Cours réalisé par **D.YD**

Chapitre II : Fonction de transfert des systèmes linéaires

Introduction

Nous nous intéressons aux systèmes dynamiques, plus précisément aux évolutions temporelles des sorties de systèmes soumis à des entrées variables dans le temps. Nous nous limiterons aux cas des systèmes mono-variables, c'est à dire des systèmes possédant une variable manipulée ou entrée et une variable observée (mesurée) ou sortie. Leur modélisation mathématique s'exprime sous forme d'une relation entre l'évolution temporelle de la sortie notée $s(t)$, en fonction de celle de l'entrée notée $e(t)$, ou de celle d'une perturbation notée $d(t)$. Rappelons que les propriétés que nous attribuons au système sont, rigoureusement, les propriétés de leur modèle mathématique. Nous supposerons que cette relation ne varie pas en fonction du temps ; alors le système est dit invariant. Enfin, nous traitons uniquement le cas des systèmes linéaires continus mono-variables.

II.1 Représentation par des équations différentielles

Un système linéaire d'entrée $e(t)$ et de sortie $s(t)$ est régi par une équation différentielle à coefficients constants de type :

$$a_n \frac{d^n s(t)}{dt^n} + a_{n-1} \frac{d^{n-1} s(t)}{dt^{n-1}} + \cdots + a_0 s(t) = b \frac{d^m e(t)}{dt^m} + b_{m-1} \frac{d^{m-1} e(t)}{dt^{m-1}} + \cdots + b_0 e(t)$$

La solution nécessite un changement d'espace pour une simplification des calculs, pour les systèmes continus on utilise la transformation de Laplace.

D'après le théorème de la dérivée : $\mathcal{L}\left\{\frac{d^n s(t)}{dt^n}\right\} = p^n F(p)$

On applique la transformation de Laplace à l'équation différentielle :

$$a_n p^n S(p) + a_{n-1} p^{n-1} S(p) + \cdots + a_0 S(p) = b_m p^m E(p) + b_{m-1} p^{m-1} E(p) + \cdots + b_0 E(p)$$

Les conditions initiales sont nulles,

On pose : D(p) = $a_n p^n + a_{n-1} p^{n-1} + \cdots + a_0$

Et N(p) = $b_m p^m + b_{m-1} p^{m-1} + \cdots + b_0$

Ce qui donne : $S(p) = \frac{N(p)}{D(p)} E(p)$

Pour retrouver l'originale $s(t)$, on utilise la table de transformée de Laplace.

II.2 Fonction de transfert

L'étude adoptée ici étant uniquement liées aux variations autour d'un état stable, les conditions initiales seront considérées comme nulles.

On a: $S(p) = \frac{N(p)}{D(p)} E(p)$

On pose : $H(p) = \frac{S(p)}{E(p)}$

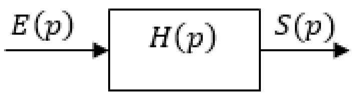
$$H(p) = \frac{N(p)}{D(p)} = \frac{b_m p^m + b_{m-1} p^{m-1} + \cdots + b_0}{a_n p^n + a_{n-1} p^{n-1} + \cdots + a_0}$$

$H(p)$ Est appelé **fonction de transfert** ou **transmittance** du système

Définition :

La fonction de transfert d'un système est le rapport de la transformée de Laplace de la variable de sortie à celle de la variable d'entrée, sous l'hypothèse que toutes les conditions initiales sont nulles.

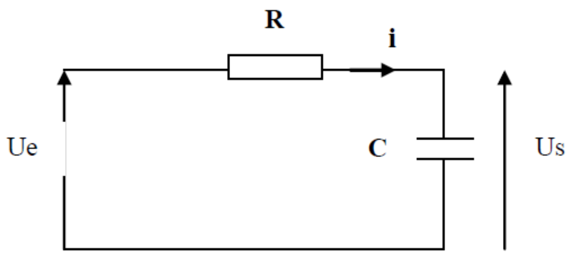
Dans le domaine symbolique, la relation entre l'entrée et la sortie s'écrit $S(p) = H(p) * E(p)$ est donne par :



❖ <u>**Exemple :**</u> **Circuit RC**

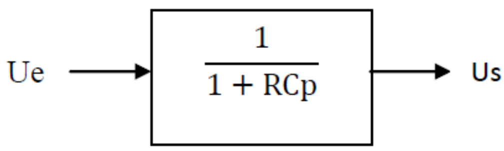
1) Équations temporelles :

$$U_e(t) - U_s(t) = R * i(t)$$
$$i(t) = C \frac{dU_s(t)}{dt}$$
$$U_e(t) - U_s(t) = R * C \frac{dU_s(t)}{dt}$$
$$U_e(t) = U_s(t) + R * C \frac{dU_s(t)}{dt}$$



2) En appliquant Laplace, on obtient :

$$U_e(p) = U_s(p) + R * C * p * U_s(p)$$
$$U_e(p) = U_s(p)(1 + R * C * p)$$
$$\frac{U_s(p)}{U_e(p)} = H(p) = \frac{1}{1 + R * C * p}$$



Le circuit RC est schématisé par le bloc ou se trouve la fonction de transfert du composant.

3) Simulation avec MATLAB du circuit RC : On souhaite par exemple calculer numériquement et sous Matlab la fonction de transfert du circuit RC, on donne $R = 5\Omega$ et $C = 0.01F$ on obtient $H(p) = \frac{1}{1+0.05p}$ le numérateur et dénominateurs sont tout d'abord introduits :

Cours réalisé par **D.YD**

num= [1] ;

den = [0.05 , 1] ;

HRC=tf (num, den)

```
>> num=  [1] ;
>> den = [ 0.05 , 1 ] ;
>> HRC=tf (num, den )

Transfer function:
    1
----------
0.05 s + 1
```

II.3 Représentation d'un système par schéma bloc

II.3.1 Principe

Un système mono-variable d'entrée $e(t)$, de sortie $s(t)$ et de fonction de transfert $H(p)$ peut être représenté par un bloc, comme le montre la figure 1 ci-dessous. Les flèches indiquent clairement le sens de propagation des informations (ou des signaux), et donc quelle est l'entrée et quelle est la sortie. Un système est considéré comme un transformateur d'informations ou de signal : il transforme le signal d'entrée en un nouveau signal, le signal de sortie.

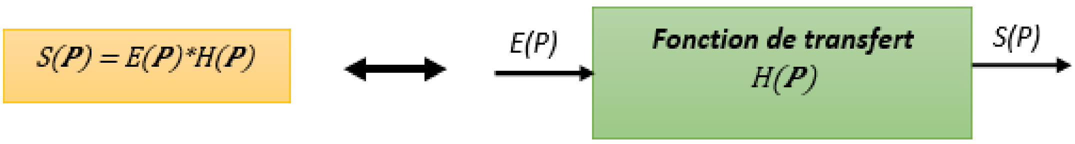
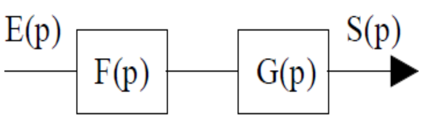
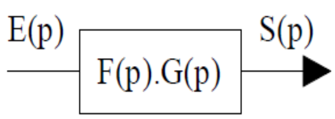


Figure 1 : Schéma de bloc de la fonction du transfert.

II.3.2 Transformations des schémas fonctionnels

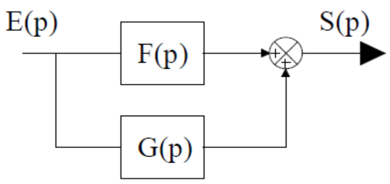
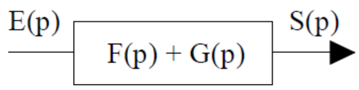
Il est souvent utile de pouvoir modifier la topologie d'un schéma bloc pour faciliter la lecture ou pour mettre en évidence une structure particulière. Les transformations élémentaires sont décrites ci-dessous, sachant que les transformations plus complexes s'en déduisent :

- **Fonction de transfert en série :** $\frac{S(p)}{E(p)} = F(p) * G(p)$

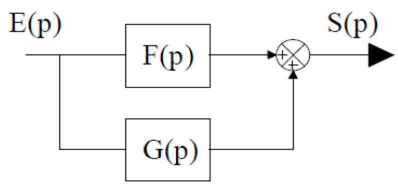
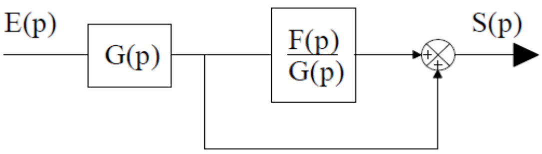
Schéma original.	Schéma équivalent.
	

Cours réalisé par **D.YD**

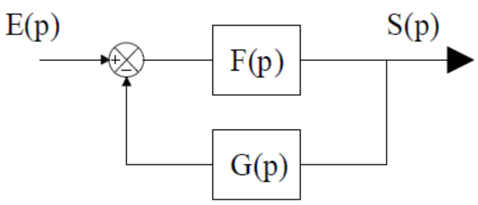
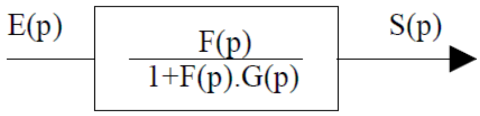
- **Fonction de transfert en parallèle :** $\frac{S(p)}{E(p)} = F(p) + G(p)$

<table>
<tr><th>Schéma original.</th><th>Schéma équivalent.</th></tr>
<tr><td>
</td><td>
</td></tr>
</table>

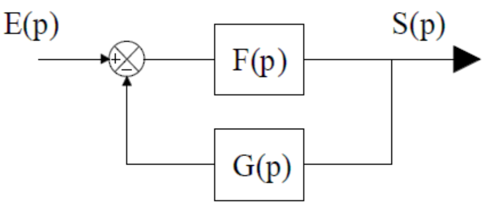
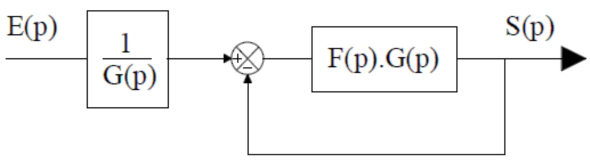
- **Fonction de transfert par la mise en boucle unitaire :** $\frac{S(p)}{E(p)} = F(p) + G(p)$

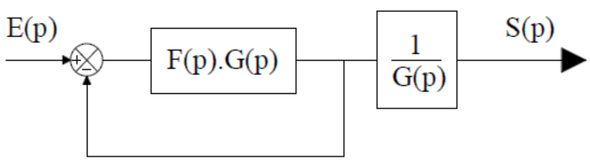
<table>
<tr><th>Schéma original.</th><th>Schéma équivalent.</th></tr>
<tr><td>
</td><td>
</td></tr>
</table>

- **Fonction de transfert par l'élimination d'une boucle de retour :** $\frac{S(p)}{E(p)} = \frac{F(p)}{1+F(p)*G(p)}$

<table>
<tr><th>Schéma original.</th><th>Schéma équivalent.</th></tr>
<tr><td>
</td><td>
</td></tr>
</table>

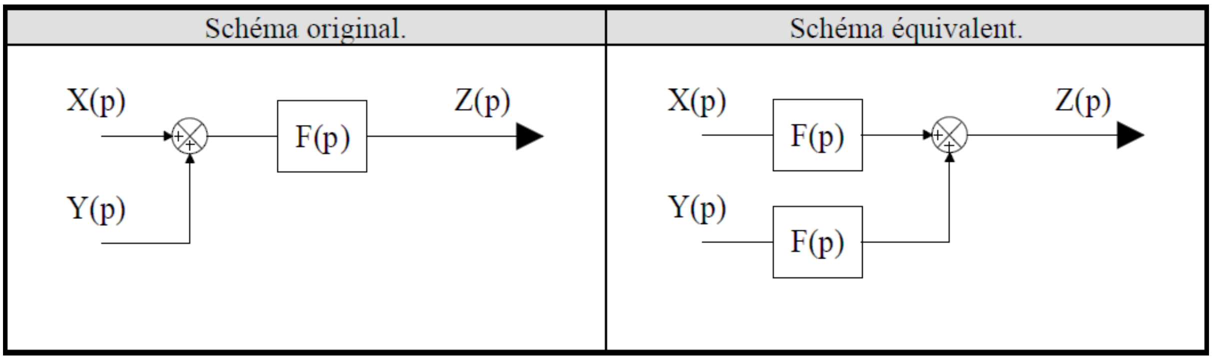
- **Fonction de transfert par la mise en retour unitaire :** $\frac{S(p)}{E(p)} = \frac{F(p)}{1+F(p)*G(p)}$

<table>
<tr><th>Schéma original.</th><th>Schémas équivalents.</th></tr>
<tr><td>
</td><td>

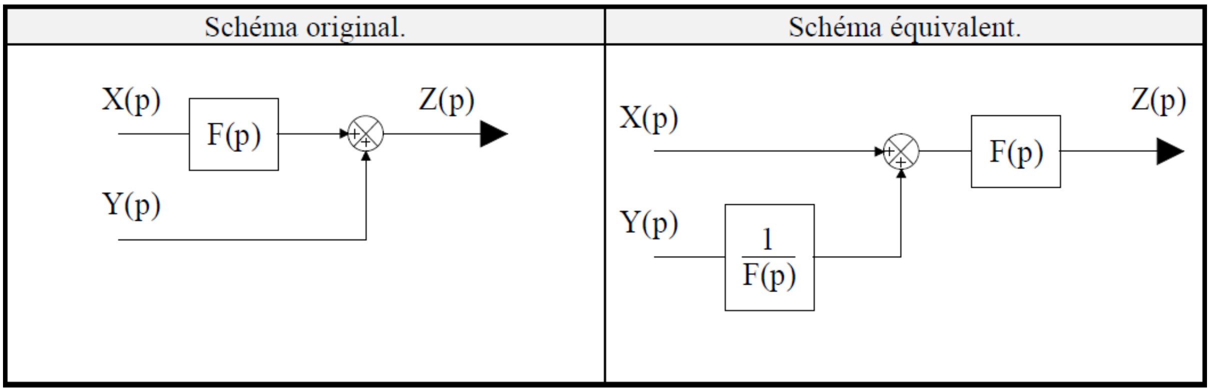

</td></tr>
</table>

Cours réalisé par **D.YD**

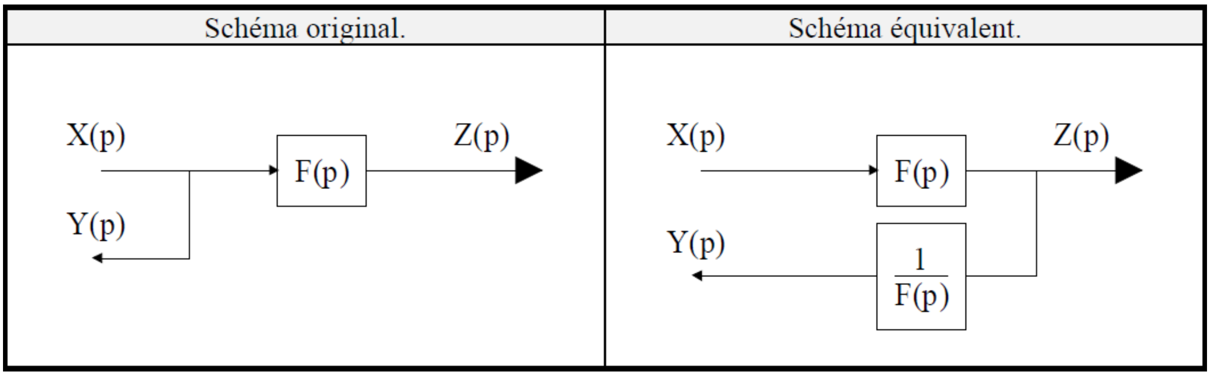
♣ **Déplacement avant d'un comparateur :** $Z(p) = F(p) * (X(p) + Y(p))$



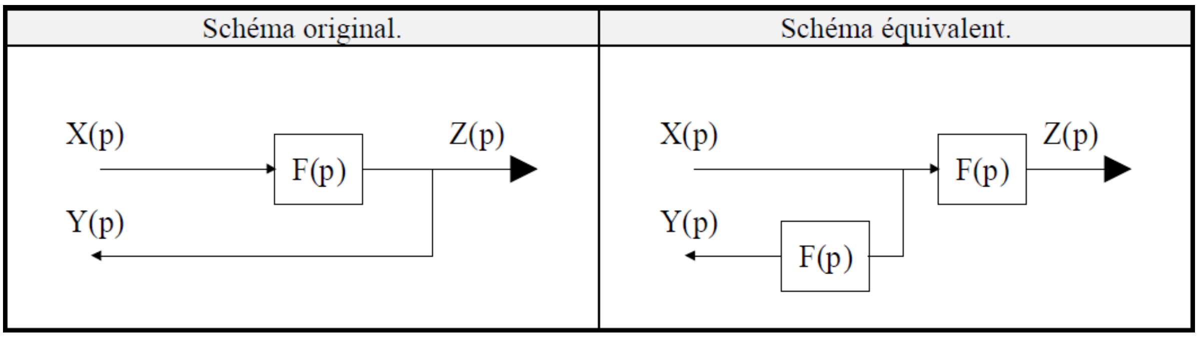
♣ **Déplacement arrière d'un comparateur :** $Z(p) = Y(p) + F(p) * X(p)$



♣ **Déplacement avant d'un point de dérivation :** $Z(p) = X(p) * F(p)$

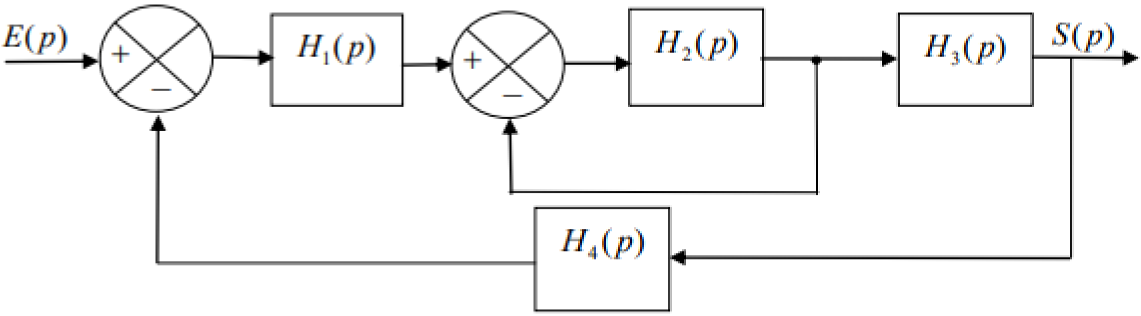


♣ **Déplacement arrière d'un point de dérivation :** $Z(p) = X(p) * F(p)$



Cours réalisé par **D.YD**

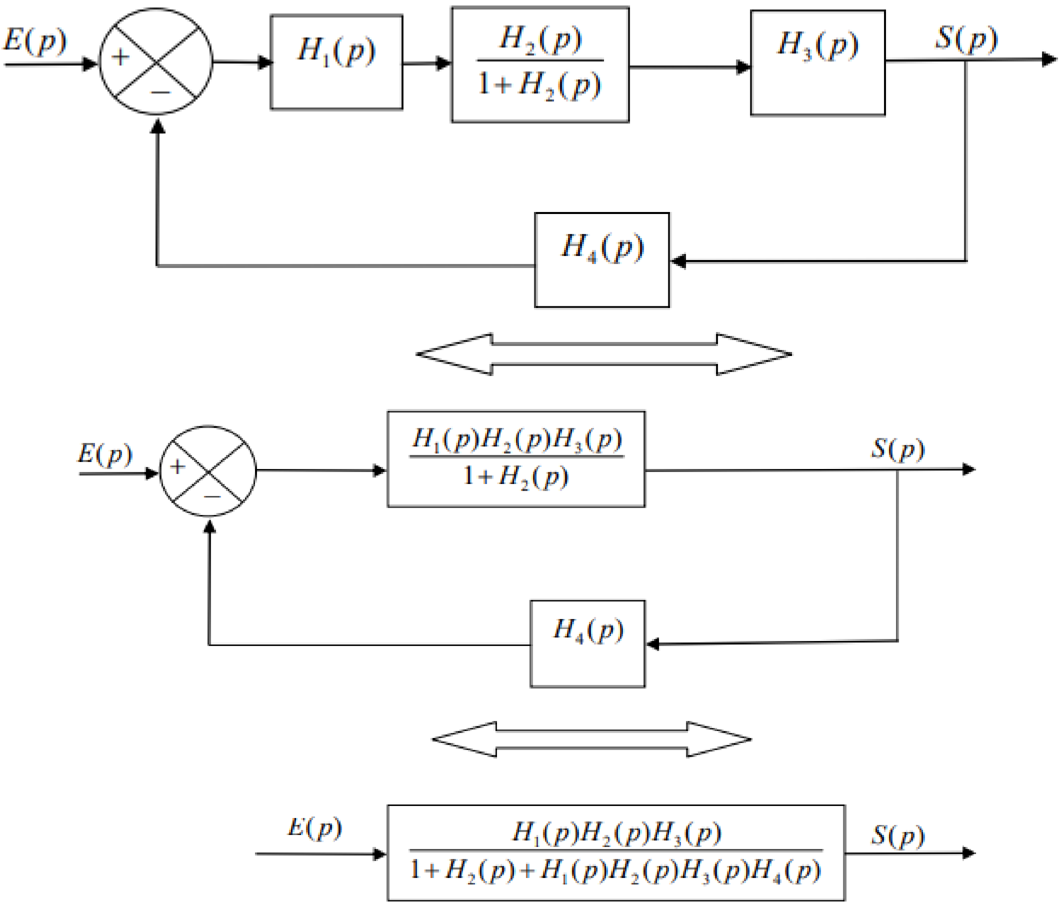
❖ **Exemple :** Soit le schéma fonctionnel suivant :



1) Simplifier ce schéma fonctionnel ;

2) En déduire la fonction de transfert du système.

✓ **Solution :**



La fonction de transfert est :

$$H(p)=\frac{S(p)}{E(p)}=\frac{H_1(p)H_2(p)H_3(p)}{1+H_2(p)+H_1(p)H_2(p)H_3(p)H_4(p)}$$

Cours réalisé par **D.YD**

II.4 Systèmes en boucle fermée et en boucle ouverte

II.4.1 Systèmes en boucle fermée

Le système est dit en boucle fermée si la commande est fonction de la consigne et de la sortie, il y a un feedback, sur la figure 2 de système bouclé : L'opérateur compare la température du four désirée (consigne) avec la température réelle (mesure) pour évaluer l'écart (erreur) et ajuster en conséquence (commande).

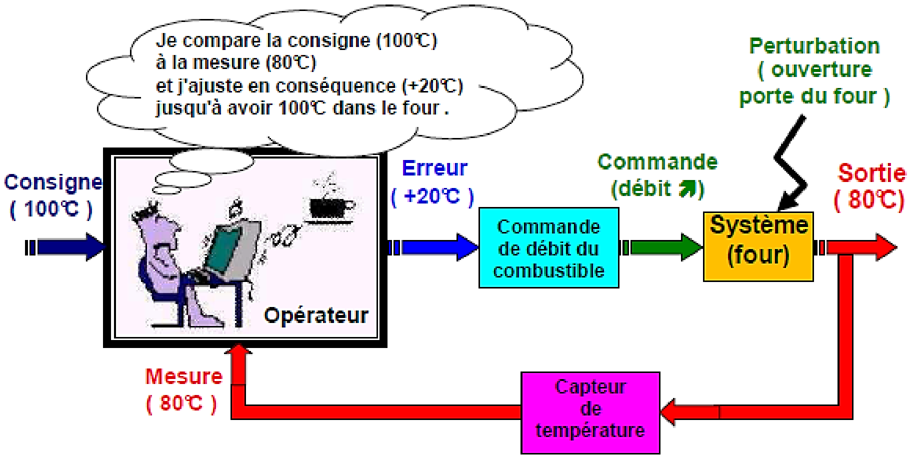


Figure 2 : Régulation de la température du four en boucle fermée.

En général le schéma temporel de ce système bouclé est le suivant :

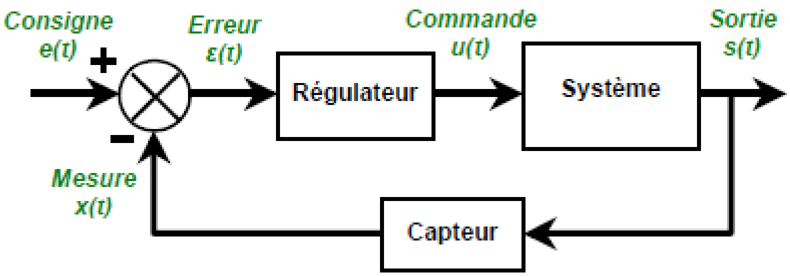


Figure 3 : Schéma temporel d'un système bouclé.

À travers d'un capteur, la sortie est réinjectée à l'entrée dans un comparateur (soustracteur idéal). La différence entre l'entrée et la sortie (appelée erreur) est calculée et forme le signal de commande de la chaine directe (correcteur + système). On réalise alors une contre réaction (figure 3).

La fonction de transfert du système ainsi bouclé est appelée fonction de transfert en boucle fermée L'étude d'un système asservi est grandement simplifiée si on utilise les transmittances Isomorphes pour chaque constituant (figure 4). Les signaux auront donc subit une transformation de Laplace.

Cours réalisé par **D.YD**

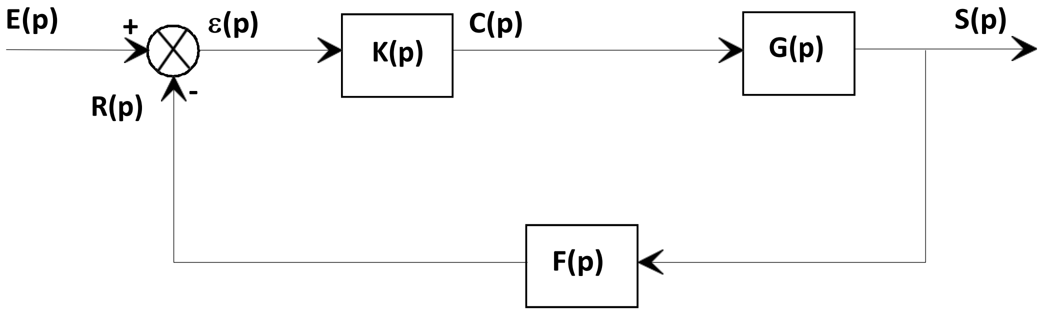


Figure 4 : Schéma Isomorphes d'un système bouclé

$E(p)$: Entrée du système asservi

$S(p)$: Sortie du système asservi

$\epsilon(p)$: Écart.

$R(p)$: Retour comparé à l'entrée $E(p)$

Nous avons :

$$S(p) = G(p) * C(p)$$
$$S(p) = G(p) * K(p) * \epsilon(p)$$
$$R(p) = F(p) * S(p)$$
$$\epsilon(p) = E(p) - R(p)$$

Donc :

$S(p) = G(p) * K(p) * \epsilon(p) = G(p) * K(p) * (E(p) - R(p))\ ) = G(p) * K(p) * (E(p) - (F(p) * S(p)))$

D'où : $S(p) = \frac{G(p)*K(p)}{1+G(p)*K(p)*F(p)} E(p) = H(p) * E(p)$

Nous obtenons donc :

$$H(p) = \frac{S(p)}{E(p)} = \frac{G(p) * K(p)}{1 + G(p) * K(p) * F(p)}$$

H(p) est appelée fonction de transfert en boucle fermée (F.T.B.F).

Le produit K(p).G(p) est appelé fonction de transfert en chaîne directe (F.T.C.D).

II.4.2 Système en boucle ouverte

Un système est en boucle ouverte lorsqu'on n'a aucune information sur la sortie.

- **Exemple :** Réglage de la température d'un four en agissant sur le débit du Combustible assurant la production de chaleur.

Cours réalisé par **D.YD**

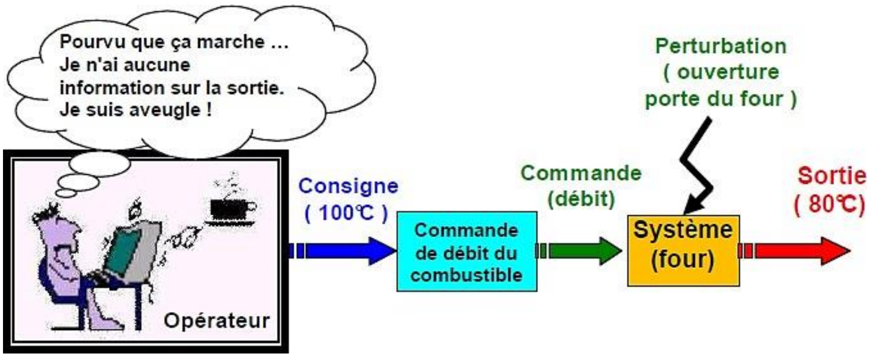


Figure 5 : Régulation de la température du four en boucle ouverte.

En général pour avoir le schéma temporel du système en boucle ouverte à partir du système en boucle fermée, nous ouvrons la boucle au niveau du comparateur sur la figure3 on obtient le schéma temporel suivant :

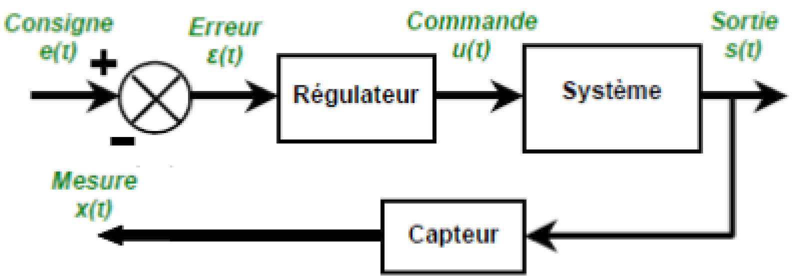


Figure 6 : Schéma temporel d'un système en boucle ouverte.

Le schéma Isomorphes de ce système en boucle ouverte est :

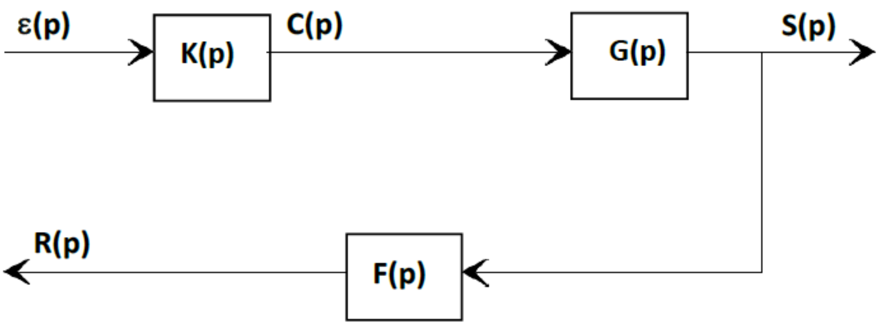


Figure 7 : Schéma Isomorphes d'un système en boucle ouverte.

Nous avons :$R(p) \ = K(p) * \ F(p) * G(p) * \epsilon(p)$

Et : $\quad R(p) = H_O(p) * \epsilon(p)$

Soit : $\quad H_O(p) = K(p) * F(p) * G(p)$

$H_O(p)$ est appelée fonction de transfert en boucle ouverte (F.T.B.O.). La fonction de transfert en boucle ouverte (F.T.B.O.) est égale au produit des fonctions de transfert de chaque bloc de la boucle. La fonction de transfert en boucle ouverte est utilisée pour déterminer les conditions de stabilité et de précision d'un système asservi.

- **Inconvénients de la boucle ouverte**
  1) **Correction impossible :** N'ayant aucune information sur la sortie, l'opérateur ne peut élaborer aucune stratégie d'ajustement pour obtenir la sortie désirée.
  2) **Sensibilité à la perturbation :** En admettant que la sortie soit conforme à la consigne ; une perturbation peut, à un moment donné, affecter la sortie. L'opérateur "aveugle" ne pourra corriger cette situation.

II.4.3 Système a retour unitaire

Soit un système représenté par le schéma bloc ci-dessous :

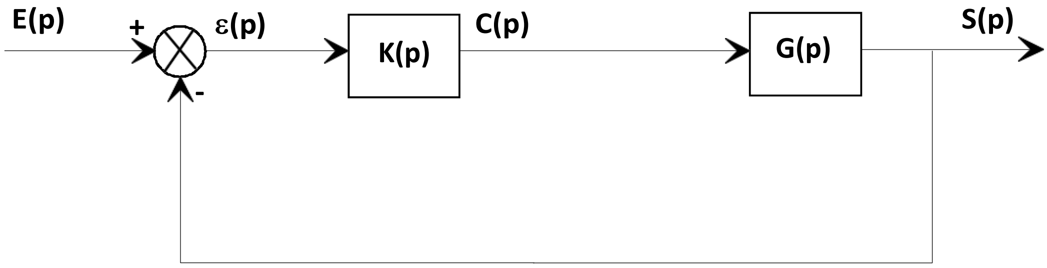


Figure 8 : Schéma Isomorphes d'un système a retour unitaire.

$E(p)$: Entrée du système asservi

$S(p)$: Sortie du système asservi

$\epsilon(p)$: Écart.

Nous avons : $S(p) = G(p) * C(p) = G(p) * K(p) * \epsilon(p)$

$$\epsilon(p) = E(p) - S(p)$$

Nous pouvons donc écrire : $S(p) = G(p) * K(p) * (E(p) - S(p))$

Dou :

$$S(p) = \frac{G(p) * K(p)}{1 + G(p) * K(p)} E(p) = H(p) * E(p)$$

Nous avons donc :

$$H(p) = F.T.B.F = \frac{G(p)*K(p)}{1+G(p)*K(p)} = \frac{H_O(p)}{1+H_O(p)} = \frac{F.T.B.O}{1+F.T.B.O}$$