CENTRE UNIVERSITAIRE ABDELHAFID BOUSSOUF-MILA

MODULE : STRUCTURE MACHINE 1

CHAPITRE 2

LES SYSTÈMES DE NUMÉRATION

ENSEIGNÉ PAR : BOUMASSATA MERIEM

2022/2023

1. Définition

- Nous avons pris l'habitude de représenter les nombres en utilisant dix symboles différents : 0 , 1 , 2 , 3 , 4 , 5 , 6 , 7 , 8 , 9
- Ce système est appelé le système décimal (déci signifie dix).
- Il existe cependant d'autres formes de numération qui fonctionnent en utilisant un nombre de symboles distincts.

➢ Exemples :

- Système binaire (bi : deux),
- Système octal (oct : huit),
- Système hexadécimal (hexa : seize).

- En fait, on peut utiliser n'importe quel nombre de symboles différents (pas nécessairement des chiffres).
- Dans un système de numération : le nombre de symboles distincts est appelé la base du système de numération.

1. Définition (Suite)

- Un Système de numération décrit la façon avec laquelle les nombres sont représentés.
- Un système de numération est défini par :

  - Un alphabet A : ensemble de symboles ou chiffres,

  - Des règles d'écritures des nombres : Juxtaposition de symboles.

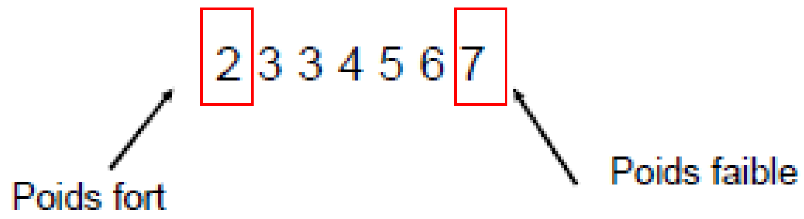
2. Présentation de quelques systèmes de numération

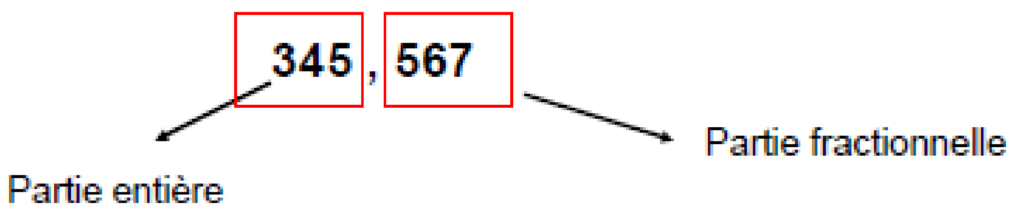
a) Le système décimal (système à base 10)

- L'alphabet du système décimal est composé de dix chiffres différents :

  A = {0,1,2,3,4,5,6,7,8,9}

- N'importe quelle combinaison des symboles {0,1,2,3,4,5,6,7,8,9} nous donne un nombre.





2. Présentation de quelques systèmes de numération (Suite)

a) Le système décimal (Suite)

- **Développement en polynôme d'un nombre dans le système décimal**

- Soit le nombre 1978, ce nombre peut être écrit sous la forme suivante :

$$1978 = 1000 + 900 + 70 + 8$$

$$1978 = 1 * 1000 + 9 * 100 + 7 * 10 + 8 * 1$$

$$1978 = 1 * 10^3 + 9 * 10^2 + 7 * 10^1 + 8 * 10^0$$

- Cette forme s'appelle la forme polynomiale.
- Un nombre réel peut être écrit aussi sous la forme polynomiale :

$$1978,265 = 1*10^3 + 9*10^2 + 7*10^1 + 8*10^0 + 2*10^{-1} + 6*10^{-2} + 5*10^{-3}$$

2. Présentation de quelques systèmes de numération (Suite)

a) Le système décimal (Suite)

- **Comptage en décimal**

• Sur une seule position : 0 ,1, 2, 3, 4, 5, …, 9

• Sur deux positions : 00 , 01, 02, …, 99

• Sur trois positions 000, 001,…, 999

....

• Sur **n** positions :

minimum : 0

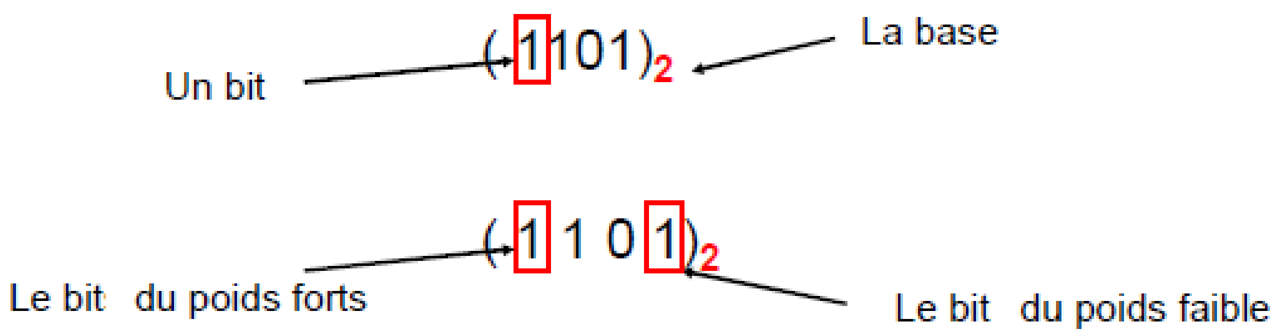
maximum : 10^n-1

nombre de combinaisons : 10^n

2. Présentation de quelques systèmes de numération (Suite)

b) Le système binaire (système à base 2)

- Dans le système binaire, pour exprimer n'importe quelle valeur on utilise uniquement 2 symboles : **{ 0 , 1 }**



- Un nombre dans la base 2 peut être écrit aussi sous la forme polynomiale :

$(1110)_2 = 1 * 2^3 + 1 * 2^2 + 1 * 2^1 + 0 * 2^0$

$(1110{,}001)_2 = 1*2^3 + 1*2^2 + 1*2^1 + 0*2^0 + 0*2^{-1} + 0*2^{-2} + 1*2^{-3} = (14{,}125)_{10}$

2. Présentation de quelques systèmes de numération (Suite)

b) Le système binaire (Suite)

- **Comptage en binaire**

Sur un seul bit : 0 , 1

Sur 2 bits :

Binaire	Décimal
00	0
01	1
10	2
11	3

4 combinaisons= 2^2

Sur 3 Bits

Binaire	Décimal
000	0
001	1
010	2
011	3
100	4
101	5
110	6
111	7

8 combinaisons= 2^3

2. Présentation de quelques systèmes de numération (Suite)

c) Le système octal (système à base 8)

- 8 symboles sont utilisés dans ce système : **{ 0 , 1 , 2 , 3 , 4 , 5 , 6 , 7 }**
- Exemples de forme polynomiale :

$(127)_8 = 1 * 8^2 + 2 * 8^1 + 7 * 8^0$

$(127,65)_8 = 1 * 8^2 + 2 * 8^1 + 7 * 8^0 + 6 * 8^{-1} + 5 * 8^{-2}$

- Remarque : Le nombre (1289), par exemple, n'existe pas dans la base 8 puisque les symboles 8 et 9 n'appartiennent pas à la base.

2. Présentation de quelques systèmes de numération (Suite)

c) Le système hexadécimal (système à base 16)

- On utilise 16 symboles différents **:**

{0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, A, B, C, D, E, F}

- Exemples de forme polynomiale :

$(A4C)_{16} = 12 * 16^0 + 4 * 16^1 + 10 * 16^2$

$(14,2B)_{16} = 4 * 16^0 + 1 * 16^1 + 2 * 16^{-1}+11 * 16^{-2}$

Décimal	Hexadécimal
0	0
1	1
2	2
3	3
4	4
5	5
6	6
7	7
8	8
9	9
10	A
11	B
12	C
13	D
14	E
15	F

2. Présentation de quelques systèmes de numération (Suite)

d) Généralisation : Le système à base b

- Dans une base b , on utilise b symboles distincts pour représenter les nombres.
- La valeur de chaque symbole doit être strictement inférieure à la base b.
- Chaque nombre dans une base b peut être écrit sous sa forme polynomiale :

$$\mathbf{N_b = a_{n-1}.b^{n-1} + a_{n-2}.b^{n-2} + \ldots + a_0.b^0 = N_{10}}$$

- $N_b = a_{n-1}\, a_{n-2}\ \ldots\ a_1\ a_0$: représentation en base b sur n chiffres.
- a_i : est un chiffre de l'alphabet de poids i (position i).
- a_0 : chiffre de poids 0 appelé le chiffre de poids faible.
- a_{n-1} : chiffre de poids n-1 appelé le chiffre de poids fort.

3. Transcodage (Conversion de base)

- Le transcodage (ou conversion de base) est l'opération qui permet de passer de la représentation d'un nombre exprimé dans une base à la représentation du même nombre mais exprimé dans une autre base.

3. Transcodage (Suite)

a) Conversion d'une base b à la base 10

- Cette conversion est assez simple puisque il suffit de faire le développement en polynôme de ce nombre dans la base b, et de faire la somme par la suite.
- Exemples :

$(1101)_2 = 1 * 2^0 + 0 * 2^1 + 1 * 2^2 + 1 * 2^3 = (13)_{10}$

$(1A7)_{16} = 7 * 16^0 + 10 * 16^1 + 1 * 16^2 = (423)_{10}$

$(1101{,}101)_2 = 1*2^0 + 0*2^1 + 1*2^2 + 1*2^3 + 1*2^{-1} + 0*2^{-2} + 1*2^{-3} = (13{,}625)_{10}$

$(43{,}2)_5 = 3 * 5^0 + 4 * 5^1 + 2 * 5^{-1} = (23{,}4)_{10}$

3. Transcodage (Suite)

b) Conversion du décimal à une base b

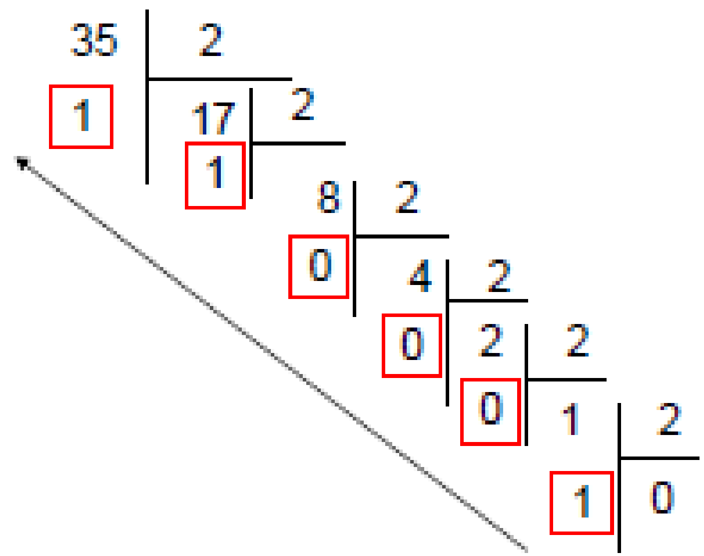
- Dans le cas d'un nombre entier : Le principe consiste à faire des divisions successives du nombre sur b , et prendre le reste des divisions dans l'ordre inverse.
- Dans le cas d'un nombre réel :
  - Un nombre réel est constitué de deux parties : la partie entière (P.E) et la partie fractionnelle (P.F).
  - La partie entière est transformée en effectuant des divisions successives.
  - La partie fractionnelle est transformée en effectuant des multiplications successives par b.

3. Transcodage (Suite)

b) Conversion du décimal à une base b (Suite)

- Exemples de conversions de la base 10 à la base 2 :

- Exemple 1 : $(35)_{10}=(?)_2$



Après division :

on obtient : $(35)_{10}= (100011)_2$

3. Transcodage (Suite)

b) Conversion du décimal à une base b (Suite)

- **Exemples de conversions de la base 10 à la base 2 (Suite) :**

➢ Exemple 2 (cas d'un nombre réel) : $(35{,}625)_{10}=(?)_2$

P.E = 35 = $(100011)_2$

P.F = 0,625 = $(?)_2$

$$0{,}625 * 2 = \boxed{1}{,}25$$
$$0{,}25 * 2 = \boxed{0}{,}5$$
$$0{,}5 * 2 = \boxed{1}{,}0$$

$(0{,}625)_{10} = (0{,}101)_2$

Donc $(35{,}625)_{10}=(100011{,}101)_2$

3. Transcodage (Suite)

b) Conversion du décimal à une base b (Suite)

- **Exemples de conversions de la base 10 à la base 2 (Suite) :**

➢ Exemple 3 (cas d'un nombre réel) : $(0,6)_{10}=(?)_2$

$$0,6 * 2 = 1,2$$
$$0,2 * 2 = 0,4$$
$$0,4 * 2 = 0,8$$
$$0,8 * 2 = 1,6$$

$\longrightarrow$ $(0,6)= (0,1001)_2$

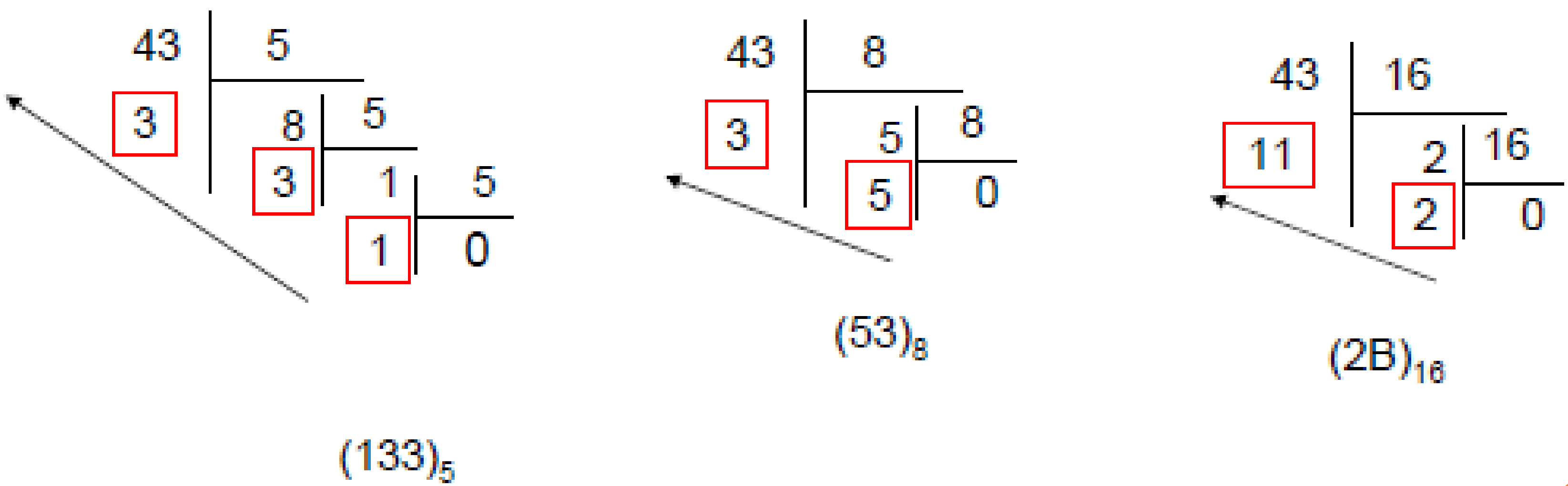
Remarque : Le nombre de bits après la virgule va déterminer la précision .

3. Transcodage (Suite)

b) Conversion du décimal à une base b (Suite)

- **Exemples de conversions de la base 10 à une base b :**

$(43)_{10} = (?)_5 = (?)_8 = (?)_{16}$



3. Transcodage (Suite)

c) Conversion de la base octale à la base binaire

- En octal, chaque symbole de la base s'écrit sur 3 bits en binaire.
- L'idée de base est de remplacer chaque symbole dans la base octale par sa valeur en binaire sur 3 bits (faire des éclatements sur 3 bits).

Octal	Binaire
0	000
1	001
2	010
3	011
4	100
5	101
6	110
7	111

- Exemples :

  $(345)_8=(011\ 100\ 101)_2$

  $(65,76)_8=(110\ 101,\ 111\ 110)_2$

  $(35,34)_8=(011\ 101\ ,\ 011\ 100)_2$

- Remarque : Le remplacement se fait de droite à gauche pour la partie entière et de gauche à droite pour la partie fractionnelle.

3. Transcodage (Suite)

d) Conversion de la base binaire à la base octale

- L'idée de base est de faire des regroupements de 3 bits à partir du poids faible.
- Par la suite remplacer chaque regroupement par la valeur octale correspondante .
- Exemples :

$(11001010010110)_2$=$(011\ 001\ 010\ 010\ 110)_2$=$(31226)_8$

$(110010100{,}10101)_2$ = $(110\ 010\ 100\ ,\ 101\ 010)_2$ =$(624{,}52)_8$

- Remarque : Le regroupement se fait de droite à gauche pour la partie entière et de gauche à droite pour la partie fractionnelle.

3. Transcodage (Suite)

e) Conversion de la base hexadécimale à la base binaire

- En Hexadécimal, chaque symbole de la base s'écrit sur 4 bits.
- L'idée de base est de remplacer chaque symbole par sa valeur en binaire sur 4bits (faire des éclatements sur 4bits).
- Exemples :

$(757F)_{16} = (0111\ 0101\ 0111\ 1111)_2$

Décimal	Hexadécimal
0	0
1	1
2	2
3	3
4	4
5	5
6	6
7	7
8	8
9	9
10	A
11	B
12	C
13	D
14	E
15	F

$(BA3,5F7)_{16} = (1011\ 1010\ 0011,\ 0101\ 1111\ 0111)_2$

3. Transcodage (Suite)

f) Conversion de la base binaire à la base hexadécimale

- L'idée de base est de faire des regroupements de 4 bits à partir du poids faible.
- Exemples :

$(11001010100110)_2=(0011\ 0010\ 1010\ 0110)_2= (32A6)_{16}$

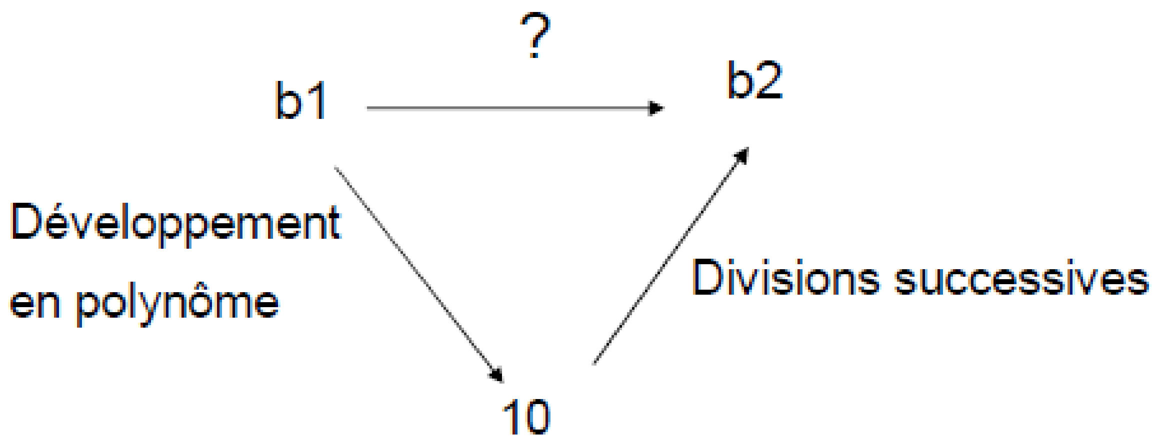
$(110010100,10101)_2= (0001\ 1001\ 0100,1010\ 1000)_2=(194,A8)_2$

- Remarque : Le regroupement se fait de droite à gauche pour la partie entière et de gauche à droite pour la partie fractionnelle.

3. Transcodage (Suite)

g) Conversion d'une base b1 à une base b2

- Il n'existe pas de méthode pour passer d'une base b1 à une autre base b2 directement.
- L'idée est de convertir le nombre de la base b1 à la base 10 , en suite convertir le résultat de la base 10 à la base b2 .



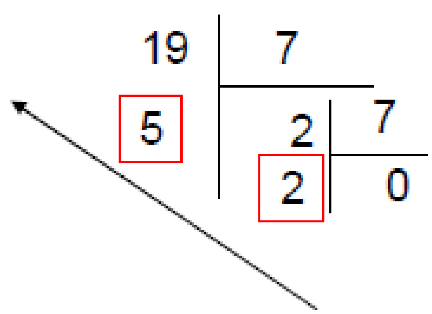
3. Transcodage (Suite)

g) Conversion d'une base b1 à une base b2 (Suite)

- Exemples :

$(34)_5 = (?)_7$

$(34)_5 = 3 * 5^1 + 4 * 5^0 = 15 + 4 = (19)_{10} = (?)_7$



$(19)_{10} = (25)_7$

$(34)_5 = (25)_7$

4. Opérations de base dans le système binaire

- On peut évidemment effectuer les quatre opérations arithmétiques fondamentales (addition, soustraction, multiplication et division) non seulement dans le système décimal mais aussi dans les autres systèmes numériques et en particulier dans le système binaire ; les règles du système décimal seront valables pour ces opérations.

4. Opérations de base dans le système binaire (Suite)

a) Addition

- Pour additionner deux nombres binaires, on procède de la même façon que dans l'arithmétique des nombres décimaux.
- Dans ce cas, on aura la retenue **"1"** à gauche à chaque fois que la somme dépasse **2**.
- Exemple 1 :

```
        1   1 1 1      Retenues
    1 1 0 0 1 0 1 1 1  Premier terme
+       1 0 1 0 0 1 1  Second terme
    -----------------
    1 1 1 1 0 1 0 1 0  Somme
```

4. Opérations de base dans le système binaire (Suite)

a) Addition (Suite)

- Exemple 2 :

	1 0 1 1	Retenues
	1 0 1	Premier terme
+	1 1 1	Second terme
+	1	Troisième terme
+	1 1 0	Quatrième terme
	1 0 0 1 1	Somme

- On notera que, dans la troisième colonne, on a l'addition suivante :

  1 + 1 + 1 + 1 avec retenue de **10**.

- Dans ce genre de cas, la dernière retenue consiste à mettre **"0"** dans la première colonne située immédiatement à gauche et **"1"** dans celle qui suit.

4. Opérations de base dans le système binaire (Suite)

b) Soustraction

- Cette opération peut aussi être faite selon les règles arithmétiques traditionnelles.
- Quand la quantité à soustraire est supérieure à la quantité dont on soustrait, on emprunte **1** au voisin de gauche. En binaire, ce **1** ajoute **2** à la quantité dont on soustrait, tandis qu'en décimal il ajoute **10**.
- Exemple :

$$
\begin{array}{cccccccccccc}
 & 1 & 0 & 1 & 1 & 1 & 0 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 \\
- & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 0 & 0 & 1 & 1 & 1 \\
\hline
 & 1 & 0 & 1 & 0 & 1 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1
\end{array}
$$

4. Opérations de base dans le système binaire (Suite)

c) Multiplication

- La multiplication, comme les opérations précédentes, se calcule toujours selon les règles arithmétiques traditionnelles.
- Exemple :

```
              1 0 1 1 0 0 1 0 1
x                       1 0 1 1
              -----------------
              1 0 1 1 0 0 1 0 1
+           1 0 1 1 0 0 1 0 1
+         0 0 0 0 0 0 0 0 0
+       1 0 1 1 0 0 1 0 1
        -----------------------
        1 1 1 1 0 1 0 1 0 1 1 1
```

4. Opérations de base dans le système binaire (Suite)

d) Division

- La division binaire s'effectue à l'aide de soustractions et de décalages, comme la division décimale, sauf que les digits du quotient ne peuvent être que 1 ou 0. Le bit du quotient est 1 si on peut soustraire le diviseur, sinon il est 0.

- Exemple :

```
   1 1 1 1 0 1 0 | 1 0 1 1
 - 1 0 1 1       |---------
   -----------   | 1 0 1 1
     1 0 0 0     |
 -   0 0 0 0     |
     ---------   |
     1 0 0 0 1   |
 -     1 0 1 1   |
       -------   |
         1 1 0 0 |
 -       1 0 1 1 |
         ------- |
       reste : 1 |
```

5. Exemples d'opérations arithmétiques dans les différents systèmes

a) Addition en Octal

- L'addition s'effectue comme en décimal, sauf qu'on génère une retenue lorsqu'une somme partielle dépasse **8** au lieu de **10**.
- Exemple :

	1		1		Retenues
		3	2	6	Premier terme
+		7	3	5	Second terme
	1	2	6	3	Somme

5. Exemples d'opérations arithmétiques dans les différents systèmes (Suite)

b) Addition en Hexadécimal

- L'addition s'effectue comme en décimal, sauf que qu'on génère une retenue lorsqu'une somme partielle dépasse **16** au lieu de **10**.
- Exemple :

		1	1		Retenues
	3	A	D	2	Premier terme
+	B	0	F	F	Second terme
	E	B	D	1	Somme

5. Exemples d’opérations arithmétiques dans les différents systèmes (Suite)

c) Soustraction en Octal

- Même chose vaut pour la soustraction. Quand le nombre du bas dépasse celui du haut, on fait un emprunt au chiffre de gauche et on ajoute **8** au nombre du haut :
- Exemple :

	5 2 4	Premier terme
-	2 6 3	Second terme
	2 4 1	Différence

5. Exemples d'opérations arithmétiques dans les différents systèmes (Suite)

d) Soustraction en Hexadécimal

- Quand le nombre du bas dépasse celui du haut, on fait un emprunt au chiffre de gauche et on ajoute **16** au nombre du haut :
- Exemple :

	5	E	2	Premier terme
-	3	D	A	Second terme
	2	0	8	Différence