Cours réalisé par **D.YD**

Chapitre III : Les Systèmes du 1er ordre

III.1 Définition

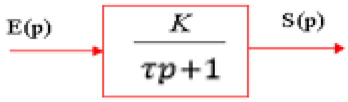
Tout système du premier ordre est régi par une équation différentielle de la forme :

$$\tau \frac{ds(t)}{dt} + s(t) = Ke(t)$$

Si les conditions initiales sont nulles, en appliquant la transformée de Laplace, la fonction de transfert est la suivante : $H(p) = \frac{S(p)}{E(p)} = \frac{K}{\tau p+1}$

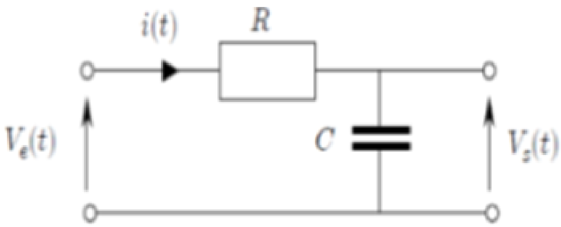
- K : est le gain statique, K = H(0)
- τ : est la constante de temps

Le schéma bloc d'un système du premier ordre est de la forme suivante.



Exemple :

Circuit RC

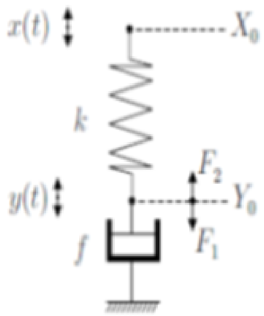


$$\boxed{F(p) = \frac{V_s(p)}{V_e(p)} = \frac{K}{1+\tau p}}$$

Avec

$K = 1$ et $\tau = RC$

Amortisseur ressort



$x(t)$ et $y(t)$ étant les variations respectives des positions des pointes X et Y

$$\boxed{f\left|\frac{dy}{dt}\right| = |F_1| \quad et \quad k|\Delta l| = |F_2| \\ \Delta l = \Delta X - \Delta Y = x(t) - y(t)}$$

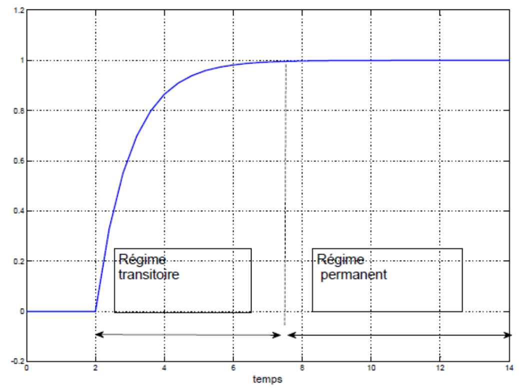
$$\boxed{\frac{Y(p)}{X(p)} = \frac{k}{k+f\,p}}$$

III.2 Etude temporelle

La réponse temporelle d'un système comprend 2 régimes :

- Le régime transitoire pendant lequel le système passe de son état initial à son état final ;
- Le régime permanent qui correspond à $t \to \infty$.

Cours réalisé par **D.YD**



La réponse temporelle d'un système 1ordre et les deux régimes.

Dans ce cours on va étudier 3 réponses temporelles de trois entrées qui sont :

Un échelon unitaire → $H(p)$ → La réponse indicielle

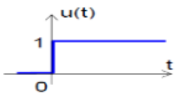
Une impulsion unitaire → $H(p)$ → La réponse impulsionnelle

Une rampe → $H(p)$ → La réponse à une rampe

III.2.1 Réponse indicielle

C'est la réponse temporelle d'un système quand l'entrée est un échelon unitaire:

$$u(t) = 1\ pour\ t\ \ 0$$
$$u(t) = 0\ pour\ t\ < 0$$



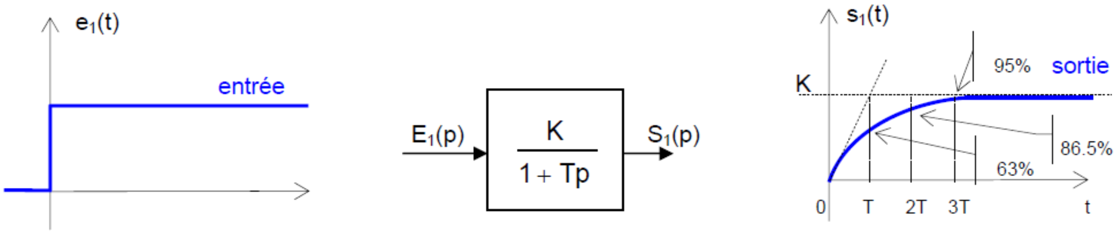
L'entrée du système est un signal échelon $e(t) = u(t)$. Sa transformée de Laplace est: $\mathcal{L}\{u(t)\} = \frac{1}{p}$

La réponse du système (L'expression de la sortie en Laplace du système) à un échelon d'amplitude 1 est alors :$S(p) = H(p) * E(p) = \frac{1}{p} * \frac{K}{1+\tau p}$

$S(p)$ se décompose en éléments simples de la façon suivante :$S(p) = \frac{\alpha}{p} + \frac{\beta}{1+\tau p} = \frac{K}{p} - \frac{\tau K}{1+\tau p}$

$$S(p) = K\left(\frac{1}{p} - \frac{\tau}{1+\tau p}\right)$$

On calcule facilement la sortie temporelle $s(t)$ à partir de la TL inverse de $S(p)$: $s(t) = K\left(1 - \exp(-\frac{t}{\tau})\right)$.



Réponse indicielle du système du 1er Ordre.

III.2.1.1 Etude de la réponse s(t)

- Etudions les limites en zéro et en l'infini :

  $S(0) = Lim_{t\to 0}(s(t)) = Lim_{p\to\infty}(pS(p)) = 0$ Valeur initiale nulle

  $S(\infty) = Lim_{t\to\infty}(s(t)) = Lim_{p\to 0}(pS(p)) = K$ Valeur finale K

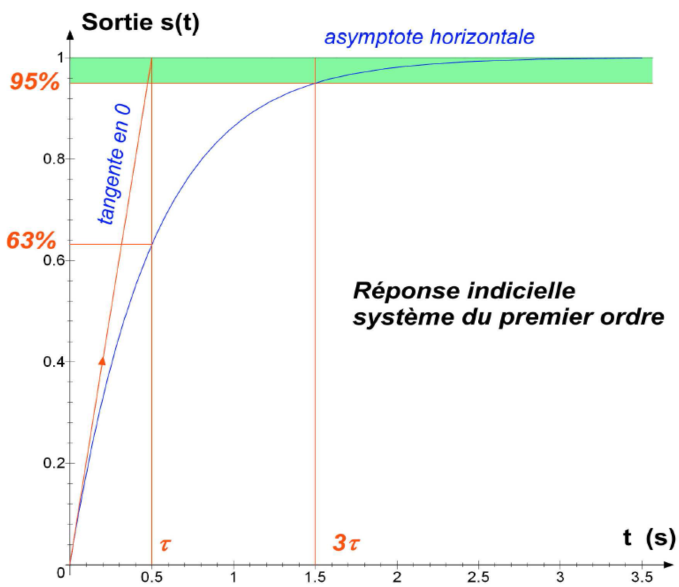
- Etudions la fonction dérivée et ses limites en zéro et en l'infini :

$$S'(p) = pS(p) - s(0) = P\frac{K}{p(1+\tau p)} = \frac{K}{1+\tau p}$$

$S'(0) = Lim_{t\to 0}(s'(t)) = Lim_{p\to\infty}\big(pS'(p)\big) = \frac{K}{\tau}$ Pente initiale non nulle

$S'(\infty) = Lim_{t\to\infty}(s'(t)) = Lim_{p\to 0}\big(pS'(p)\big) = 0$ Asymptote horizontale à l'infini

La figure suivante montre un exemple d'évolution temporelle de la réponse indicielle d'un système d'ordre. L'identification de la constante de temps et du gain statique du système s'effectue de manière simple, à partir de mesures graphiques sur cette courbe :



Evolution temporelle de la réponse indicielle du système 1er ordre.

Lorsqu'on observe la réponse du système, on peut distinguer deux régimes :

- le **régime transitoire** pendant lequel la **réponse varie**
- le **régime permanent** qui correspond à **sa stabilisation**.

Cours réalisé par **D.YD**

Quelles que soient les conditions initiales, **le régime permanent** d'un système du premier ordre peut être considéré atteint au bout d'un temps $t = 5 * \tau$.

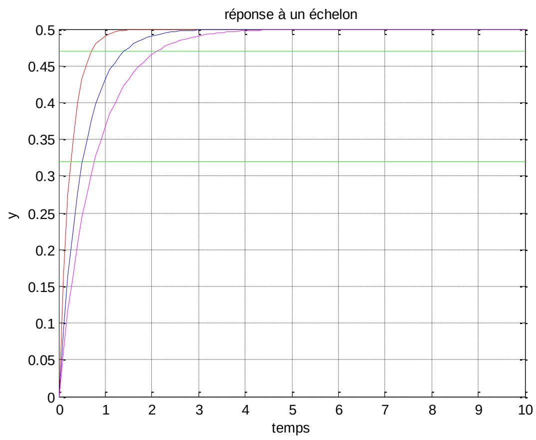
III.2.1.2 Caractéristiques transitoires

On peut définir, à partir de ce graphe, la constante de temps τ , le temps de réponse t_r du système, par le temps au bout duquel la sortie atteint sa valeur asymptotique (on dit aussi de sa valeur à l'infini) à 5 % près. Il est facile de vérifier que ce temps de réponse est de l'ordre de 3τ.

a) La pente de la tangente à l'origine : L'équation de la tangente à l'origine est $\frac{K}{\tau}$, la tangente coupe La droite d'équation $y(t) = K$ (l'asymptote finale) a l'instant $t = \tau$. Pour déterminer la constante de temps d'un système du premier ordre, il y a deux méthodes :

- Tracer la tangente à l'origine de sa courbe de réponse et déterminer l'instant où cette droite coupe l'asymptote finale
- Sur la figure on détermine τ à partir de l'intersection de la courbe avec la droite d'équation $y(t) = 0.63 * K$ .On a à l'instant $t = \tau$ la sortie est $s(\tau) = K\left(1 - \frac{1}{e}\right) \approx 0.63 * K$, ce qui représente environ 63% de K. La constante du temps τ est le temps nécessaire pour atteindre 63% de la valeur finale.

Exemple : on a $H(p) = \frac{1}{\tau p+1}$ pour τ =0.5, 1,1.5 on trace les figures suivantes :



Réponse indicielle de la fonction de transfert H(p) pour τ =0.5, 1,1.5.

On remarque que plus le système a une constante de temps faible, plus il "répond" vite. Donc on constate que la sortie $y(t) =$ atteint pratiquement le régime permanent au bout d'un temps qui dépend de la constante τ. Cette constante ***de temps*** caractérise donc la ***rapidité du système*** à atteindre son régime permanent.

b) *Temps de réponse a 5%($t_{5\%}$)* : Appelé (noté) aussi $\boldsymbol{t_r}$ ou $t_{5\%}$, le temps de réponse à 5% est le temps au bout duquel la sortie atteint son régime permanent à 5% près. Dans le cas du système du premier ordre, ce temps correspond à 3τ environ.

On cherche $t_{5\%}$: Tel que : $s(t_{5\%}) = 0.95K$

On a : $s(t_{5\%}) = K\left(1 - \exp\left(-\frac{t_{5\%}}{\tau}\right)\right) = 0.95K$

D'où : $1 - \exp\left(-\frac{t_{5\%}}{\tau}\right) = 0.95$

Soit : $\exp\left(-\frac{t_{5\%}}{\tau}\right) = 0.05$

Et finalement : $t_r = -\tau ln 0.05 \approx 3\tau = t_{5\%}$

Sur la figure on détermine $t_{5\%}$ à partir de l'intersection de la courbe de réponse avec la droite d'équation $y(t) = 0.95 * K$.

c) **Temps de montée :** Le temps de montée est le temps qui s'écoule entre 10% et 90% de la variation du signal. Soient t_1 et t_2 les instants ou la réponse vaut respectivement 10% et 90% de sa valeur finale.

$$s(t_1) = K\left(1 - \exp\left(-\frac{t_1}{\tau}\right)\right) = 0.1K \Rightarrow t_1 = -\tau \ln(0.9)$$

$$s(t_2) = K\left(1 - \exp\left(-\frac{t_2}{\tau}\right)\right) = 0.9K \Rightarrow t_2 = -\tau \ln(0.1)$$

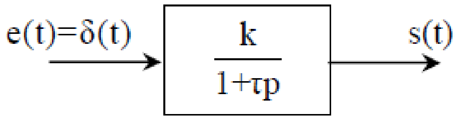
Donc

$$t_m = t_2 - t_1 = \tau \ln(9) = 2.2\tau$$

$$t_m = 2.2\tau$$

III.2.2 Réponse impulsionnelle

Le système de premier ordre est excité par une impulsion de Dirac unitaire $e(t) = \delta(t)$, sa transformée de Laplace vaut : $E(p) = L[\delta(t)] = 1$ d'où $S(p) = H(p)E(p)$

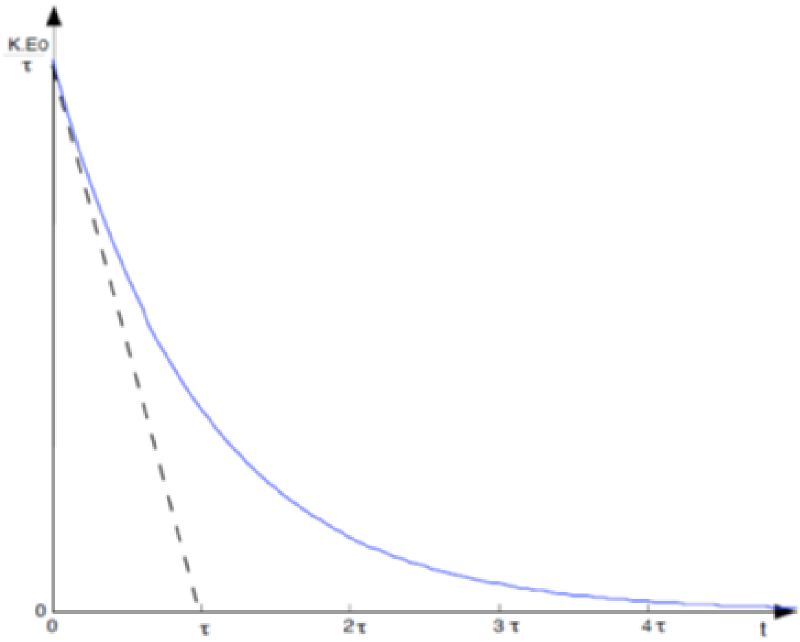


La transformée inverse de Laplace de $S(p)$ est fournie par :

$$L^{-1}[S(p)] = L^{-1}\left[\frac{K}{1 + \tau p}\right]$$

$$= s(t) = \frac{K}{\tau}\exp(-\frac{t}{\tau})$$

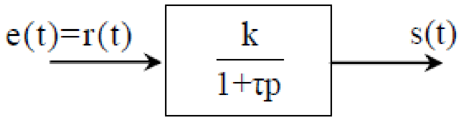
La tangente à l'origine coupe l'axe des temps en $t = \tau$.



Réponse d'un premier ordre à une impulsion.

III.2.3 Réponse à une Rampe

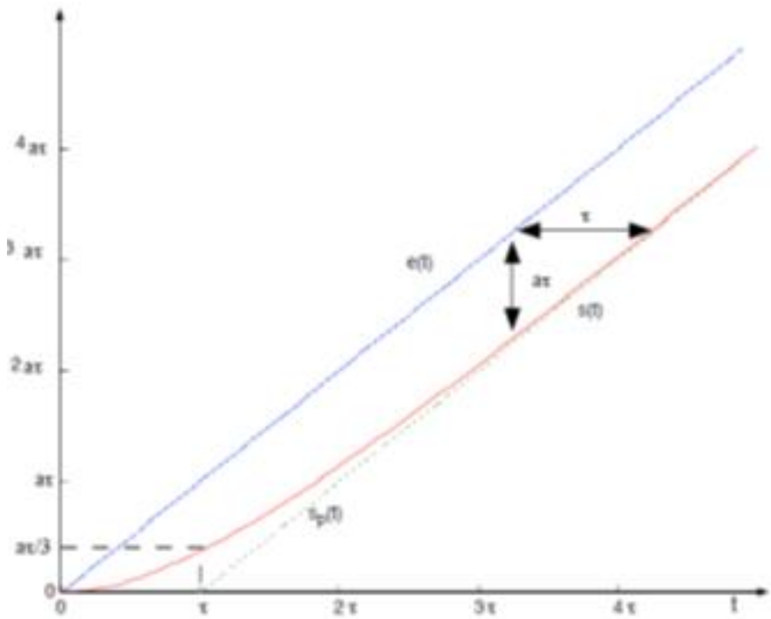
Le système de premier ordre est excité par une rampe unitaire $e(t) = tu(t)$. Elle est appelée aussi réponse en vitesse, sa transformée de Laplace vaut $E(p) = \frac{1}{p^2}$ d'où $S(p) = H(p)E(p)$.



La sortie est donnée par La transformée inverse de Laplace :

$$L^{-1}\left[\frac{S(p)}{p^2}\right] = L^{-1}\left[\frac{K}{p^2(1+\tau p)}\right] = s(t) = K(t - \tau + \tau \exp\left(-\frac{t}{\tau}\right))$$

Cours réalisé par **D.YD**



Réponse d'un premier ordre à une rampe pour k=1

Les caractéristiques de cette réponse sont :

1. La réponse est la somme de deux termes : une fonction exponentielle décroissante et une rampe retardée, de retard τ ;
2. La pente à l'origine est nulle ;
3. La sortie suit asymptotiquement la rampe e(t) avec un retard τ ;
4. En régime permanent : $\mathrm{t} \rightarrow \infty$, alors $s(\mathrm{t}) = K(\mathrm{t} - \tau)$;

- Si K=1, la sortie s(t) suit l'entrée avec un retard constant (τ). La différence entre la sortie et l'entrée est appelée erreur de traînage : $\xi = \tau$;
- Si $K \neq 1$, s(t) et e(t) n'ont pas la même pente. La sortie ne suit pas l'entrée. On dit qu'elle traîne. L'écart s'agrandit régulièrement et à la limite devient infini. L'erreur de traînage vaut: $\xi = K\tau$.