Table des matières

Chapitre 1

Les suites numériques

1.1 *Définition*

On appelle suite élément de E; toute application définie que:

$$\begin{array}{rccl} u: & \mathbb{N} & \longrightarrow & E \\ & n & \longrightarrow & u(n) = u_n \end{array}$$

tel que $E = \mathbb{R}$ *ou* $E = \mathbb{C}$.

- *L'image* $u(n)$ *est notée* u_n *et appelée terme d'indice* n *ou terme général de la suite* u, *et* u_0 *est le terme initial.*
- *La suite* u_n *est elle même notée* $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ *ou* $(u_n)_{n\geq 0}$.
- *Le nombre des termes distants est fini ou dénombrable.*
- *Les termes d'une suite ne sont pas forcément distants.*

Exemple 1.1.1 *:*

1) $u : \mathbb{N}^* \longrightarrow \mathbb{R}$

$$n \longrightarrow u_n = 4n^2 + \frac{1}{4}.$$

2) $v : \mathbb{N} \longrightarrow \mathbb{R}$

$$n \longrightarrow v_n = \sum_{k=0}^{n} 2^k$$

Remarque 1.1.1 *:*

- *Si* $E = \mathbb{R}$ *la suite* (u_n) *est dit réel.*
- *Si* $E = \mathbb{C}$ *la suite* (u_n) *est dit complexe.*

- *La donnée d'une suite complexe* $(z_n)_{n\geq 0}$ *équivaut à celle de deux suites réelles* $(u_n)_{n\geq 0}$ *et* $(v_n)_{n\geq 0}$ *définies par:* $\forall n \in \mathbb{N} : z_n = u_n + v_n i$ *c'est-à- dire* $u_n = \mathrm{Re}(z_n)$ *et* $v_n = \mathrm{Im}(z_n)$.

- *Le terme général en peut être défini sur deux formes:*

  - *forme explicite:*

  On donnée l'expression de u_n *en fonction de* n.

  Ex: $u_n = \dfrac{1}{n+1}, \;\; n \in \mathbb{N}.$

  $u_0 = 1, \;\; u_1 = \dfrac{1}{2}, \;\; u_2 = \dfrac{1}{3}$.................

  - *forme récurrente:*

  Un se calcul à partir du terme précédent (ou des k *premiers termes).*

  Ex: $\begin{cases} u_1 = 1 \\ \forall n \in \mathbb{N}^* : u_{n+1} = 1 + \dfrac{1}{u_n}, \end{cases}$

  $u_2 = 1 + 1 = 2, \;\; u_3 = 1 + \dfrac{1}{2} = \dfrac{3}{2}$, ...

1.2 *Opérations sur les suites:*

Soit $(u_n)_{n\geq 0}$ *et* $(v_n)_{n\geq 0}$ *deux suites numériques.*

- $(u_n)_{n\geq 0} = (v_n)_{n\geq 0} \Longleftrightarrow u_n = v_n, \;\; \forall n \in \mathbb{N}.$
- $(u_n)_{n\geq 0} + (v_n)_{n\geq 0} = (u_n + v_n)_{n\geq 0}.$
- $(u_n)_{n\geq 0} \times (v_n)_{n\geq 0} = (u_n \times v_n)_{n\geq 0}.$
- $\forall \lambda \in \mathbb{R}; \;\; \lambda (u_n)_{n\geq 0} = (\lambda u_n)_{n\geq 0}.$
- $(u_n)_{n\geq 0} \leq (v_n)_{n\geq 0} \Longleftrightarrow u_n \leq v_n, \;\; \forall n \in \mathbb{N}.$

1.3 *Suites périodiques et stationnaires:*

Définition 1.3.1 *: (suites constantes ou stationnaires)*

Soit $(u_n)_{n\geq 0}$ *une suite numérique. elle est dite constante s'il existe* $a \in \mathbb{R}$ *tel que* $\forall n \in \mathbb{N} : u_n = a$.

Elle est dite stationnaire s'il existe a *dans* $\mathbb{R}$ *et* $n_0 \in \mathbb{N}$ *tel que* $\forall n \geq n_0,\ u_n = a$.

Définition 1.3.2 *: (suites périodiques)*

Soit $(u_n)_{n\geq 0}$ *une suite numérique. elle est dite périodique s'il existe un entier positif* p *tel que* $\forall n \in \mathbb{N} : u_{n+p} = u_n$.

- *Si un entier* p *satisfait à cette propriété, tous ses multiples* p' *satisfait aussi.*
- *La période de la suite* $(u_n)_{n\geq 0}$ *est alors l'entier positif minimum* p *qui vérifie cette propriété on dit alors que la suite* $(u_n)_{n\geq 0}$ *est* p*-périodique.*

Remarque 1.3.1 *:*

- *Les suites constantes sont les suites* 1*-périodique.*
- *Si la suite* $(u_n)_{n\geq 0}$ *est* p*-périodique, alors* $(u_n)_{n\geq 0} = (u_n)_{0\leq n\leq p-1}$

1.4 *Suite bornée:*

Définition 1.4.1 *: Soit* $(u_n)_{n\geq 0}$ *une suite numérique.*

1- *La suite* $(u_n)_{n\geq 0}$ *est dite majorée, l'ensemble des nombres* u_n *admet un majorant. autrement dit* $\exists M \in \mathbb{R}, \forall n \in \mathbb{N};\ \ u_n \leq M$.

2- *La suite* $(u_n)_{n\geq 0}$ *est dite minorée si l'ensemble des nombres* u_n *admet un minorant. autrement dit* $\exists m \in \mathbb{R}, \forall n \in \mathbb{N};\ \ u_n \geq m$.

3- *La suite* $(u_n)_{n\geq 0}$ *est dite bornée s'elle est majorée et minorée au même temps.*

i.e: $\exists M, m \in \mathbb{R}, \forall n \in \mathbb{N};\ \ m \leq u_n \leq M$.

Exemple 1.4.1 *:*

1- *Soit* $(u_n)_{n\in\mathbb{N}^*} : u_n = \dfrac{1}{n}$, *on a* $\forall n \in \mathbb{N}^* : 0 \leq \dfrac{1}{n} \leq 1$.

la suite $(u_n)_{n>0}$ *est bornée.*

2- *Soit* $(u_n)_{n\in\mathbb{N}} : u_n = n$, *on a* $\forall n \in \mathbb{N} : n \geq 0 \Longrightarrow u_n \geq 0$.

$(u_n)_{n\geq 0}$ *est minoré par* 0 *mais* $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ *est non borné.*

3- $(u_n)_{n\in\mathbb{N}} : u_n = c \quad (c =$*constante)*

toute suite constante est bornée.

4- $(u_n)_{n\in\mathbb{N}} : u_n = (-1)^n .n$

est une suite non majorée et non minorée, donc non bornée.

Remarque 1.4.1 *:*

Pour montre qu'une suite est bornée on utilise la démonstration par récurrence.

Exemple 1.4.2 *:*

$$\begin{cases} \forall n \in \mathbb{N} : u_{n+1} = \sqrt{u_n + 2} \\ u_0 = 0 \end{cases}$$

Montrer que $\forall n \in \mathbb{N} : u_n \leq 2$

1) *Pour* $n = 0; u_0 = 0 \leq 2$ *vérifie.*

2) *On suppose que:* $u_n \leq 2$ *et montre que* $u_{n+1} \leq 2$.

on a:

$$\begin{aligned} u_n \leq 2 \quad &\Longrightarrow \quad u_n + 2 \leq 2 + 2 \\ &\Longrightarrow \quad u_n + 2 \leq 4 \\ &\Longrightarrow \quad \sqrt{u_n + 2} \leq 2 \end{aligned}$$

donc $\forall n \in \mathbb{N} : u_{n+1} \leq 2$.

Alors $\forall n \in \mathbb{N} : u_n \leq 2$.

et on a: $u_n \geq 0$ *donc* $0 \leq u_n \leq 2, \ \forall n \in \mathbb{N}$

la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ *est bornée.*

1.5 *Suites monotones*

Définition 1.5.1 *: Soit $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite numérique.*

1) *La suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est dite croissante (resp strictement croissante) si:*

$$\forall n \in \mathbb{N}, u_{n+1} \geq u_n \text{ (resp } u_{n+1} > u_n\text{)}.$$

2) *La suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est dite décroissante (resp strictement décroissante) si:*

$$\forall n \in \mathbb{N}, u_{n+1} \leq u_n \text{ (resp } u_{n+1} < u_n\text{)}.$$

3) *La suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est dite monotone s'elle est croissante ou décroissante.*

4) *La suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est dite constante si:* $\forall n \in \mathbb{N}, u_{n+1} = u_n = ... = u_0$.

Remarque 1.5.1 *:*

1) *Il ya des suites ni croissantes ni décroissantes.*

Ex: $\forall n \in \mathbb{N} : u_n = (-1)^n$

2) *Une suite non croissante n'est pas une suite décroissante dans le cas générale.*

Exemple 1.5.1 *:*

1) $\forall n \in \mathbb{N}^* : u_n = \dfrac{1}{n}$

$$u_{n+1} - u_n = \frac{1}{n+1} - \frac{1}{n} = \frac{n-(n+1)}{n(n+1)} = -\frac{1}{n(n+1)} < 0.$$

$u_{n+1} < u_n$ *alors la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ est strictement décroissante.*

2) $\forall n \in \mathbb{N} : u_n = n^2$

$$u_{n+1} - u_n = (n+1)^2 - n^2 = n^2 + 2n + 1 - n^2 = 2n + 1 > 0.$$

$u_{n+1} > u_n$ *alors la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est strictement croissante.*

3) $\forall n \in \mathbb{N} : u_n = (-1)^n$

$$u_{n+1} - u_n = (-1)^{n+1} - (-1)^n = (-1) . (-1)^n - (-1)^n = (-1)^n (-1-1) = (-1)^n (-2)$$

- *Si n pair $(n = 2k)$:* $u_{n+1} - u_n = -2 < 0$
- *Si n impair $(n = 2k+1)$:* $u_{n+1} - u_n = +2 > 0$

$u_{n+1} - u_n$ *n'a pas de signe constant donc* $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ *ni croissante, ni décroissante.*

1.6 *Suites convergentes*

Définition 1.6.1 *: Soit $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite numérique on dit que la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est convergente et admet pour limite le nombre réel l $\left(\lim\limits_{n\to+\infty} u_n = l\right)$ si:*

$$\forall \varepsilon > 0, \exists N = N(\varepsilon) ; n > N \Longrightarrow |u_n - l| < \varepsilon$$

on note alors: $u_n \longrightarrow l$ quand $n \longrightarrow +\infty$ ou $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n = l$.

Exemple 1.6.1 *: $\forall n \in \mathbb{N} : u_n = \dfrac{2n}{3n+1}$*

Montrer que $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge vers $\dfrac{2}{3}$.

$$\lim_{n\longrightarrow+\infty} u_n = \frac{2}{3} \Longleftrightarrow \forall \varepsilon > 0, \exists N = N(\varepsilon) ; n > N \Longrightarrow \left| u_n - \frac{2}{3} \right| < \varepsilon$$

Soit $\varepsilon > 0$ tel que: $\left| u_n - \dfrac{2}{3} \right| < \varepsilon$

On a:
$$\begin{aligned} \left| \frac{2n}{3n+1} - \frac{2}{3} \right| < \varepsilon &\Longrightarrow \left| \frac{6n-6n-2}{3(3n+1)} \right| < \varepsilon \\ &\Longrightarrow \left| \frac{-2}{3(3n+1)} \right| < \varepsilon \\ &\Longrightarrow \frac{2}{3(3n+1)} < \varepsilon \\ &\Longrightarrow 3(3n+1)\varepsilon > 2 \\ &\Longrightarrow 3n > \frac{2}{3\varepsilon} - 1 \\ &\Longrightarrow n > \frac{2}{9\varepsilon} - \frac{1}{3} \end{aligned}$$

il suffit de prendre $N = E\left(\dfrac{2}{9\varepsilon} - \dfrac{1}{3}\right) + 1$

donc $n > N \Longrightarrow \left| u_n - \dfrac{2}{3} \right| < \varepsilon \Longrightarrow \lim\limits_{n\to+\infty} u_n = \dfrac{2}{3}$.

Théorème 1.6.1 *: Si une suite* $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ *est convergente vers* l*, alors la limite* l *est unique.*

Démonstration:

Supposons que limite $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n = l$ *et* $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n = l'$ *avec* $l \neq l'$.

Supposons que : $l' < l$ *et posons* $\varepsilon = \frac{1}{4}|l - l'|$ *.il est clair que* $\frac{1}{4}|l - l'| > 0 \Longrightarrow \varepsilon > 0.$

- *comme* $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ *est convergente vers* l *alors* $\exists N_1$ *tel que:*

$\forall n \in \mathbb{N}, n > N_1 \Longrightarrow |u_n - l| < \varepsilon.$

- *comme* $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ *est convergente vers* l' *alors* $\exists N_2$ *tel que:*

$\forall n \in \mathbb{N}, n > N_2 \Longrightarrow |u_n - l'| < \varepsilon.$

Posons $N_0 = \max(N_1, N_2)$

$$\forall n \in \mathbb{N}, n > N_0 \Longrightarrow |u_n - l| < \varepsilon \text{ et } |u_n - l'| < \varepsilon.$$

D'autre part, on a:

$|l - l'| = |l - u_n + u_n - l'| \leq |l - u_n| + |u_n - l'| \leq \varepsilon + \varepsilon \leq 2\varepsilon$

alors $|l - l'| \leq 2\varepsilon \Longrightarrow |l - l'| \leq 2 \times \frac{1}{4}|l - l'| \leq \frac{1}{2}|l - l'|$.

ce qu'est impossible. Donc $l = l'$.

Remarque 1.6.1 *:*

Nous déduisons de ce théorème que pour montrer que la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ *est divergente il suffit de montrer qu'elle est tend vers deux valeurs différentes quand* $n \longrightarrow +\infty$.

Exemple 1.6.2 *: La suite* $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ *défini par:* $\forall n \in \mathbb{N} : u_n = (-1)^n$.

- *Si* $n = 2k$ *(n pair)* $\Longrightarrow u_n = 1 \Longrightarrow \lim\limits_{n\to+\infty} u_n = 1 = l.$
- *Si* $n = 2k + 1$ *(n* impair*)* $\Longrightarrow u_n = -1 \Longrightarrow \lim\limits_{n\to+\infty} u_n = -1 = l'.$

  $l \neq l' \Longrightarrow$*la suite* $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ *est divergente.*

Théorème 1.6.2 *: Toute suite convergente est bornée*

i.e: (u_n) *convergente* $\Longrightarrow (u_n)$ *est bornée*

Preuve. *Soit* $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ *une suite convergente vers* l *alors*

$$\begin{aligned}\forall\varepsilon>0,\exists N\in\mathbb{N};n>N&\Longrightarrow|u_n-l|<\varepsilon\\&\Longrightarrow|u_n|<|l|+\varepsilon\end{aligned}$$

On pose $k=\max\{|u_0|,|u_1|,.......,|u_n|,|l|+\varepsilon\}$;
il est clair que: $\forall n\in\mathbb{N}:|u_n|\leq k$ *donc* $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ *est bornée.* ■

Remarque 1.6.2 *:*

1) (u_n) *non bornée* $\Longrightarrow(u_n)$ *est divergente.*

Ex: $u_n=n$ *non bornée* $\Longrightarrow(u_n)$ *est divergente.*

2) $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ *bornée* $\nRightarrow(u_n)$ *est convergente.*

Ex: $u_n=(-1)^n$ *est bornée* $\forall n\in\mathbb{N}:|u_n|\leq1$ *mais* $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ *est divergente.*

1.7 *Sous suites*

Définition 1.7.1 *:*

Soit (u_n) *une suite numérique. et soit* $(n_k)_{k\in\mathbb{N}}$ *une suite strictement croissante de nombres naturels. La suite* (u_{n_k}) *est dite sous suite (ou suite extraite) de la suite* (u_n).

On montre facilement que toute sous suite d'une suite convergente est une suite convergente vers la même limite de (u_n).

- *la réciproque n'est pas vrai (une suite divergente peut admettre des sous suites convergentes).*

Exemple 1.7.1 *:*

1) $(u_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$; $u_n=\dfrac{1}{n}$

(u_{2n}) *est une sous suite de* (u_n).

On a (u_n) *est une suite convergente vers* 0 *et* (u_{2n}) *est une suite convergente vers* 0.

2) $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$; $u_n=(-1)^n$

(u_{2n}) *et* (u_{2n+1}) *sont deux sous suite de* (u_n) .

On a (u_n) *est une suite divergente mais* (u_{2n}) *et* (u_{2n+1}) *sont convergents.*

1.8 *Théorème des convergences des suites monotones*

Théorème 1.8.1 *: une suite* (u_n) *croissante et majorée est une suite convergente vers* $l = \sup u_n$.

i.e: $\left.\begin{array}{l} (u_n) \text{ croissante} \\ (u_n) \text{ majorée} \end{array}\right\} \Longrightarrow (u_n)$ *est convergente.*

et on a: $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n = l = \sup(u_n)$

Preuve. *Soit* (u_n) *croissante et majorée* $\Longrightarrow$ *l'ensemble des nombres* (u_n) *admet une bornée supérieure* $l = \sup(u_n)$ *donc*

$$\forall\varepsilon > 0, \exists u_N \in \{u_n\}\,; l - \varepsilon < u_N \leq l \Longrightarrow 0 < l - u_N \leq \varepsilon.$$

ces inégalités valables pour tout $n > N$.

on a aussi trouvé un nombre N *tel que*

$$\forall n \geq N, 0 < l - u_n \leq \varepsilon \Longrightarrow \lim_{n\to+\infty} u_n = l.$$

■

Théorème 1.8.2 *: une suite* (u_n) *décroissante et minorée est une suite convergente vers* $l = \inf(u_n)$.

i.e: $\left.\begin{array}{l} (u_n) \text{ décroissante} \\ (u_n) \text{ minorée} \end{array}\right\} \Longrightarrow (u_n)$ *est convergente.*

et on a: $\lim\limits_{n\to+\infty} (u_n) = l = \inf(u_n)$.

Preuve. *: Démonstration analogue que la précédente.* ■

Exemple 1.8.1 *:*

1) $(u_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$; $u_n = \dfrac{1}{n}$

(u_n) est décroissante et minorée par $0 \Longrightarrow (u_n)$ *est suite convergente vers* $l = 0 = \inf(u_n)$.

2) $(u_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$; $u_n = \dfrac{n-1}{n}$

(u_n) est croissante et majorée par $1 \Longrightarrow (u_n)$ *est suite convergente vers* $l = 1 = \sup(u_n)$.

3) $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ *défini par:*

$$\begin{cases} |u_n| \leq 1 \\ u_{n+1} = \dfrac{1+u_n^2}{2}, \quad \forall n \in \mathbb{N} \end{cases}$$

par récurrence on montre que la suite (u_n) est croissante et majorée par $1 \Longrightarrow$ *la suite (u_n) est convergente vers l où* $l = \lim\limits_{n\to+\infty} u_{n+1} = \lim\limits_{n\to+\infty} u_n$.

$$\begin{aligned} l = \lim_{n\to+\infty} u_{n+1} = \lim_{n\to+\infty} u_n &\Longrightarrow l = \frac{1+l^2}{2} \\ &\Longrightarrow l^2 - 2l + 1 = 0 \\ &\Longrightarrow (l-1)^2 = 0 \\ &\Longrightarrow l = 1 = \sup(u_n) \end{aligned}$$

1.9 *Théorème sur les suites convergentes*

Théorème 1.9.1 *: Soient (u_n) et (v_n) deux suites convergentes vers l et l' respectivement* $\left(l = \lim\limits_{n\to+\infty} u_n \quad ; \quad l' = \lim\limits_{n\to+\infty} v_n \right)$.

1) *La suite $(u_n + v_n)$ converge vers $l + l'$.*

2) *La suite $(u_n \times v_n)$ converge vers $l \times l'$.*

3) *La suite (λu_n) converge vers λl;* $\lambda \in \mathbb{R}$.

4) *La suite $(|u_n|)$ converge vers $|l|$.*

5) $\forall n \in \mathbb{N}; u_n \neq 0$ *et* $l \neq 0$, *la suite* $\left(\dfrac{1}{u_n}\right)$ *converge vers* $\dfrac{1}{l}$.

6) *Si (u_n) converge vers l et $u_n \geq 0$, alors $l \geq 0$.*

7) *Si (u_n) converge vers l et $u_n \leq 0$, alors $l \leq 0$.*

8) *Si* $n \in \mathbb{N}$ *(or* $\forall n > N$*),* $u_n \leq v_n \Longrightarrow l \leq l'$.

- *On remarque que l'inégalité* $u_n < v_n$ *stricte n'entraine pas généralement l'inégalité stricte* $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n < \lim\limits_{n\to+\infty} v_n$.

  par exemple: $\forall n \in \mathbb{N}^*$ *on a:* $u_n = \dfrac{-1}{n}, v_n = \dfrac{1}{n}$

  $u_n < v_n$ *mais* $\lim\limits_{n\to+\infty}\left(\dfrac{-1}{n}\right) = \lim\limits_{n\to+\infty}\left(\dfrac{1}{n}\right) = 0.$

Donc seules les inégalités larges se conservent par passage a la limite.

Proposition 1.9.1 *: Si deux suites* (u_n) *et* (v_n) *sont convergentes vers la même limite* l $(l \in \mathbb{R})$ *et si à partir d'un certain rang* N*, la suite* (w_n) *vérifie l'inégalité* $u_n \leq w_n \leq v_n$, $\forall n \geq N$*. Alors la suite* (w_n) *converge vers* l*.*

Exemple 1.9.1 *:*

$$w_n = \sum_{k=1}^{n} \frac{n}{n^3+k} = \frac{n}{n^3+1} + \frac{n}{n^3+2} + \frac{n}{n^3+3} + ... + \frac{n}{n^3+n}$$

On a: $\forall k \in \{1, 2, 3, ..., n\} \Longrightarrow 1 \leq k \leq n$

$$\Longrightarrow n^3+1 \leq n^3+k \leq n^3+n$$
$$\Longrightarrow \frac{1}{n^3+n} \leq \frac{1}{n^3+k} \leq \frac{1}{n^3+1}$$
$$\Longrightarrow \frac{n}{n^3+n} \leq \frac{n}{n^3+k} \leq \frac{n}{n^3+1}$$
$$\Longrightarrow \frac{n^2}{n^3+n} \leq \sum_{k=1}^{n} \frac{n}{n^3+k} \leq \frac{n^2}{n^3+1}.$$

On suppose: $u_n = \dfrac{n^2}{n^3+n}$ *et* $v_n = \dfrac{n^2}{n^3+1}$ *donc* $u_n \leq \displaystyle\sum_{k=1}^{n} \frac{n}{n^3+k} \leq v_n$

$$\text{On a:} \quad \left.\begin{array}{c} \lim\limits_{n\to+\infty} u_n = \lim\limits_{n\to+\infty} \dfrac{n^2}{n^3+n} = 0 \\ \text{et} \\ \lim\limits_{n\to+\infty} v_n = \lim\limits_{n\to+\infty} \dfrac{n^2}{n^3+1} = 0 \end{array}\right\} \Longrightarrow \lim_{n\to+\infty} w_n = 0.$$

Théorème 1.9.2 *: Soit* (u_n) *une suite convergente vers* 0 *et soit* (v_n) *une suite bornée. Alors la suite* $(u_n \times v_n)$ *est convergente vers* 0*.*

Exemple 1.9.2 *:*

$$w_n = \frac{\cos(2n+1)}{3n}, \quad \forall n \in \mathbb{N}^*.$$

$$\left.\begin{array}{l} u_n = \cos(2n+1) \ \textit{ est borné} \\ v_n = \dfrac{1}{3n} \ \textit{ converge vers } 0 \end{array}\right\} \Longrightarrow w_n \textit{ converge vers } 0.$$

1.10 *Extension aux limites infinies*

Définition 1.10.1 *: Soit (u_n) une suite numérique.*

1. *On dit qu'une suite (u_n) tend vers $+\infty$ si:*

$$\forall A > 0, \exists N \in \mathbb{N}; \forall n > N \Longrightarrow u_n > A.$$

c'est- -à- dire $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n = +\infty \Longleftrightarrow$ *la suite (u_n) est divergente.*

2. *On dit qu'une suite (u_n) tend vers $-\infty$ si:*

$$\forall A > 0, \exists N \in \mathbb{N}; \forall n > N \Longrightarrow u_n < -A.$$

c'est- -à- dire $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n = -\infty \Longleftrightarrow$ *la suite (u_n) est divergente.*

Exemple 1.10.1 *:*

1) $u_n = 2n, \ \forall n \in \mathbb{N}$

Soit $A > 0; u_n > A \Longrightarrow 2n > A \Longrightarrow n > \dfrac{A}{2}.$

donc N *existe et* $N = E\left(\dfrac{A}{2}\right) + 1 \in \mathbb{N};$ *alors*

$$\forall A > 0, \exists N \left(N = E\left(\frac{A}{2}\right) + 1\right) \in \mathbb{N}; u_n > A$$

donc $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n = +\infty.$

2) $u_n = -\dfrac{n^2}{2}, \ \forall n \in \mathbb{N}$

Soit $A > 0; u_n < -A \Longrightarrow -\dfrac{n^2}{2} < -A \Longrightarrow \dfrac{n^2}{2} > A \Longrightarrow n^2 > 2A \Longrightarrow n > \sqrt{2A}$

donc N *existe et* $N = E\left(\sqrt{2A}\right) + 1 \in \mathbb{N};$ *alors*

$$\forall A > 0, \exists N \left(N = E\left(\sqrt{2A}\right) + 1\right) \in \mathbb{N}; u_n < -A$$

donc $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n = -\infty.$

1.11 *Suites adjacentes*

Définition 1.11.1 *: Soient (u_n) et (v_n) deux suites numériques. On dit que (u_n) et (v_n) sont **adjacentes** si et seulement si:*
$$\begin{cases} 1)\ (u_n)\ \text{est croissante} & . \\ 2)\ (v_n)\ \text{est décroissante.} \\ 3)\ \lim_{n\to+\infty}(u_n - v_n) = 0. \end{cases}$$

Théorème 1.11.1 *: Soient (u_n) et (v_n) deux suites adjacentes alors (u_n) et (v_n) sont convergentes vers la même limite.*

Preuve. *Soient (u_n) et (v_n) deux suites adjacentes.*

On suppose que (u_n) est croissante et (v_n) est décroissante.

Soit la suite (w_n) définie par $w_n = v_n - u_n$.

On a: $w_{n+1} - w_n = \underbrace{(v_{n+1} - v_n)}_{\leq 0} - \underbrace{(u_{n+1} - u_n)}_{\geq 0} \leq 0.$

alors (w_n) est décroissante. et minorée par sa limite $l = 0$.

On suppose que $w_n \geq 0 \Longrightarrow v_n - u_n \geq 0 \Longrightarrow v_n \geq u_n$.

$u_0 \leq u_1 \leq .... \leq u_n \leq u_{n+1} \leq v_{n+1} \leq v_n \leq .... \leq v_1 \leq v_0.$

On a la suite (u_n) est croissante et majorée par v_0 alors (u_n) converge vers l et $l \leq v_0$.

et la suite (v_n) est décroissante et minorée par u_0 alors (v_n) converge vers l' et $l' \geq u_0$.

On a: $\lim_{n\to+\infty}(v_n - u_n) = l' - l = 0 \Longrightarrow l' = l.$ ■

Exemple 1.11.1 *:*

$$u_n = 1 + \frac{1}{2^2} + \frac{1}{3^2} + ... + \frac{1}{n^2} = \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k^2};\ \ \forall n \in \mathbb{N}^*.$$

$$v_n = u_n + \frac{1}{n};\ \ \forall n \in \mathbb{N}^*.$$

On a:

1) $u_{n+1} - u_n = 1 + \frac{1}{2^2} + ... + \frac{1}{n^2} + \frac{1}{(n+1)^2} - 1 - \frac{1}{2^2} - .... - \frac{1}{n^2} = \frac{1}{(n+1)^2} > 0.$

donc (u_n) est croissante.

2) $v_{n+1} - v_n = \left(u_{n+1} + \frac{1}{(n+1)}\right) - \left(u_n + \frac{1}{n}\right)$

$$= u_{n+1} - u_n + \frac{1}{(n+1)} - \frac{1}{n}$$

$$= \frac{1}{(n+1)^2} + \frac{1}{(n+1)} - \frac{1}{n} = \frac{-1}{n(n+1)^2} < 0$$

donc (v_n) est décroissante.

3) $\lim\limits_{n\to+\infty} (v_n - u_n) = \lim\limits_{n\to+\infty} \left(u_n + \frac{1}{n} - u_n \right) = \lim\limits_{n\to+\infty} \frac{1}{n} = 0.$

alors (u_n) et (v_n) sont adjacents.

1.12 *Suites récurrentes*

Définition 1.12.1 *: Soit f une fonction telle que: $f : D \subset \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ on appelle suite récurrente une suite (u_n) définie par la donnée de u_0 et la relation $\forall n \in \mathbb{N} : u_{n+1} = f(u_n)$.*

Exemple 1.12.1 *:* $\begin{cases} u_0 = a > 0 \\ u_{n+1} = \sqrt{2 + u_n} \end{cases}$

1.12.1 *Convergence*

Théorème 1.12.1 *: Soit (u_n) une suite récurrente définie par u_0 et $u_{n+1} = f(u_n)$ avec f une fonction continue. Si la limite (u_n) converge vers $l \in D$ alors cette limite vérifie $f(l) = l$; l est un point fixe de la fonction.*

Preuve. *On a:* $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n = l$ *et f une fonction continue*

$\lim\limits_{n\to+\infty} f(u_n) = f\left(\lim\limits_{n\to+\infty} u_n \right) = f(l)$.

et on a: $\lim\limits_{n\to+\infty} f(u_n) = \lim\limits_{n\to+\infty} u_{n+1} = l$ *donc $f(l) = l$.* ■

1.12.2 *Monotone*

L'étude de la monotonie de la suite récurrente revient à celle de la fonction.

***1^er Cas: f croissante*:**

Soit (u_n) une suite récurrente définie par u_0 et $\forall n \in \mathbb{N}, u_{n+1} = f(u_n)$.

Si la fonction f est croissante alors la suite (u_n) est monotonie et on a:

- *(u_n) est croissante si $f(u_0) \geq u_0$ $(u_1 \geq u_0)$.*
- *(u_n) est décroissante si $f(u_0) \leq u_0$ $(u_1 \leq u_0)$.*

Exemple 1.12.2 *: $u_0 = 1$ et $u_{n+1} = \sqrt{2 + u_n}$.*

On a: $f(x) = \sqrt{2 + x}$; $D_f = [-2, +\infty[$.

f est une fonction continue sur D_f et strictement croissante donc (u_n) est monotone.

on a: $u_1 = f(u_0) = f(1) = \sqrt{3}$ donc (u_n) est croissante.

***2^ème Cas: f décroissante*:**

Si f décroissante alors $u_{n+1} - u_n$ est alternativement positif et négatif.

Posons $g = f \circ f$, la fonction g est croissante

et on a: $u_{n+2} = f(u_{n+1}) = f(f(u_n)) = g(u_n)$.

Les suites (u_{2n}) et (u_{2n+1}) sont définies par

$$\begin{cases} u_{2n+2} = f(u_{2n+1}) = f(f(u_{2n})) = g(u_{2n})\,; & u_2 = f(u_1)\,. \\ u_{2n+3} = f(u_{2n+2}) = f(f(u_{2n+1})) = g(u_{2n+1})\,; & u_1 = f(u_0)\,. \end{cases}$$

donc ce cas (u_{2n}) et (u_{2n+1}) sont monotones. Alors (u_n) convergente si et seulement si (u_{2n}) et (u_{2n+1}) convergent vers la même limite.

1.13 *Suites de Cauchy*

Définition 1.13.1 *: Soit (u_n) une suite numérique, on dit que (u_n) est une suite de **Cauchy** si elle possède la propriété suivante:*

$$\forall \varepsilon > 0, \exists N \in \mathbb{N}; \forall p, q \in \mathbb{N} : \forall p, q > N \Longrightarrow |u_p - u_q| < \varepsilon.$$

Remarque 1.13.1 *: On dit que (u_n) n'est pas une suite de Cauchy si*

$$\exists \varepsilon > 0, \forall N \in \mathbb{N}; \exists p, q \in \mathbb{N} : p, q \geq N \text{ et } |u_p - u_q| \geq \varepsilon.$$

Théorème 1.13.1 *:*

Toute suite convergente est une suite de Cauchy.

i.e: (u_n) *convergente* $\Longrightarrow (u_n)$ *suite de Cauchy.*

Preuve.

Soit (u_n) *une suite numérique convergente vers la limite* l $(l \in \mathbb{R})$

$$\Longleftrightarrow \forall \varepsilon > 0, \exists N \in \mathbb{N}; \forall n > N \Longrightarrow |u_n - l| < \varepsilon$$

donc $\forall p, q \in \mathbb{N}; p, q > N : |u_p - l| < \dfrac{\varepsilon}{2}$ *et* $|u_q - l| < \dfrac{\varepsilon}{2}$.

$$\begin{aligned} \forall p, q \in \mathbb{N} : |u_p - u_q| &= |u_p - l - u_q + l| \\ &\leq |u_p - l| + |u_q - l| \\ &\leq \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{2} = \varepsilon \end{aligned}$$

donc (u_n) *est une suite de Cauchy.* ■

Remarque 1.13.2 *:* (u_n) *n'est pas une suite de Cauchy* $\Longrightarrow (u_n)$ *est divergente.*

Exemple 1.13.1 *:* $u_n = \displaystyle\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k}; \quad \forall n \in \mathbb{N}^*$

$$\begin{aligned} \exists p = 2N, q = N : |u_p - u_q| &= |u_{2N} - u_N| \\ &= \left| \sum_{k=1}^{2N} \frac{1}{k} - \sum_{k=1}^{N} \frac{1}{k} \right| \\ &= \left| \sum_{k=1}^{N} \frac{1}{k} + \sum_{k=N+1}^{2N} \frac{1}{k} - \sum_{k=1}^{N} \frac{1}{k} \right| \\ &= \left| \sum_{k=N+1}^{2N} \frac{1}{k} \right| = \left| \frac{1}{N+1} + \frac{1}{N+2} + ... + \frac{1}{2N} \right| \\ &\geq \underbrace{\frac{1}{2N} + \frac{1}{2N} + ... + \frac{1}{2N}}_{N \text{ fois}} \\ &\geq \frac{1}{2N} \times N = \frac{1}{2} \end{aligned}$$

donc $\exists \varepsilon = \dfrac{1}{2}; |u_p - u_q| \geq \varepsilon \Longrightarrow (u_n)$ *est divergente.*

Proposition 1.13.1 *: Si* (u_n) *est une suite de Cauchy alors* (u_n) *est bornée.*

Preuve. *: Soit (u_n) est une suite de Cauchy*

$$\forall \varepsilon > 0, \exists N \in \mathbb{N}; \forall p, q \in \mathbb{N} : \forall p, q > N \Longrightarrow |u_p - u_q| < \varepsilon$$

prendre par exemple $\varepsilon = 1$ qui vérifie:

$$\forall p, q \in \mathbb{N} : p, q > N \Longrightarrow |u_p - u_q| < 1$$

alors: $\quad \forall p > 0, \exists N \in \mathbb{N}; \forall p > N \Longrightarrow |u_p - u_N| < 1$

On pose $k = \sup \{1, |u_0 - u_N|, |u_1 - u_N|, ..., |u_{N-1} - u_N|\}$

alors $\forall n \in \mathbb{N} : |u_n - u_N| < k$

mais $\forall n \in \mathbb{N} : |u_n| < |u_n - u_N + u_N| \leq |u_n - u_N| + |u_N| \leq k + |u_N|$.

Alors (u_n) est une suite bornée. ■

Théorème 1.13.2 *: **(théorème de Bolzano-Weierstrass)***

Toute suite bornée de nombres réels admet une sous suite convergente.

Théorème 1.13.3 *: **(critère de Cauchy)***

Une suite numérique (u_n) est convergente si et seulement si elle est une suite de Cauchy.

i.e: (u_n) *convergente* $\Longleftrightarrow (u_n)$ *est une suite de Cauchy.*

Preuve.

1. $\Longrightarrow$) *déjà démontré.*

   $\Longleftarrow$)

   Soit (u_n) est une suite de Cauchy alors:

$$\forall \varepsilon > 0, \exists N \in \mathbb{N}; \forall p, q \in \mathbb{N} : p, q > N \Longrightarrow |u_p - u_q| < \varepsilon$$

donc (u_n) est une suite bornée (d'après la proposition précédente).

Nous pouvons donc extraire une sous suite convergente;, notons l la limite de cette sous suite donc $\exists p > N$ tel que u_p soit un terme de cette sous suite vérifiant:

$$|u_p - l| < \frac{\varepsilon}{2}.$$

Alors

$$\begin{aligned}\forall n \geq N : |u_n - l| &= |u_n - l + u_p - u_p| \\ &\leq |u_n - u_p| + |u_p - l| \\ &\leq \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{2} = \varepsilon\end{aligned}$$

donc (u_n) *est convergente.* ■

1.14 *Suite arithmétique et suite géométrique*

Suite arithmétique:

Définie par $\forall n \in \mathbb{N} : u_{n+1} = u_n + r$, *l'élément donné* u_0 *était son premier terme et le paramètre* $r \in \mathbb{R}$ *est la raison de la suite. Pour les suites arithmétiques on démontre que:*

1) $\forall n \in \mathbb{N} : u_n = u_0 + nr.$

2) $\forall n, p \in \mathbb{N} : u_n = u_p + (n-p)\, r.$

3) $\forall n \in \mathbb{N} : \sum_{k=0}^{n} u_k = (u_0 + u_n) \dfrac{n+1}{2};$

$$\left(\forall p \in \mathbb{N}, n \geq p : \sum_{k=p}^{n} u_k = (u_p + u_n) \frac{(n-p+1)}{2} \right).$$

Suite géométrique:

Définie par $\forall n \in \mathbb{N} : u_{n+1} = q.u_n$, *l'élément donné* u_0 *était son premier terme et le paramètre* $q \in \mathbb{R}$ *est la raison de la suite. Pour les propriétés, rappelons que:*

1) $\forall n \in \mathbb{N} : u_n = u_0.q^n.$

2) $\forall n, p \in \mathbb{N} : u_n = u_p.q^{n-p}.$

3) $\forall n \in \mathbb{N} : \sum_{k=0}^{n} u_k = u_0 \left(\dfrac{1-q^{n+1}}{1-q} \right);$

$$\left(\forall p \in \mathbb{N}, n \geq p : \sum_{k=p}^{n} u_k = u_p \left(\frac{1-q^{n-p+1}}{1-q} \right) \right).$$