Cours réalisé par **D.YD**

Transformation de Laplace

La transformée de Laplace (la TL) est une technique très employée en asservissement pour transformer une fonction dépend du temps en une fonction dépend d'une variable complexe. Elle permet de transformer des équations différentielles d'ordre quelconque dans le domaine du temps en des équations algébriques de même ordre dans le domaine complexe.

II.1 Définition de la TL

Soit $x(\mathrm{t})$ une fonction du temps, définie pour $\mathrm{t} > 0$ et nulle pour ou $\mathrm{t} < 0$. Soit p une variable complexe. On appelle transformée de Laplace de $x(\mathrm{t})$, la fonction de la variable complexe notée $X(\mathrm{p})$ telle que :

$$X(\mathrm{p}) = \mathcal{L}[x(t)] = \int_0^\infty e^{-pt}x(t)dt$$

- **Exemple :** Calculer la transformée de Laplace de la fonction $x(t) = e^{-at}u(t)$.
- ✓ **Solution :**

$$X(\mathrm{p}) = \mathcal{L}[x(t)] = \int_0^\infty e^{-pt}e^{-at}dt$$

$$X(\mathrm{p}) = \int_0^\infty e^{-(p+a)t}dt = -\frac{1}{p+a}\left[e^{-(p+a)t}\right]$$

$$X(\mathrm{p}) = \frac{1}{p+a}$$

II.2 Propriétés de la transformée de Laplace

II.2.1 Linéarité

La transformée de Laplace est linéaire. Si $x(t)$ et $y(t)$ ont des transformées de Laplace, alors :

1) $\mathcal{L}[ax(t)] = aX(p)$

2) $\mathcal{L}[ax(t) + by(t)] = aX(p) + bY(p)$

- **Exemple :** Calculer la transformée de Laplace de la fonction :

$$x(t) = (3e^{-2t} + 2e^{-3t})u(t) .$$

- ✓ **Solution :**

$$X(\mathrm{p}) = \frac{3}{p+2} + \frac{2}{p+3}$$

$$X(\mathrm{p}) = \frac{5p+13}{p^2+5p+6}$$

Cours réalisé par **D.YD**

II.2.2 Symétrie

Si $x(t)$ à une transformée de Laplace, alors :

$$\mathcal{L}(x(\text{at})) = \frac{1}{a}X(\frac{p}{a})$$

II.2.3 Décalage temporel

Si $x(t)$ à une transformée de Laplace, alors :

$$\mathcal{L}(x(\text{t} - \text{T})) = e^{-pT}X(p)$$

II.2.4 Décalage fréquentielle

Si $x(t)$ à une transformée de Laplace, alors :

$$\mathcal{L}(e^{\mp at}x(t)) = X(p \pm a)$$

II.2.5 Dérivée

Si $x(t)$ à une transformée de Laplace, alors :

$$\mathcal{L}\left[\frac{dx}{dt}\right] = pX(p) - x(0)$$

$$\mathcal{L}\left[\frac{d^2x}{d^2t}\right] = p^2X(p) - px(0) - x'(0)$$

$$\mathcal{L}\left[\frac{d^nx}{d^nt}\right] = p^nX(p) - p^{n-1}x(0) - p^{n-2}x'(0) - \ldots - x^{(n-1)}(0)$$

- **Exemple :** Calculer la transformée de Laplace de la fonction :

$$x(t) = e^{-at} .$$

- **Solution :**

$$\mathcal{L}[x'(t)] = pX(p) - x(0)$$

$$X(p) = \frac{1}{p+a} \Rightarrow pX(p) = \frac{p}{p+a}$$

Et

$$x(0) = 1$$

Donc

$$\mathcal{L}[x'(t)] = \frac{p}{p+a} - 1$$

$$\mathcal{L}[x'(t)] = -\frac{a}{p+a}$$

Cours réalisé par **D.YD**

II.2.6 L'intégrale

Si $x(t)$ à une transformée de Laplace, alors :

$$\mathcal{L}\left[\int_0^t x(t)dt\right] = Y(p) = \frac{X(p)}{p}$$

Et

$$\mathcal{L}\left[\int_{-\infty}^t x(t)dt\right] = Y(p) = \frac{X(p)}{p} + \frac{1}{p}\int_{-\infty}^0 x(t)dt$$

II.2.7 Théorème de la valeur initiale

Si $x(t)$ et $\frac{dx(t)}{dt}$ ont des transformées de Laplace, alors :

$$x(0) = \lim_{p\to\infty} pX(p)$$

II.2.8 Théorème de la valeur finale

Si $x(t)$ et $\frac{dx(t)}{dt}$ ont des transformées de Laplace, alors :

$$\lim_{t\to\infty} x(t) = \lim_{p\to 0} pX(p)$$

- **Exemple :** Déterminer la valeur initiale et la valeur finale de $x(t)$ si sa transformée de Laplace $X(p)$ est donnée par :

$$X(p) = \frac{10(2p+3)}{p(p^2+2p+5)}$$

✓ **Solution :**

$$x(0) = \lim_{p\to\infty} pX(p) = \lim_{p\to\infty} \frac{10(2p+3)}{(p^2+2p+5)} = 0$$

$$x(\infty) = \lim_{p\to 0} pX(p) = \lim_{p\to 0} \frac{10(2p+3)}{(p^2+2p+5)} = 6$$

Cours réalisé par **D.YD**

II.3 Transformées usuelles

Tableau II.1 : Tables de transformées de Laplace.

Signal causal (temporel)	Transformée de Laplace
Échelon	$\frac{1}{p}$
Dirac	1
Rampe	$\frac{1}{p^2}$
e^{-at}	$\frac{1}{p+a}$
$\sin(wt)$	$\frac{w}{p^2+w^2}$
$\sinh(wt)$	$\frac{w}{p^2-w^2}$
$e^{-at}\sin(wt)$	$\frac{w}{(p+a)^2+w^2}$
$\cos(wt)$	$\frac{p}{p^2+w^2}$
$\cosh(wt)$	$\frac{p}{p^2-w^2}$
$e^{-at}\cos(wt)$	$\frac{p+a}{(p+a)^2+w^2}$
t^n	$\frac{n!}{p^{n+1}}$
$1-e^{-\frac{t}{\tau}}$	$\frac{1}{p(1+\tau p)}$
te^{-at}	$\frac{1}{(p+a)^2}$

II.4 Transformée de Laplace Inverse

Généralement on calcule les **inverses** des **transformées de Laplace** à partir des **tables de transformées de Laplace**. En effet, pour trouver la **transformée de Laplace inverse** d'une **fonction** compliquée, on **décompose** cette **fonction** en **éléments simples** c.-à-d. en une somme de termes plus simples pour lesquelles nous connaissons les transformées inverses et par la suite, on peut utiliser la table de transformation.

Il y a quatre cas à distinguer :

1) Pôles réels et distincts ;
2) Pôles complexes et distincts ;
3) Pôles réels et multiples ;
4) Pôles complexes et multiples.

II.4.1 Pôles réels simples

Si les **pôles sont réels et distincts** de la fonction X(p), on peut la décomposer de la manière suivante :

$$X(p) = \frac{C_1}{p-p_1} + \frac{C_2}{p-p_2} + \cdots \frac{C_n}{p-p_n} = \sum_{i=1}^{n} \frac{C_i}{p-p_i}$$

Où : $C_i = (\, p - p_i)X(p)|_{p=p_i}$

Ainsi, on peut prendre la **transformée inverse** de chacun des termes pour obtenir :

$$x(t) = C_1 e^{p_1 t} + C_2 e^{p_2 t} \ldots C_n e^{p_n t} = \sum_{i=1}^{n} C_i e^{p_i t}$$

- **<u>Exemple :</u>** faire la décomposition en éléments simples de la transformée de Laplace $X(p)$ qui est donnée par :

$$X(p) = \frac{p+1}{p(p^2+5p+6)}$$

- ✓ **<u>Solution :</u>**

  Les pôles de cette fonction de transfert sont 0, 2 et -3 ainsi sa décomposition en éléments simples est comme suit :

$$X(p) = \frac{C_1}{p} + \frac{C_2}{p+2} + \frac{C_3}{p+3}$$

Où

$$C_i = (p - p_i)|_{p=p_i} \Rightarrow$$

$$C_1 = \frac{1}{6}$$

$$C_2 = \frac{1}{2}$$

$$C_3 = \frac{-2}{3}$$

$$x(t) = C_1 e^{p_1 t} + C_2 e^{p_2 t} + C_3 e^{p_3 t} = \frac{1}{6} + \frac{1}{2} e^{-2t} - \frac{2}{3} e^{-3t}$$

II.4.2 Pôles complexes et distincts

Les **pôles complexes** résultent en des **formes quadratiques** au **dénominateur** de X(p). Ainsi, on décompose X(p) d'une manière un peu différente de la précédente :

Cours réalisé par **D.YD**

$$X(p) = \frac{C_1}{p - p_1} + \frac{C_2 p + C_3}{p^2 + ap + b} + \cdots$$

Où

$$C_i = (p - p_i) X(p)|_{p=p_i}$$

Les coefficients C_2 et C_3 sont calculés comme suit :

On multiplie $X(p)$ par le plus petit commun dénominateur (Exemple : $(p - p_1)(p^2 + ap + b)$).

On résout l'équation en regroupant les termes en «p», et par la suite par simple déduction…

Pour simplifier la présentation, considérons le cas d'une **paire des pôles complexes conjugués** et le reste des **pôles** étant **simples**. En supposant que les **pôles** p1 et p2 sont **complexes et conjugués**. X(p) peut s'écrire par l'équation (2.20). Si les **pôles** p1 et p2 sont données par :

$$p_{1/2} = -\xi w_0 \pm j w_0 \sqrt{(\xi^2 - 1)}$$

Les résidus associés sont donnés par :

$$C_1 = k e^{j\theta} \;\; et \;\; C_2 = k e^{-j\theta} \;\; Avec : k = \lim_{p \to p_1} X(p)(p + p_1) \;\; et \;\; \theta = \arg\left\{ \lim_{p \to p_1} X(p)(p + p_1) \right\}$$

La contribution de ces pôles à la réponse impulsionnelle du système est donnée par :

$$k e^{j\theta} + k e^{-j\theta} = k e^{-\xi w_0 t} \left[e^{j(w_0 t \sqrt{(\xi^2 - 1)} + \theta)} + e^{-j(w_0 t \sqrt{(\xi^2 - 1)} + \theta)} \right] = 2k e^{-\xi w_0 t} \cos\left[w_0 t \sqrt{(\xi^2 - 1)} + \theta \right]$$

Et la réponse impulsionnelle est donnée par :

$$x(t) = 2k e^{-\xi w_0 t} \cos\left[w_0 t \sqrt{(\xi^2 - 1)} + \theta \right] + C_3 e^{p_3 t} + C_4 e^{p_4 t} + \ldots + C_n e^{p_n t}$$

- **Exemple :**

$$X(p) = \frac{p + 5}{(p^2 + 1)(p + 2)}$$

Les pôles de cette fonction de transfert sont $\pm j$ et $+2$, ainsi décomposition en éléments simples de $X(p)$ est comme suit :

$$X(p) = \frac{C_1}{p - j} + \frac{C_2}{p + j} + \frac{C_3}{p + 2} \quad Où : C_i = (p - p_i) X(p)|_{p=p_i}$$

$$\Rightarrow C_1 = 1.14 e^{j105,26} \; ; \; C_2 = 1.14 e^{-j105,26} \; et \; C_3 = \frac{3}{5}$$

Et la réponse impulsionnelle est donnée par :

$$\rightarrow x(t) = C_1 e^{p_1 t} + C_2 e^{p_2 t} + C_3 e^{p_3 t} = \frac{3}{5} e^{-2t} + 2.28 \cos(t + 105.26)$$

Cours réalisé par **D.YD**

II.4.3 Pôles réels et multiples

Si les **pôles sont réels et un des pôles se répète k fois**, on peut **décomposer** H(p) de la manière suivante :

$$X(p) = \frac{C_1}{p-p_1} + \frac{C_2}{(p-p_1)^2} + \cdots \frac{C_k}{(p-p_1)^k} + \frac{C_{k+1}}{p-p_{k+1}} + \cdots + \frac{C_n}{p-p_n}$$

Où pour les pôles simples :

$$C_i = pX(p)|_{p=p_i}$$

Et pour les k pôles multiples, on a :

$$C_{k-i} = \frac{1}{i!}\left[\frac{d^i}{dp^i}\{(p-p_i)^k X(p)\}\right]_{p=p_i}$$

Où

$$i = 0,1,\dots,k-1$$

- **Exemple :** faire la décomposition en éléments simples de la transformée de Laplace $X(p)$ suivante :

$$X(p) = \frac{p+3}{(p+2)(p^2+2p+1)}$$

- ✓ **Solution :**

Les pôles de cette fonction de transfert sont -1 avec un ordre de multiplicité d'ordre égale à 2 et –2, ainsi sa décomposition en éléments simples est comme suit :

$$X(p) = \frac{C_1}{(p+1)^2} + \frac{C_2}{p+1} + \frac{C_3}{p+2}$$

$$C_1 = 2$$

$$C_2 = -1$$

$$C_3 = 1$$

$$x(t) = 2te^{-t} - e^{-t} + e^{-2t}$$

II.4.4 Pôles complexes et multiples

Le cas des **pôles complexes multiples** se traite de la même manière que le cas des **pôles réels multiples**.