المركـز الجامعي عبد الحفيظ بوالصوف ميلـة
معهد العلوم الاقتصادية والتجارية وعلوم التسيير
رياضيات 1

السنة الجامعية 2023/2022
سنة أولى جدع مشترك

سلسلة رقم 2

التمرين الأول

نعتبر المتتالية $(U_n)_n$ المعرفة كما يلي

$$\begin{cases} U_1 = \dfrac{1}{5} \\ U_{n+1} = \dfrac{n+1}{5n} U_n \quad , \quad n \geq 2 \end{cases}$$

نضع من أجل $n \in \mathbb{N}^*$, $V_n = \frac{U_n}{n}$

1 / برهن أن V_n متتالية هندسية يطلب تعيين أساسها وحدها الأول

2 / أوجد عبارة U_n بدلالة n

ليكن $S_n = \sum_{k=1}^{n} V_k$

أ/ أوجد S_n بدلالة n

ب/ إستنتج المجموع $\sum_{n=1}^{+\infty} V_n$

التمرين الثاني

لتكن V_n متتالية معرفة كما يلي

$$\begin{cases} V_0 = 0 \\ \forall\, n \in \mathbb{N}^*, \quad S_n = V_0 + V_1 + V_2 + \cdots + V_n = \frac{n^2-1}{4} \end{cases}$$

1 / عين الحد العام لـ V_n

2 / أتبث أن V_n متتالية حسابية

التمرين الثالث

ليكن $a > 0$ نعرف المتتالية $(U_n)_{n\geq 0}$ بـ $U_0 > 0$ و بالعلاقة

$$U_{n+1} = \frac{1}{2}\left(U_n + \frac{a}{U_n}\right)$$

هدفنا هو البرهنة أن نهاية المتتالية (U_n) هي $\sqrt{2}$

1 / برهن أن

$$U_{n+1}^2 - a = \frac{(U_n^2 - a)^2}{4U_n^2}$$

2 / برهن أنه من أجل $n \geq 1$ فإن $U_n \geq \sqrt{a}$ و أن المتتالية $(U_n)_{n\geq 1}$ متناقصة

3/ إستنتج أن المتتالية (U_n) متقاربة نحو $\sqrt{a}$

4/ بإستعمال العلاقة $U_{n+1}^2 - a = \left(U_{n+1} - \sqrt{a}\right)\left(U_{n+1} + \sqrt{a}\right)$ أوجد حصر من الأعلى لـ $U_{n+1} - \sqrt{a}$ بدلالة $U_n - \sqrt{a}$

5/ إذا كان $U_n - \sqrt{a} \leq k$ من أجل $n \geq 1$ برهن أن

$$U_n - \sqrt{a} \leq 2\sqrt{a}\left(\frac{k}{2\sqrt{a}}\right)^{2^{n-1}}$$