Université Abdelhafid Boussouf - Mila
Institut des Sciences et de la Technologie
Département des Mathématiques et informatique

$2022-2023$

Algèbre 3

Série no 2 **: Diagonalisation**

Exercice 1. *Soit E un espace vectoriel de base* $B = \{e_1, e_2, e_3\}$. f *un endomorphisme de E tels que :*

$$f(e_1) = 5e_1 + 6e_2 + 4e_3, f(e_1) = -3e_1 - 4e_2 - 4e_3, f(e_1) = 2e_1 + 4e_2 + 5e_3$$

Montrer que f *est diagonalisable, trouver une base de E formée de vecteurs propres de* f *et écrire la matrice de* f *dans cette base.*

Exercice 2. *Soit* f *un endomorphisme de* $\mathbb{R}^4$ *dont la matrice par rapport à la base canonique* $B = (e_1, e_2, e_3, e_4)$ *est* $A = (a_{i,j})$ *où* $a_{i,j} = 1$ *pour tout i et pour tout j compris entre* 1 *et* 4.

1. *Montrer sans calculer le polynôme caractéristique que* 0 *est valeur propre de* f.

2. *Montrer que le vecteur* $v = e_1 + e_2 + e_3 + e_4$ *est un vecteur propre de* f.

Exercice 3. ***1.*** *Soit I la matrice identité de* $M_{n,n}$, *déterminer ses vecteurs propres et ses valeurs propres.*

2. *Déterminer les vecteurs propres et les valeurs propres de la matrice*

$$A = \begin{pmatrix} 3 & 0 & 0 \\ 0 & 5 & 0 \\ 0 & 0 & 6 \end{pmatrix}$$

3. *Montrer que : A non inversible* $\Leftrightarrow$ 0 *est valeur propre de A.*

Exercice 4. *Soit A la matrice suivante*

$$A = \begin{pmatrix} 3 & 0 & -1 \\ 2 & 4 & 2 \\ -1 & 0 & 3 \end{pmatrix}$$

1. *Déterminer et factoriser le polynôme caractéristique de A.*

2. *Démontrer que A est diagonalisable et déterminer une matrice D diagonale et une matrice P inversible telles* $A = PDP^{-1}$.

3. *Calculer* A^n *pour* $n \in \mathbb{N}$.

Exercice 5. *Soit m un nombre réel et fm l'endomorphisme de* $\mathbb{R}^4$ *dont la matrice dans la base canonique de* $\mathbb{R}^4$ *est*

$$A_m = \begin{pmatrix} 2m-5 & 1 & 1 & 4-m \\ 0 & m & 0 & 0 \\ 5-m & -1 & m-1 & m-4 \\ 2m-10 & 2 & 2 & 8-m \end{pmatrix}$$

Étudier suivant les valeurs de m si la matrice A_m *est diagonalisable.*