Série N 1

Exercice 1:

1. Mettre le système différentiel: $\begin{cases} \ddot{u} = a\dot{u} + bu + c\dot{v} + dv \\ \ddot{v} = e\dot{v} + fv + g\dot{u} + hu \end{cases}$
   sous la forme d'un système linéaire $\dot{x} = A.x$, où x est un vecteur de dimension n convenable et A une matrice carée $n \times n$.

2. Mettre le système différentiel (non autonome): $\begin{cases} \ddot{u} = a\dot{u} + bu + c\dot{v} + dv + \alpha(t) \\ \ddot{v} = e\dot{v} + fv + g\dot{u} + hu + \beta(t) \end{cases}$
   sous la forme d'un système autonome $\dot{x} = f(x)$, où x est un vecteur de dimension convenable.

3. Mettre le système différentiel: $\begin{cases} \dot{u} = uv - \sin(u)\cos(v) = h(u,v) \\ \ddot{v} = u\dot{v} + 2uv + u^3\dot{v} + e^v = k(u,v,\dot{v}) \end{cases}$
   sous la forme d'un système $\dot{x} = g(x)$, où x est un vecteur de dimension convenable.

Exercice 2:

Tracer les portraits de phases des systémes suivants, dont l'état est défini sur $\Omega \subset \mathbb{R}^n$:

1. **Croissance d'une population** : en environnement infini, une population x croît selon $\dot{x} = \alpha x$, où $\alpha > 0$ (croissance malthusienne).
   Si lenvironnement est fini (aire, ressources, ...), la population x ne peut pas dpasser une certaine valeur. Moyennant un choix convenable des unités, elle satisfait l'**équation logistique** proposée par l'économiste Franois Verhulst $\dot{x} = x(1-x)$, avec $\Omega =]0,1[$. On tracera le portrait de phases de l'équation logistique sans la résoudre analytiquement, avec $\Omega \subset \mathbb{R}$ (noter que seul $\Omega \subset \mathbb{R}_+$ a une interprétation démographique).

2. **Un système unidemensionnel:**

   $$\dot{x} = x(x-1)(x-2)(x-3)(x-4) \text{ avec } \Omega \subset \mathbb{R}$$

3. **Deux système bidimensionnels:**[avec $z = \binom{x}{y}$]:
   a) $\dot{z} = \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & -2 \end{pmatrix} z$, avec $\Omega \subset \mathbb{R}^2$
   b) $\dot{z} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} z$, avec $\Omega \subset \mathbb{R}^2$

4. **Un système 2-D**: $\begin{pmatrix} \dot{\rho} \\ \dot{\theta} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \rho(1-\rho) \\ 1 \end{pmatrix}$ (représentation dans $\mathbb{R}^2$, en coordonées polaires.)

Exercice 3:

Considérons le système différentiel nonliéaire suivant

$$\begin{cases} \dot{x} = -x \\ \dot{y} = -y + x^2 \\ \dot{z} = z + x^2 \end{cases} \tag{1}$$

1. Déterminer les points d'équilibres de (1).
2. Etudier la stabilité et déterminer les sous espaces E^s et E^u.
3. Résoudre le système (1) analytiquement, et déterminer les variétés invariantes W^s et W^u.

Exercice 4:

Considérons le système

$$\begin{cases} \dot{x} = -2y + yz \\ \dot{y} = x - xz \\ \dot{z} = xy \end{cases} \tag{2}$$

1. Trouver les points fixes de (2).
2. Donner le système linéarisé du système (2) au voisinage de $(0,0,0)$, que peut on dire sur la stbilité de l'origine ?
3. Etudier la stabilité de l'origine en utilisant la fonction de Lyapunov $V(x) = ax^2 + by^2 + cz^2$, (avec a, b, c des constants à déterminer).