme celle des machines DC.

II. Théorie de la machine électrique généralisée

II.1 machine électrique idéalisée

Afin de faciliter l'étude et la mise en équation, la machine électrique idéalisée peut admettre les hypothèses suivantes:

- ✓ Machine à deux armatures (stator+rotor) à entrefer d'épaisseur uniforme (constant).
- ✓ Le bobinage est réparti de manière à donner une f.m.m. sinusoïdale s'il est alimenté par des courants sinusoïdaux.
- ✓ Régime non saturé, le phénomène d'hystérésis et les courants de Foucault en plus l'effet de peau sont négligés.
- ✓ Haute perméabilité magnétique ce qui implique un potentiel magnétique uniquement dans l'entrefer.
- ✓ Chaque armature contient un bobinage triphasé dont la résistance ne varie pas avec la température.
- ✓ chaque phase est caractérisée par sa bobine équivalente
- ✓ Les composantes homopolaires sont nulles.

Des conséquences importantes découlent de ces hypothèses, telles que:

- L'additivité des flux.
- Les inductances propres sont constantes.
- Les inductances mutuelles, entre les enroulements du stator et du rotor, ont une loi de variation sinusoïdale en fonction de l'angle électrique.

II.2 machine électrique généralisée

il existe deux types de modèles de la machine électrique généralisée :

- le modèle triphasé : modèle de référence de la machine généralisée avec trois axes.
- le modèle biphasé : modèle triphasé projeté sur deux axes.

II.2.1 Modèle triphasé de la machine électrique généralisée

Des conditions de (II.1), si on considère que la machine électrique généralisée est triphasée au stator et au rotor figure (I.6). Les trois types d'équations traduisant le comportement de cette machine sont :

- Les équations électriques.
- Les équations magnétiques.
- L'équation mécanique.

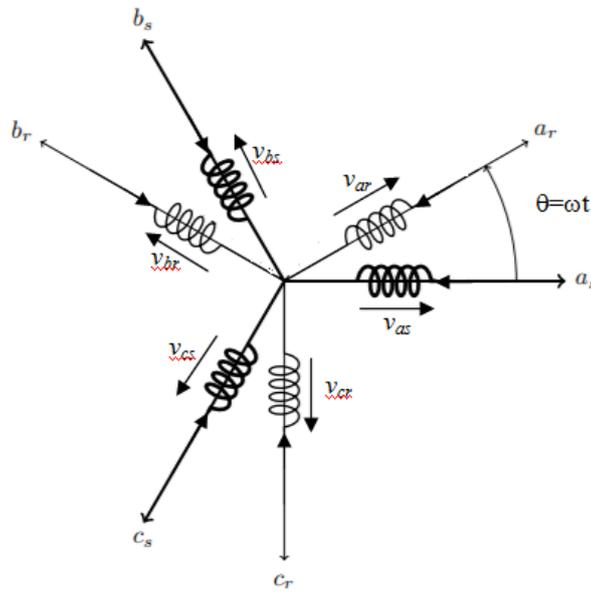


Figure (I.6) : Modèle triphasé de la machine électrique généralisée.

II.2.1.1 Equations Electriques

Les enroulements des trois phases statoriques sont décalés dans l'espace d'un angle de $2\pi/3$ et également ceux du rotor et peuvent être représentés comme indiquée en figure (I.6). θ est l'angle électrique entre l'axe de la phase (a_s) statorique et la phase (a_r) rotorique. En appliquant la loi d'Ohm généralisée à chaque phase du stator (respectivement rotor), on aura les équations de tension suivantes (convention récepteur, courants entrant vers la machine) :

Pour le stator :

$$\text{Phase } sa/ : v_{sa} = R_s i_{sa} + \frac{d\varphi_{sa}}{dt} \tag{1}$$

$$\text{Phase } sb/ : v_{sb} = R_s i_{sb} + \frac{d\varphi_{sb}}{dt} \tag{2}$$

$$\text{Phase } sc/ : v_{sc} = R_s i_{sc} + \frac{d\varphi_{sc}}{dt} \tag{3}$$

Pour le rotor :

$$\text{phase ra/ : } v_{ra} = R_r i_{ra} + \frac{d\varphi_{ra}}{dt} \quad (4)$$

$$\text{phase rb/ : } v_{rb} = R_r i_{rb} + \frac{d\varphi_{rb}}{dt} \quad (5)$$

$$\text{phase rc/ : } v_{rc} = R_r i_{rc} + \frac{d\varphi_{rc}}{dt} \quad (6)$$

sous forme matricielle :

Pour le stator :

$$\begin{bmatrix} v_{sa} \\ v_{sb} \\ v_{sc} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} R_s & 0 & 0 \\ 0 & R_s & 0 \\ 0 & 0 & R_s \end{bmatrix} \begin{bmatrix} i_{sa} \\ i_{sb} \\ i_{sc} \end{bmatrix} + \frac{d}{dt} \begin{bmatrix} \varphi_{sa} \\ \varphi_{sb} \\ \varphi_{sc} \end{bmatrix} \quad (7)$$

Pour le rotor :

$$\begin{bmatrix} v_{ra} \\ v_{rb} \\ v_{rc} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} R_r & 0 & 0 \\ 0 & R_r & 0 \\ 0 & 0 & R_r \end{bmatrix} \begin{bmatrix} i_{ra} \\ i_{rb} \\ i_{rc} \end{bmatrix} + \frac{d}{dt} \begin{bmatrix} \varphi_{ra} \\ \varphi_{rb} \\ \varphi_{rc} \end{bmatrix} \quad (8)$$

sous forme matricielle compactée :

$$\begin{cases} [V_s]_{3\phi}^{(s)} = [R_s]_{3\phi} [I_s]_{3\phi}^{(s)} + \frac{d}{dt} [\varphi_s]_{3\phi}^{(s)} \\ [V_r]_{3\phi}^{(r)} = [R_r]_{3\phi} [I_r]_{3\phi}^{(r)} + \frac{d}{dt} [\varphi_r]_{3\phi}^{(r)} \end{cases} \quad (9)$$

où :

$[X_{s,r}] = [X_a \ X_b \ X_c]^T$: Vecteur d'élément tension ou courant ou flux statorique (respectivement rotorique).

l'indice (s) ou (r) indique que les mesures sont prises dans le stator ou dans le rotor respectivement.

$$\text{avec : } [R_s] = \begin{bmatrix} R_s & 0 & 0 \\ 0 & R_s & 0 \\ 0 & 0 & R_s \end{bmatrix} \quad [R_r] = \begin{bmatrix} R_r & 0 & 0 \\ 0 & R_r & 0 \\ 0 & 0 & R_r \end{bmatrix}$$

$[R_s]$: matrice des résistances statorique.

R_s : résistance d'une phase du stator.

$[R_r]$: matrice des résistances rotorique.

R_r : résistance d'une phase du rotor.

II.2.1.2 Equations Magnétiques (équations aux flux) :

a. Armature du stator :

sous l'hypothèse que la fmm est sinusoïdale, fait que la mutuelle Stator/Rotor suit une loi sinusoïdale.

le flux totalisé dans la phase (sa) du stator est :

$$\varphi_{sa} = \varphi_{sap} + \varphi_{s/sa} + \varphi_{r/sa} \quad (10)$$

φ_{sa} : flux totalisé dans la phase (sa).

$\varphi_{sap} = l_s \cdot i_{sa}$: flux propre de la phase (sa).

l_s : inductance propre de la phase (sa).

$$\varphi_{s/sa} = M_s i_{sb} + M_s i_{sc} \quad (11)$$

flux inter armature (interphase), crée par les deux autres phases (bs et cs).

M_s : mutuelle inductance entre deux phases du stator à 120° .

$$\varphi_{r/sa} = M_{ra/sa} i_{ra} + M_{rb/sa} i_{rb} + M_{rc/sa} i_{rc} \quad (12)$$

flux extra armature des phases rotoriques par rapport à la phase (sa) du stator.

Sachant que le flux φ crée par l'induction \vec{B} traversant la surface S est donné par :

$$\varphi = \vec{B} \cdot \vec{S} = B \cdot S \cdot \cos\theta = \varphi_m \cos\theta ; \text{ avec } \varphi_m = M_0 \cdot i ; \text{ flux maximal lorsque } \theta=0.$$

il vient alors que : $\varphi = \varphi_m \cos\theta = M_0 \cdot i \cos\theta \Rightarrow \varphi = M \cdot i = M_0 \cdot i \cdot \cos\theta \Rightarrow M = M_0 \cdot \cos\theta$

M_0 : coefficient maximal d'inductance mutuelle entre une phase du stator et une phase du rotor lorsque $\theta=0$.

$$\text{rotor / phase sa} \begin{cases} M_{ra/sa} = M_0 \cdot \cos\theta \\ M_{rb/sa} = M_0 \cdot \cos(\theta + \frac{2\pi}{3}) \\ M_{rc/sa} = M_0 \cdot \cos(\theta + \frac{4\pi}{3}) \end{cases} \quad (13)$$

$$\text{rotor / phase sb} \begin{cases} M_{ra/sb} = M_0 \cdot \cos(\theta + \frac{4\pi}{3}) \\ M_{rb/sb} = M_0 \cdot \cos\theta \\ M_{rc/sb} = M_0 \cdot \cos(\theta + \frac{2\pi}{3}) \end{cases} \quad (14)$$

$$\text{rotor / phase sc} \begin{cases} M_{ra/sc} = M_0 \cdot \cos(\theta + \frac{2\pi}{3}) \\ M_{rb/sc} = M_0 \cdot \cos(\theta + \frac{4\pi}{3}) \\ M_{rc/sc} = M_0 \cdot \cos\theta \end{cases} \quad (15)$$

sous forme matricielle :

$$[M_{sr}] = [M_{rs}] = M_0 \begin{bmatrix} \cos\theta & \cos(\theta + \frac{2\pi}{3}) & \cos(\theta + \frac{4\pi}{3}) \\ \cos(\theta + \frac{4\pi}{3}) & \cos\theta & \cos(\theta + \frac{2\pi}{3}) \\ \cos(\theta + \frac{2\pi}{3}) & \cos(\theta + \frac{4\pi}{3}) & \cos\theta \end{bmatrix}$$

reprenant l'équation (12) du flux du rotor para rapport à la première phase du stator (sa):

$$\varphi_{r/sa} = M_{ra/sa} i_{ra} + M_{rb/sa} i_{rb} + M_{rc/sa} i_{rc}$$

avec les courants i_{ra} , i_{rb} et i_{rc} sont sinusoïdaux et de même pour les courants statoriques qui sont de la forme :

$$i_{ra/sa} = I_{rm} \cos\omega_r t \quad (16)$$

$$i_{rb/sb} = I_{rm} \cos(\omega_{r/s} t - \frac{2\pi}{3}) \quad (17)$$

$$i_{rc/sc} = I_{rm} \cos(\omega_{r/s} t - \frac{4\pi}{3}) \quad (18)$$

$\omega_{r/s}$: pulsation des courants rotoriques ou statoriques.

$$\text{et on a pour un système équilibré } \forall t : i_{ra/sa} + i_{rb/sb} + i_{rc/sc} = 0 \quad (19)$$

en remplaçant les courants et les mutuelles par leurs expressions, il vient alors :

$$\varphi_{r/sa} = M_0 \cdot \cos\theta \cdot I_{rm} \cos\omega_r t + M_0 \cdot \cos(\theta + \frac{2\pi}{3}) \cdot I_{rm} \cos(\omega_r t - \frac{2\pi}{3}) + M_0 \cdot \cos(\theta + \frac{4\pi}{3}) \cdot I_{rm} \cos(\omega_r t - \frac{4\pi}{3}) \quad (20)$$

$$\varphi_{r/sa} = M_0 \cdot I_{rm} [\cos\theta \cdot \cos\omega_r t + \cos(\theta + \frac{2\pi}{3}) \cdot \cos(\omega_r t - \frac{2\pi}{3}) + \cos(\theta + \frac{4\pi}{3}) \cdot \cos(\omega_r t - \frac{4\pi}{3})] \quad (21)$$

sachant que : $\cos(a) \cdot \cos(b) = \frac{1}{2} [\cos(a+n) + \cos(a-b)]$, en remplaçant dans l'équation (21) qui devient :

$$\varphi_{r/sa} = \frac{3}{2} M_0 \cdot I_{rm} [\cos(\omega_r t + \theta)] \quad (22)$$

flux des trois phases rotoriques par rapport à la phase statique (sa).

et on a le flux du stator par rapport à la phase (sa) :

$$\varphi_{ss/sa} = \varphi_{sap} + \varphi_{sa} = l_s i_{sa} + M_s i_{sb} + M_s i_{sc} \quad (23)$$

$$\text{pour un système équilibré on a : } \forall t : i_{sa} + i_{sb} + i_{sc} = 0 \Rightarrow i_{sa} = -(i_{sb} + i_{sc}) \quad (24)$$

donc le flux stator / (sa) est :

$$\varphi_{ss/sa} = l_s i_{sa} + M_s (i_{sb} + i_{sc}) = l_s i_{sa} - M_s i_{sa} = (l_s - M_s) i_{sa} \quad (25)$$

finalement on aura l'expression du flux totalisé créée dans la phase (sa) du stator :

$$\varphi_{sa} = \varphi_{sap} + \varphi_{s/sa} + \varphi_{r/sa} = (l_s - M_s) i_{sa} + \frac{3}{2} M_0 \cdot I_{rm} [\cos(\omega_r t + \theta)] \quad (26)$$

pour la phase (sb) :

$$\varphi_{sb} = \varphi_{sbp} + \varphi_{s/sb} + \varphi_{r/sb} = (l_s - M_s) i_{sb} + \frac{3}{2} M_0 \cdot I_{rm} [\cos(\omega_r t + \theta - \frac{2\pi}{3})] \quad (27)$$

pour la phase (sc) :

$$\varphi_{sc} = \varphi_{scp} + \varphi_{s/sc} + \varphi_{r/sc} = (l_s - M_s) i_{sc} + \frac{3}{2} M_0 \cdot I_{rm} [\cos(\omega_r t + \theta - \frac{4\pi}{3})] \quad (28)$$

avec : $L_s = l_s - M_s$; inductance cyclique du stator.

$M = \frac{3}{2} M_0$; Mutuelle inductance cyclique entre stator et rotor.

il est à noter que les deux expressions sont exprimées dans deux référentiel différents, référentiel statorique et référentiel rotorique. Pour être exploitable on doit les ramener au même référentiel (changement de référentiel figure (1.7)).

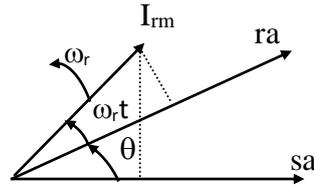


Figure (I.7) : changement de repère

soit :

$$\bar{I}_{ra} = I_{rm} e^{j\omega_r t} \quad (29)$$

$$I_{ra} = I_{rm} \cos \omega_r t \quad / \text{ rotor} \quad (30)$$

$$I_{ra} = I_{rm} \cos(\omega_r t + \theta) \quad / \text{ stator}, \quad (31)$$

cette grandeur est notée : $I_{ra}^{(s)}$ (ramenée au stator).

Donc, il vient pour les équations (26), (27) et (28), équations aux flux au stator :

$$\varphi_{sa}^{(s)} = L_s i_{sa}^{(s)} + M \cdot i_{ra}^{(s)} \quad (32)$$

$$\varphi_{sb}^{(s)} = L_s i_{sb}^{(s)} + M \cdot i_{rb}^{(s)} \quad (33)$$

$$\varphi_{sc}^{(s)} = L_s i_{sc}^{(s)} + M \cdot i_{rc}^{(s)} \quad (34)$$

Sous forme matricielle compactée :

$$[\varphi_s]_{3\phi}^{(s)} = L_s [I_s]_{3\phi}^{(s)} + M \cdot [I_r]_{3\phi}^{(s)} \quad (35)$$

b. Armature du rotor :

même démarche de raisonnement que le stator.

les indices changent ($s \rightarrow r$ et $r \rightarrow s$).

$$[\varphi_r]_{3\phi}^{(r)} = L_r [I_r]_{3\phi}^{(r)} + M \cdot [I_s]_{3\phi}^{(r)} \quad (36)$$

avec : $L_r = l_r - M_r$; inductance cyclique propre du rotor.

l_r : inductance propre d'une phase du rotor.

M_r : mutuelle inductance entre deux phases du rotor à 120° .

l'indice^(r) indique que la mesure est au rotor.

finalement les deux équations matricielles compactées (35) et (36) décrivent les flux totaux dans la machine.

le système d'équation (37) et (39) décrit le modèle triphasé général et symétrique de la machine idéalisée dans les deux référentiels statoriques et rotoriques.

$$\begin{cases} [V_s]_{3\phi}^{(s)} = [R_s]_{3\phi} [I_s]_{3\phi}^{(s)} + \frac{d}{dt} [\varphi_s]_{3\phi}^{(s)} \\ [V_r]_{3\phi}^{(r)} = [R_r]_{3\phi} [I_r]_{3\phi}^{(r)} + \frac{d}{dt} [\varphi_r]_{3\phi}^{(r)} \end{cases} \quad (37)$$

$$\begin{cases} [\varphi_s]_{3\phi}^{(s)} = L_s [I_s]_{3\phi}^{(s)} + M \cdot [I_r]_{3\phi}^{(s)} \\ [\varphi_r]_{3\phi}^{(r)} = L_r [I_r]_{3\phi}^{(r)} + M \cdot [I_s]_{3\phi}^{(r)} \end{cases} \quad (38)$$

La résolution de ce système est difficile à cause du nombre d'inconnus et les coefficients régissant ce système sont variables avec la position.

Le modèle triphasé est utilisé pour étudier les phénomènes dans les machines électriques avec plusieurs harmoniques de forces magnétomotrices dans l'entrefer et avec des tensions non sinusoïdales; de même que pour les machines asymétriques.

Pour les autres cas, il est recommandé d'utiliser le modèle biphasé car celui ci est plus simple et plus commode.

Les paramètres rotoriques dans les modèles biphasé et triphasé sont des paramètres ramenés.

II.2.2 Modèle biphasé de la machine électrique généralisée

II.2.2.1 notion de phaseur

Le phaseur est un vecteur tournant qui contient de l'information a propos de l'amplitude et la phase d'une (tension, courant ou flux). On obtient le phaseur par application de la relation d'Euler :

$$e^{j\theta} = \cos(\theta) + j \sin(\theta) \quad (39)$$

Pour toutes grandeurs x (tension, courant ou flux), on peut écrire :

$$\bar{x} = x e^{j\gamma} = x_1 + a x_2 + a^2 x_3 \quad (40)$$

avec : $a = e^{j\frac{2\pi}{3}} = -\frac{1}{2} + j\frac{\sqrt{3}}{2}$ (opérateur de position à 120°), $a^2 = e^{j\frac{4\pi}{3}} = -\frac{1}{2} - j\frac{\sqrt{3}}{2}$,

$$a^3 = 1, a^4 = a.$$

exprimons le vecteur tournant $x(\alpha, \beta)$ par les composantes du phaseur généralisé (x_1, x_2, x_3) :

sur la figure (I.8), on a : $\bar{x} = x_\alpha + j x_\beta = x_1 + a x_2 + a^2 x_3$

$$\bar{x} = x_\alpha + j x_\beta = x_1 \cdot e^{j \cdot 0} + x_2 \cdot e^{j\frac{2\pi}{3}} + x_3 \cdot e^{j\frac{4\pi}{3}}$$

$$\bar{x} = x_\alpha + j x_\beta = x_1 + x_2 \cdot \left(-\frac{1}{2} + j\frac{\sqrt{3}}{2}\right) + x_3 \cdot \left(-\frac{1}{2} - j\frac{\sqrt{3}}{2}\right)$$

la séparation des parties réelles et imaginaires donne :

$$x_\alpha = x_1 - \frac{1}{2} x_2 - \frac{1}{2} x_3$$

$$x_\beta = 0 + \frac{\sqrt{3}}{2} x_2 - \frac{\sqrt{3}}{2} x_3$$

sous forme matricielle :

$$\begin{bmatrix} x_\alpha \\ x_\beta \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & -\frac{1}{2} & -\frac{1}{2} \\ 0 & \frac{\sqrt{3}}{2} & -\frac{\sqrt{3}}{2} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix}; \quad [x]_{2\phi} = [T][x]_{3\phi}$$

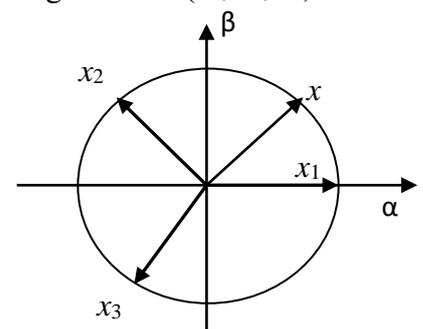


figure (I.8) : notion de phaseur

Ce n'est autre qu'un passage du triphasé au biphasé et la matrice de passage est :

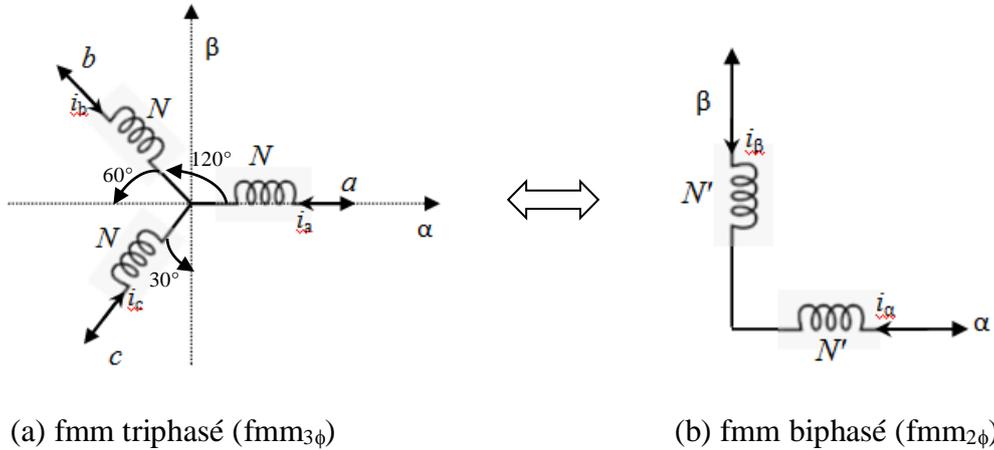
$$T = \begin{bmatrix} 1 & -\frac{1}{2} & -\frac{1}{2} \\ 0 & \frac{\sqrt{3}}{2} & -\frac{\sqrt{3}}{2} \end{bmatrix} \quad (41)$$

II.2.2.2 passage triphasé-biphasé par conservation des fmm

le passage est effectué dans le même référentiel (plan).

l'équivalence est réalisée si et seulement si $fmm_{3\phi} = fmm_{2\phi}$

selon la figure (I.9), nous avons :



figure(I.9) : équivalence $fmm_{3\phi}$ et $fmm_{2\phi}$

de la figure (I.9a), par projection sur les deux axes α et β on aura:

sur α : $fmm_{3\phi-\alpha} = Ni_{a-\alpha} + Ni_{b-\alpha} + Ni_{c-\alpha} = Ni_a - Ni_b \cos 60^\circ - Ni_c \cos 60^\circ$

$$fmm_{3\phi-\alpha} = Ni_a - \frac{1}{2}Ni_b - \frac{1}{2}Ni_c \quad (42)$$

sur β : $fmm_{3\phi-\beta} = 0 + Ni_{b-\beta} + Ni_{c-\beta} = 0 + Ni_b \sin 30^\circ - Ni_c \sin 30^\circ$

$$fmm_{3\phi-\beta} = 0 + \frac{\sqrt{3}}{2}Ni_b - \frac{\sqrt{3}}{2}Ni_c \quad (43)$$

de la figure (I.9b), on a :

$$\text{sur l'axe } \alpha : fmm_{2\phi-\alpha} = N'i_\alpha \quad (44)$$

$$\text{sur l'axe } \beta : fmm_{2\phi-\beta} = N'i_\beta \quad (45)$$

l'équivalence des fmm donne :

$$(42)=(44) \Rightarrow fmm_{3\phi-\alpha} = fmm_{2\phi-\alpha} \Rightarrow Ni_a - \frac{1}{2}Ni_b - \frac{1}{2}Ni_c = N'i_\alpha \Rightarrow$$

$$i_\alpha = \frac{N}{N'}i_a - \frac{1}{2}\frac{N}{N'}i_b - \frac{1}{2}\frac{N}{N'}i_c = \frac{N}{N'}\left(i_a - \frac{1}{2}i_b - \frac{1}{2}i_c\right) \quad (46)$$

$$\text{de même } (43)=(45) \Rightarrow i_\beta = \frac{N}{N'}\left(0 \cdot i_a + \frac{\sqrt{3}}{2}i_b - \frac{\sqrt{3}}{2}i_c\right) \quad (47)$$

sous forme matricielle :

$$\begin{bmatrix} i_\alpha \\ i_\beta \end{bmatrix} = \frac{N}{N'} \begin{bmatrix} 1 & -\frac{1}{2} & -\frac{1}{2} \\ 0 & \frac{\sqrt{3}}{2} & -\frac{\sqrt{3}}{2} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} i_a \\ i_b \\ i_c \end{bmatrix} \quad (48)$$

on pose $k = \frac{N}{N'}$; coefficient de normalisation.

pour la transformation de Clark $= \frac{2}{3}$.

pour la transformation de Concordia $= \sqrt{\frac{2}{3}}$.

la première conserve l'amplitude et la deuxième la puissance.

$$\text{Donc : } C = \frac{2}{3} \begin{bmatrix} 1 & -\frac{1}{2} & -\frac{1}{2} \\ 0 & \frac{\sqrt{3}}{2} & -\frac{\sqrt{3}}{2} \end{bmatrix} \quad ; \text{ matrice de Clark.}$$

$$\text{et : } Co = \sqrt{\frac{2}{3}} \begin{bmatrix} 1 & -\frac{1}{2} & -\frac{1}{2} \\ 0 & \frac{\sqrt{3}}{2} & -\frac{\sqrt{3}}{2} \end{bmatrix} \quad ; \text{ matrice de Concordia.}$$

La transformation inverse de Clark (C^{-1}), dans le sens biphasé \rightarrow triphasé, sera calculée après avoir mis (C) sous forme carrée par l'addition de la troisième ligne homopolaire :

$$x_0 = \frac{1}{3}(x_a + x_b + x_c);$$

$$\begin{bmatrix} x_\alpha \\ x_\beta \\ x_0 \end{bmatrix} = \frac{2}{3} \begin{bmatrix} 1 & -\frac{1}{2} & -\frac{1}{2} \\ 0 & \frac{\sqrt{3}}{2} & -\frac{\sqrt{3}}{2} \\ \frac{1}{2} & \frac{1}{2} & \frac{1}{2} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_a \\ x_b \\ x_c \end{bmatrix}; \quad C = \frac{2}{3} \begin{bmatrix} 1 & -\frac{1}{2} & -\frac{1}{2} \\ 0 & \frac{\sqrt{3}}{2} & -\frac{\sqrt{3}}{2} \\ \frac{1}{2} & \frac{1}{2} & \frac{1}{2} \end{bmatrix} \text{ matrice carrée}$$

$$\text{son inverse est : } C^{-1} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 \\ -\frac{1}{2} & \frac{\sqrt{3}}{2} & 1 \\ -\frac{1}{2} & -\frac{\sqrt{3}}{2} & 1 \end{bmatrix}$$

et celle de Concordia :

$$Co = \sqrt{\frac{2}{3}} \begin{bmatrix} 1 & -\frac{1}{2} & -\frac{1}{2} \\ 0 & \frac{\sqrt{3}}{2} & -\frac{\sqrt{3}}{2} \\ \frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{2}} \end{bmatrix}; \quad \text{son inverse est } Co^{-1} = \sqrt{\frac{2}{3}} \begin{bmatrix} 1 & 0 & \frac{1}{\sqrt{2}} \\ -\frac{1}{2} & \frac{\sqrt{3}}{2} & \frac{1}{\sqrt{2}} \\ -\frac{1}{2} & -\frac{\sqrt{3}}{2} & \frac{1}{\sqrt{2}} \end{bmatrix}$$

II.2.2.3 Représentation complexe

la transformation de deux dimensions à une seule dimension (2D \rightarrow 1D).

Un vecteur dans le plan complexe peut être représenté comme suit :

$$\bar{x} = x_\alpha + jx_\beta = [1 \ j] \begin{bmatrix} x_\alpha \\ x_\beta \end{bmatrix}$$

$$\bar{x} = [Cx][x]_{2\emptyset}; \quad \text{avec } [Cx]=[1 \ j] \in \mathbb{C}^2$$

II.2.2.3 Application

appliquant la transformation [T] de (41) aux systèmes des équations aux tensions (37) et aux flux (38), [T] peut être Clark ou Concordia.

$$\begin{cases} [T][V_s]_{3\phi}^{(s)} = [T][R_s]_{3\phi}[I_s]_{3\phi}^{(s)} + \frac{d}{dt}[T][\varphi_s]_{3\phi}^{(s)} \\ [T][V_r]_{3\phi}^{(r)} = [T][R_r]_{3\phi}[I_r]_{3\phi}^{(r)} + \frac{d}{dt}[T][\varphi_r]_{3\phi}^{(r)} \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} [V_s]_{2\phi}^{(s)} = [R_s]_{2\phi}[I_s]_{2\phi}^{(s)} + \frac{d}{dt}[\varphi_s]_{2\phi}^{(s)} \\ [V_r]_{2\phi}^{(r)} = [R_r]_{2\phi}[I_r]_{2\phi}^{(r)} + \frac{d}{dt}[\varphi_r]_{2\phi}^{(r)} \end{cases} \quad (49)$$

$$\begin{cases} [T][\varphi_s]_{3\phi}^{(s)} = L_s[T][I_s]_{3\phi}^{(s)} + M \cdot [T][I_r]_{3\phi}^{(r)} \\ [T][\varphi_r]_{3\phi}^{(r)} = L_r[T][I_r]_{3\phi}^{(r)} + M \cdot [T][I_s]_{3\phi}^{(s)} \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} [\varphi_s]_{2\phi}^{(s)} = L_s[I_s]_{2\phi}^{(s)} + M \cdot [I_r]_{2\phi}^{(r)} \\ [\varphi_r]_{2\phi}^{(r)} = L_r[I_r]_{2\phi}^{(r)} + M \cdot [I_s]_{2\phi}^{(s)} \end{cases} \quad (50)$$

passant maintenant au plan complexe, en multipliant (49 et (50) par [Cx].

$$\begin{cases} [Cx][V_s]_{2\phi}^{(s)} = [R_s]_{2\phi}[Cx][I_s]_{2\phi}^{(s)} + \frac{d}{dt}[Cx][\varphi_s]_{2\phi}^{(s)} \\ [Cx][V_r]_{2\phi}^{(r)} = [R_r]_{2\phi}[Cx][I_r]_{2\phi}^{(r)} + \frac{d}{dt}[Cx][\varphi_r]_{2\phi}^{(r)} \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \bar{v}_s^{(s)} = R_s \bar{i}_s^{(s)} + \frac{d\bar{\varphi}_s^{(s)}}{dt} \\ \bar{v}_r^{(r)} = R_r \bar{i}_r^{(r)} + \frac{d\bar{\varphi}_r^{(r)}}{dt} \end{cases} \quad (51)$$

$$\begin{cases} [Cx][\varphi_s]_{2\phi}^{(s)} = L_s[Cx][I_s]_{2\phi}^{(s)} + M \cdot [Cx][I_r]_{2\phi}^{(r)} \\ [Cx][\varphi_r]_{2\phi}^{(r)} = L_r[Cx][I_r]_{2\phi}^{(r)} + M \cdot [Cx][I_s]_{2\phi}^{(s)} \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \bar{\varphi}_s^{(s)} = L_s \bar{i}_s^{(s)} + M \bar{i}_r^{(r)} \\ \bar{\varphi}_r^{(r)} = L_r \bar{i}_r^{(r)} + M \bar{i}_s^{(s)} \end{cases} \quad (52)$$

(51) système d'éq. Différentielle dans deux référentiels séparés.

(52) équations rigides valables quelque soit le référentiel.

II.3 Changement de coordonnées (concept du référentiel d'observation commun)

II.3.1 Relation de passage entre référentiels

Pour pouvoir analyser l'échange d'énergie entre les deux armatures leurs équations doivent être rapporté sur un même référentiel d'observation.

tout vecteur tournant est représenté par sa norme et son argument : $\bar{x} = x \cdot e^{j \cdot arg(\bar{x})}$

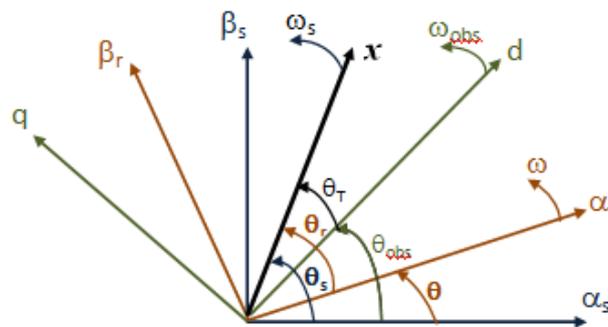


Figure (I.10) : Transformation inter-référentiel

Sachant que la norme de \bar{x} définie par x est invariante quelques soient les repères en rotations :

- ❖ Dans le stator (S): $\bar{x}^{(s)} = x.e^{j\theta_s}$
- ❖ Dans le rotor (R): $\bar{x}^{(r)} = x.e^{j\theta_r}$
- ❖ Dans le référentiel tournant (T): $\bar{x}^{(T)} = x.e^{j\theta_{OBS}}$

Passage stator –rotor et réciproquement :

$$\bar{x}^{(s)} = \bar{x}^{(r)} e^{j\theta} \quad \text{ou} \quad \bar{x}^{(r)} = \bar{x}^{(s)} e^{-j\theta} \quad (53)$$

Passage stator – T_{OBS} et réciproquement :

$$\bar{x}^{(s)} = \bar{x}^{(T)} e^{j\theta_{OBS}} \quad \text{ou} \quad \bar{x}^{(T)} = \bar{x}^{(s)} e^{-j\theta_{OBS}} \quad (54)$$

Passage rotor – T_{OBS} et réciproquement :

$$\bar{x}^{(r)} = \bar{x}^{(T)} e^{j(\theta_{OBS}-\theta)} \quad \text{ou} \quad \bar{x}^{(T)} = \bar{x}^{(r)} e^{-j(\theta_{OBS}-\theta)} \quad (55)$$

II.3.2 Choix du référentiel

Le choix du référentiel se fait selon la commodité de l'application [3], il existe principalement trois cas :

- ❖ référentiel commun lié au stator, (T)≡(S), $\omega_{obs}=0$.
- ❖ référentiel commun lié au rotor, (T)≡(R), $\omega_{obs}=\omega=p. \Omega$
- ❖ référentiel commun lié au synchronisme statorique(champ tournant), (T)≡(C),
 $\omega_{obs}=\omega_s$; $\omega_r=\omega_s-\omega$

II.3.3 Transformation de Park

Elle permet de transformer les enroulements statoriques et rotoriques disposés sur trois axes (a, b, c) en des enroulements équivalents du point de vue électriques et magnétiques disposés sur deux axes (d,q).

Elle est constituée d'une transformation triphasé–diphasé suivie d'une rotation. Elle permet de passer du repère (abc) vers le repère ($\alpha\beta$) puis vers le repère (dq). Le repère ($\alpha\beta$) est toujours fixe par rapport au repère (abc), par contre le repère (dq) est mobile. Il forme avec le repère fixe ($\alpha\beta$) l'angle, dit angle de transformation de PARK.

θ : l'angle de rotation du rotor par rapport au stator.

θ_s : angle de rotation de (dq) par rapport au stator.

θ_r : angle de rotation de (dq) par rapport au rotor.

Les angles sont liés par la relation : $\theta_s = \theta + \theta_r$

La transformation triphasé–diphasé est donnée par :

$$\bar{x}^{(s)} = \bar{x}^{(T)} . e^{j\theta_{obs}}$$

$$\begin{aligned}x_{\alpha} + jx_{\beta} &= (x_d + jx_q)(\cos\theta_{obs} + jsin\theta_{obs}) \\ &= x_d \cdot \cos\theta_{obs} - x_q \sin\theta_{obs} + j(x_d \cdot \sin\theta_{obs} + x_q \cos\theta_{obs})\end{aligned}$$

$$x_{\alpha} = x_d \cdot \cos\theta_{obs} - x_q \sin\theta_{obs}$$

$$x_{\beta} = x_d \cdot \sin\theta_{obs} + x_q \cos\theta_{obs}$$

$$\begin{bmatrix} x_{\alpha} \\ x_{\beta} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \cos\theta_{obs} & -\sin\theta_{obs} \\ \sin\theta_{obs} & \cos\theta_{obs} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_d \\ x_q \end{bmatrix} = Park(\theta_{obs}) \begin{bmatrix} x_d \\ x_q \end{bmatrix} \quad (56)$$

Ce passage est généralement employé pour la modulation c'est à dire en allant du continu vers l'alternatif.

$$\begin{bmatrix} x_d \\ x_q \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \cos\theta_{obs} & \sin\theta_{obs} \\ -\sin\theta_{obs} & \cos\theta_{obs} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_{\alpha} \\ x_{\beta} \end{bmatrix} = Park(-\theta_{obs}) \begin{bmatrix} x_{\alpha} \\ x_{\beta} \end{bmatrix} \quad (57)$$

Ce passage est généralement utilisé pour les variables de retour dans une commande (démodulation).

II.3.4 Model tension et flux :

En Appliquant les relations de passage (54) et (55) aux systèmes des équations (51) et (52), on ramène toutes les grandeurs au référentiel commun (T_{obs}).

$$\begin{cases} \bar{v}_s^{(T)} e^{j\theta_{OBS}} = R_s \bar{i}_s^{(T)} e^{j\theta_{OBS}} + \frac{d(\bar{\Phi}_s^{(T)} e^{j\theta_{OBS}})}{dt} \\ \bar{v}_r^{(T)} e^{j(\theta_{OBS}-\theta)} = R_r \bar{i}_r^{(T)} e^{j(\theta_{OBS}-\theta)} + \frac{d(\bar{\Phi}_r^{(T)} e^{j(\theta_{OBS}-\theta)})}{dt} \end{cases} \quad (I.58)$$

Après simplification on aura le système d'équation vectorielle de tension qui représente le modèle de la machine dans le référentiel du champ tournant.

$$\begin{cases} \bar{v}_s^{(T)} = R_s \bar{i}_s^{(T)} + \frac{d\bar{\varphi}_s^{-(T)}}{dt} + j\omega_{OBS} \bar{\varphi}_s^{-(T)} \\ \bar{v}_r^{(T)} = R_r \bar{i}_r^{(T)} + \frac{d\bar{\varphi}_r^{-(T)}}{dt} + j(\omega_{OBS} - \omega) \bar{\varphi}_r^{-(T)} \end{cases} \quad (I.59)$$

Et également la représentation du modèle flux :

$$\begin{cases} \bar{\varphi}_s^{-(T)} = L_s \bar{i}_s^{(T)} + M \bar{i}_r^{(T)} \\ \bar{\varphi}_r^{-(T)} = L_r \bar{i}_r^{(T)} + M \bar{i}_s^{(T)} \end{cases} \quad (I.60)$$

la représentation des équations du flux est invariable,

Application :

1/ Si T se coïncide avec S $\Rightarrow \omega_{obs}=0$, alors les équations aux tensions sont comme suit :

$$\begin{cases} \bar{v}_s^{(T)} = R_s \bar{i}_s^{(T)} + \frac{d\bar{\varphi}_s^{-(T)}}{dt} \\ \bar{v}_r^{(T)} = R_r \bar{i}_r^{(T)} + \frac{d\bar{\varphi}_r^{-(T)}}{dt} - j \omega \bar{\varphi}_r^{-(T)} \end{cases} \quad (\text{I.61})$$

2/ Si T se coïncide avec le repère du synchronisme $\Rightarrow \omega_{\text{obs}} = \omega_s$, alors les équations aux tensions sont comme suit :

$$\begin{cases} \bar{v}_s^{(T)} = R_s \bar{i}_s^{(T)} + \frac{d\bar{\varphi}_s^{-(T)}}{dt} + j \omega_{\text{OBS}} \bar{\varphi}_s^{-(T)} \\ \bar{v}_r^{(T)} = R_r \bar{i}_r^{(T)} + \frac{d\bar{\varphi}_r^{-(T)}}{dt} + j(\omega_{\text{OBS}} - \omega) \bar{\varphi}_r^{-(T)} \end{cases} \quad (\text{I.62})$$

3/ Si T se coïncide avec le repère du rotor $\Rightarrow \omega_{\text{obs}} = \omega$, alors les équations aux tensions sont comme suit :

$$\begin{cases} \bar{v}_s^{(T)} = R_s \bar{i}_s^{(T)} + \frac{d\bar{\varphi}_s^{-(T)}}{dt} + j \omega \bar{\varphi}_s^{-(T)} \\ \bar{v}_r^{(T)} = R_r \bar{i}_r^{(T)} + \frac{d\bar{\varphi}_r^{-(T)}}{dt} \end{cases} \quad (\text{I.63})$$

II.4 Vecteurs d'état complexes

les entrées sont les tensions \bar{v}_s et \bar{v}_r .

les variables d'état sont définis par $(\bar{i}_s, \bar{i}_r, \bar{\varphi}_s, \bar{\varphi}_r)$. Six combinaisons possibles à partir de ces variables.

- un modèle tout courant (\bar{i}_s, \bar{i}_r) .
- un modèle tout flux $(\bar{\varphi}_s, \bar{\varphi}_r)$.
- quatre modèle flux-courant $(\bar{i}_s, \bar{\varphi}_s), (\bar{i}_s, \bar{\varphi}_r), (\bar{i}_r, \bar{\varphi}_s)$ et $(\bar{i}_r, \bar{\varphi}_r)$.

Le choix d'un vecteur d'état est généralement défini par la nature de l'application.

exemple : Commande vectorielle par orientation du flux rotorique requière le modèle d'état avec le vecteur $(\bar{i}_s, \bar{\varphi}_r)^T$ dans le référentiel du synchronisme.

II.5 Bilan des puissances

La puissance absorbée par la machine due aux deux excitations (stator+rotor) est donnée par:

$$P_{abs} = \Re(\bar{v}_s \cdot \bar{i}_s^*) + \Re(\bar{v}_r \cdot \bar{i}_r^*) \quad (\text{I.64})$$

$$S = \bar{v} \cdot \bar{i}^* = P + jQ : \text{puissance apparente}$$

$$P = \Re(\bar{v} \cdot \bar{i}^*) : \text{puissance active.}$$

$$Q = \Im(\bar{v} \cdot \bar{i}^*) : \text{puissance réactive.}$$

$$S = \bar{v}_s \cdot \bar{i}_s^* ; \text{est invariante quelque soit le repère.}$$

$$x_s^{(s)} = x_s^{(T)} e^{j\theta_{obs}} \quad (S \rightarrow T)$$

$$\bar{v}_s^{(s)} \cdot \bar{i}_s^{(s)*} = \bar{v}_s^{(T)} e^{j\theta_{obs}} \cdot \bar{i}_s^{(T)*} e^{-j\theta_{obs}} = \bar{v}_s^{(T)} \cdot \bar{i}_s^{(T)*}$$

Prenons le système d'éq (I.63) du rotor et multiplions le premier terme par \bar{i}_s^* et le deuxième par \bar{i}_r^* :

$$\begin{cases} \bar{v}_s^{(s)} = R_s \bar{i}_s^{(s)} + \frac{d\bar{\varphi}_s^{(s)}}{dt} + j\omega \bar{\varphi}_s \cdot \bar{i}_s^* \\ \bar{v}_r^{(r)} = R_r \bar{i}_r^{(r)} + \frac{d\bar{\varphi}_r^{(r)}}{dt} \cdot \bar{i}_r^* \end{cases} \quad (I.65)$$

en remplaçant dans (I.64), on aura :

$$P_{abs} = \Re(\bar{v}_s \cdot \bar{i}_s^*) + \Re(\bar{v}_r \cdot \bar{i}_r^*) = \Re \left(R_s i_s^2 + R_r i_r^2 + \frac{d\bar{\varphi}_s}{dt} \cdot \bar{i}_s^* + \frac{d\bar{\varphi}_r}{dt} \cdot \bar{i}_r^* + j\omega \bar{\varphi}_s \cdot \bar{i}_s^* \right)$$

$R_s i_s^2 + R_r i_r^2$: dissipation sous forme Joule dans les bobinages statique et rotorique.

$\Re \left(\frac{d\bar{\varphi}_s}{dt} \cdot \bar{i}_s^* + \frac{d\bar{\varphi}_r}{dt} \cdot \bar{i}_r^* \right)$: énergie électromagnétique stockée momentanément dans les bobines, énergie transitoire et pas permanente.

$\Re(j\omega \bar{\varphi}_s \cdot \bar{i}_s^*)$: puissance électromécanique, continuellement existante dans le processus de transfert énergétique et le transfert électromécanique.

II.6 Le couple électromagnétique

Par définition, le couple électromagnétique est donné par le rapport de la puissance électromagnétique à la vitesse de rotation de l'arbre de la machine.

$$C_{em} = \frac{P_{em}}{\Omega} = p \frac{P_{em}}{\omega} \quad (I.64)$$

p : nombre de paire de pôle de la machine.

Ω : vitesse mécanique de l'arbre.

ω : vitesse électrique.

$$P_{em} = \Re(j\omega \bar{\varphi}_s \cdot \bar{i}_s^*) = \omega \Re(j\bar{\varphi}_s \cdot \bar{i}_s^*)$$

sachant que dans les nombres complexes : $\Re(j\bar{z}_1 \cdot \bar{z}_2^*) = \Im(\bar{z}_2 \cdot \bar{z}_1^*)$

donc, pour le couple il vient : $C_{em} = p \frac{P_{em}}{\omega} = p \Im(\bar{i}_s \cdot \bar{\varphi}_s^*)$

Pour notre machine, on sait qu'on peut avoir six représentations d'état ce qui implique six expressions de couple.

$$C_{em} = k \cdot p \Im(\bar{i}_s \cdot \bar{\varphi}_s^*) \quad (I.65)$$

k : constante qui varie d'une représentation à une autre et dans certaines elle est égale à l'unité.

II.7 L'équation Mécanique

Pour étudier les caractéristiques dynamiques, on introduit l'équation du mouvement suivante:

$$J \frac{d\Omega}{dt} = C_{em} - C_r - f_v \Omega \quad (\text{I-66})$$

J : moment d'inertie de la partie tournante.

Ω : vitesse mécanique du moteur

f_v : coefficient de frottement visqueux

C_{em} : couple électromagnétique.

C_r : couple de charge.

III. Schéma de simulation d'une machine généralisée triphasée alimentée en tension

III.1 Schéma vectoriel

Le modèle de la machine triphasée généralisée est représenté par le système d'équation suivant, dans le référentiel tournant (T), (l'exposant (T) est omis pour simplification) :

$$\begin{cases} \bar{v}_s = R_s \bar{i}_s + \frac{d\bar{\varphi}_s}{dt} + j\omega_{OBS} \bar{\varphi}_s \\ \bar{v}_r = R_r \bar{i}_r + \frac{d\bar{\varphi}_r}{dt} + j(\omega_{OBS} - \omega) \bar{\varphi}_r \end{cases} \quad (\text{I.67})$$

$$\begin{cases} \bar{\varphi}_s = L_s \bar{i}_s + M \bar{i}_r \\ \bar{\varphi}_r = L_r \bar{i}_r + M \bar{i}_s \end{cases} \quad (\text{I.68})$$

$$C_{em} = k \cdot p \Im m(\bar{i}_s \cdot \bar{\varphi}_s^*) \quad (\text{I.69})$$

$$J \frac{d\Omega}{dt} = C_{em} - C_r - f_v \Omega \quad (\text{I-70})$$

Pour résoudre un tel système, il est plus commode de les présenter comme suit :

$$\bar{\varphi}_s = \int \frac{d\bar{\varphi}_s}{dt} = \int (\bar{v}_s - R_s \bar{i}_s - j\omega_{obs} \cdot \bar{\varphi}_s) dt \quad (\text{I.71})$$

$$\bar{\varphi}_r = \int \frac{d\bar{\varphi}_r}{dt} = \int (\bar{v}_r - R_r \bar{i}_r - j(\omega_{obs} - \omega) \cdot \bar{\varphi}_r) dt \quad (\text{I.72})$$

les courants sont exprimés de (I.68) :

$$\begin{bmatrix} \bar{\varphi}_s \\ \bar{\varphi}_r \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} L_s & M \\ M & L_r \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \bar{i}_s \\ \bar{i}_r \end{bmatrix} \Rightarrow \begin{bmatrix} \bar{i}_s \\ \bar{i}_r \end{bmatrix} = \frac{1}{L_s L_r - M^2} \begin{bmatrix} L_r & -M \\ -M & L_s \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \bar{\varphi}_s \\ \bar{\varphi}_r \end{bmatrix}$$

$$\bar{i}_s = a_{ss} \bar{\varphi}_s + a_{sr} \bar{\varphi}_r \quad (\text{I.73})$$

$$\bar{i}_r = a_{rs} \bar{\varphi}_s + a_{rr} \bar{\varphi}_r \quad (\text{I.74})$$

$$\text{avec : } a_{ss} = \frac{1}{\sigma L_s} \quad , \quad a_{rr} = \frac{1}{\sigma L_r} \quad , \quad a_{sr} = a_{sr} = \frac{\sigma - 1}{\sigma M}$$

le nombre complexe j est remplacé par la matrice antisymétrique J tels que :

$$j(x_1 + jx_2) = -x_2 + jx_1 = (1 j) \begin{pmatrix} -x_2 \\ x_1 \end{pmatrix} \Leftrightarrow \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -x_2 \\ x_1 \end{pmatrix}$$

le schéma bloc de la figure (I.11) sur SIMULINK traduit la solution de ce modèle de la machine triphasée généralisée dans un repère (T) tournant quelconque.

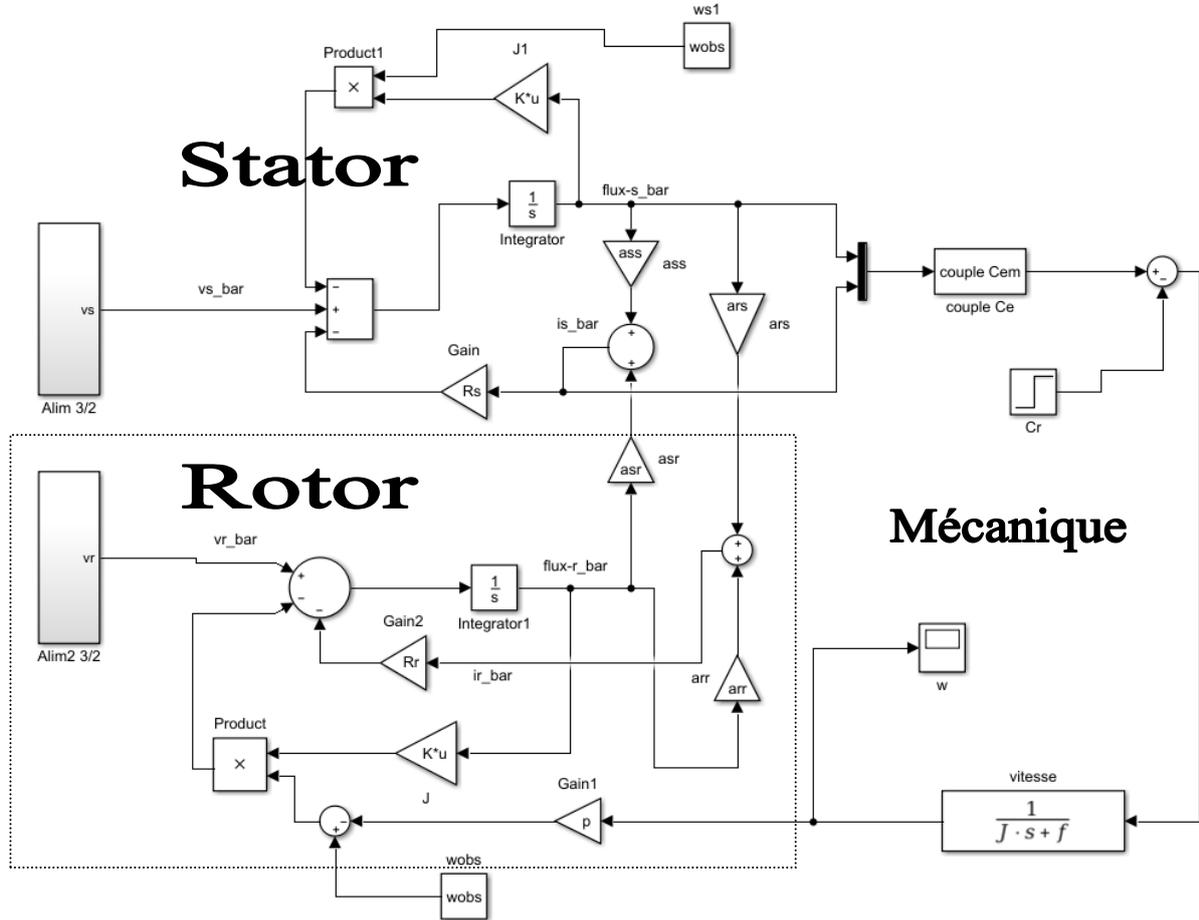


Figure (I.11) : Simulation d'une machine triphasée généralisée

Application :

Donner la représentation de ce modèle dans le référentiel du stator (α,β).

à savoir que sur le référentiel (α,β) , ω_{obs}=0.

les équations (I.71) et (I.72) deviennent :

$$\bar{\varphi}_s = \int \frac{d\bar{\varphi}_s}{dt} = \int (\bar{v}_s - R_s \bar{i}_s) dt \tag{I.75}$$

$$\bar{\varphi}_r = \int \frac{d\bar{\varphi}_r}{dt} = \int (\bar{v}_r - R_r \bar{i}_r + j\omega \cdot \bar{\varphi}_r) dt \tag{I.76}$$

en plus les équations des flux (I.73) et (I.74), l'équation du couple (I.69) et l'équation de la vitesse (I.70).le schéma sur SIMULINK de ce modèle est donné par la figure (I.12).

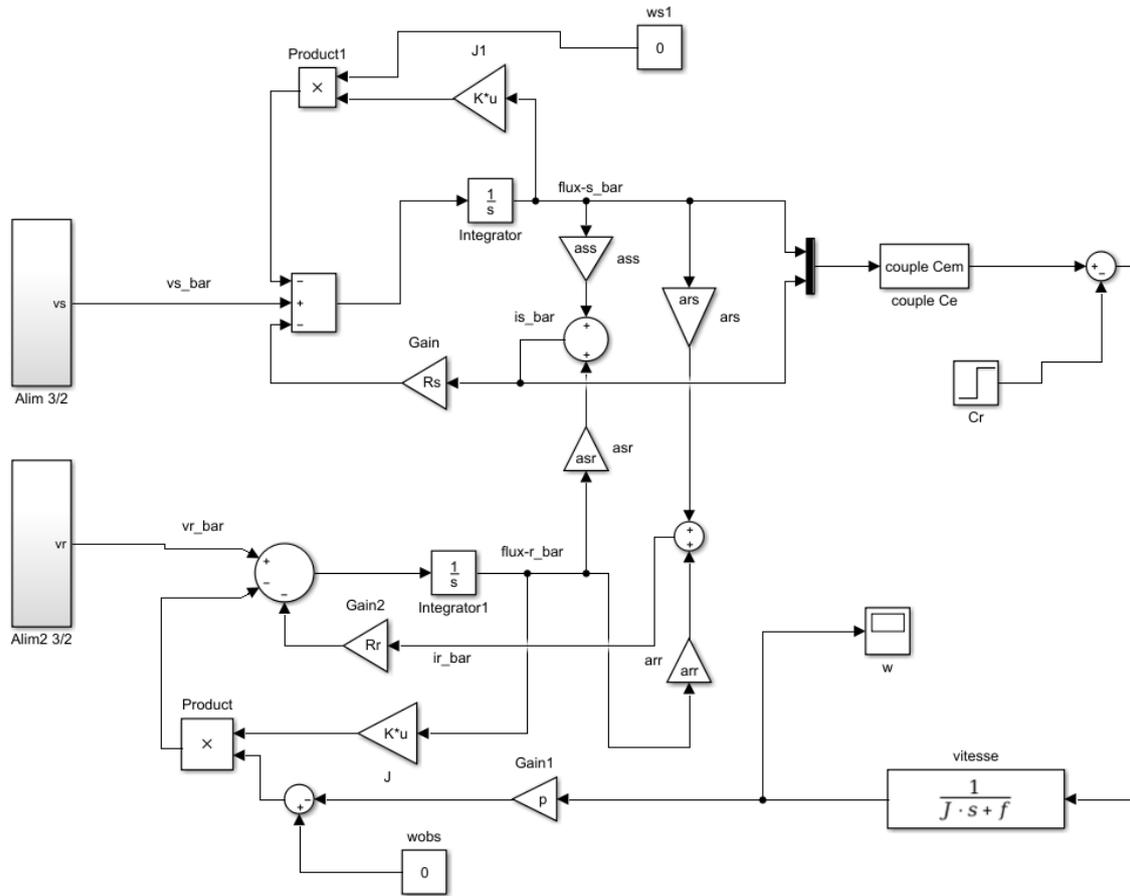


Figure (I.12) : Simulation d'une machine triphasée généralisée sur l'axe (α,β)

III.1 Schéma scalaire

le modèle scalaire, habituellement présenté dans la littérature, peut être déduit du modèle (I.67)-(I.70) par séparation des parties réelles et imaginaires de chacune de ces équations.

on aura alors huit équations scalaires au lieu de quatre en vectoriel :

Ainsi, pour le cas du référentiel synchronisme, qui semble le plus utilisé nous avons le modèle qui suit, avec $\omega_{obs}=\omega_s$:

Equations de tension :

$$\begin{cases} v_{ds} = R_s i_{ds} + \frac{d\varphi_{ds}}{dt} - \omega_s \varphi_{qs} \\ v_{qs} = R_s i_{qs} + \frac{d\varphi_{qs}}{dt} + \omega_s \varphi_{ds} \\ v_{dr} = R_r i_{dr} + \frac{d\varphi_{dr}}{dt} - (\omega_s - \omega) \varphi_{qr} \\ v_{qr} = R_r i_{qr} + \frac{d\varphi_{qr}}{dt} + (\omega_s - \omega) \varphi_{dr} \end{cases} \quad (I.77)$$

Equations de flux :

$$\begin{cases} \varphi_{ds} = L_s i_{ds} + M i_{dr} \\ \varphi_{qs} = L_s i_{qs} + M i_{qr} \\ \varphi_{dr} = L_r i_{dr} + M i_{ds} \\ \varphi_{qr} = L_r i_{qr} + M i_{qs} \end{cases} \quad (I.78)$$

IV. Déduction des différentes configurations des machines à courant alternatif

Les équations (I.67)-(I.70) constituent les équations fondamentales de toute machine à courant alternatif symétrique. Le stator, avec son bobinage triphasé, reste inchangé et le rotor subira des changements à condition de préserver la nature triphasé initiale de la machine, la symétrie et la constance de son entrefer. Par conséquent, avec des modifications imposées sur le rotor, on peut définir certaines configurations des machines à courant alternatif, telles que :

- La machine asynchrone à rotor à cage, MAS.
- La machine asynchrone double alimentée, (MADA).
- La machine synchrone à aimant permanent avec ou sans saillance, (MSAP).
- La machine synchrone à pôles lisses... etc