**Université Abdelhafid Boussouf - Mila** 2022 – 2023
**Institut des Sciences et de la Technologie**
**Département des Mathématiques et informatique** **Algèbre** 3

**Série no 1 : Révision**

**Exercice 1.** *soit*

$$f: \begin{array}{ccc} \mathbb{R}[X] & \longrightarrow & \mathbb{R}[X] \\ P & \longmapsto & P - XP' \end{array}$$

*1. Montrer que est une application linéaire.*

*2. Déterminer son noyau et son image.*

**Exercice 2.** *Pour tout réel m, soit l'application $f : \mathbb{R}^3 \longrightarrow \mathbb{R}^4$ définie par :*

$$f(x,y,z) = (x - y + z, mx - 2y + mz, -x + y, -mx + my - mz)$$

***1.*** *Montrer que $f$ est linéaire.*

***2.*** *Déterminer une base du noyau de $f$. Pour quelle valeur de $m$ l'application $f$ est-elle injective ? $f$ est-elle bijective ?*

***3.*** *Déterminer une base de l'image de $f$.*

**Exercice 3.** *Soit $f : \mathbb{R}^3 \longrightarrow \mathbb{R}^2$ une application linéaire telle que :*

$$(1,2,0) \in \mathrm{Ker}(f), \quad f(0,0,1) = (1,0), \quad f(0,t,0) = (t,t)\ \forall t \in \mathbb{R}.$$

***1.*** *Déterminer $f(x,y,z)$.*

***2.*** *Trouver une base et la dimension du $\mathrm{Ker}(f)$ et $\mathrm{Im}(f)$.*

***3.*** *Trouver l'ensemble des vecteurs dont l'image est le vecteur $(0,1)$. Est - il un sous espace vectoriel de $\mathbb{R}^3$ ?*

**Exercice 4.** *Écrire les matrices des applications linéaire suivantes dans les bases canoniques :*

$$f_1: \begin{array}{ccc} \mathbb{R}^3 & \longrightarrow & \mathbb{R}^3 \\ (x,y,z) & \longmapsto & (x + 2y + 3z, 2y - z, x + z). \end{array}$$

$$f_2: \begin{array}{ccc} \mathbb{R}_2[X] & \longrightarrow & \mathbb{R}_3[X] \\ P & \longmapsto & XP - P' + P(1). \end{array}$$

$$f_3: \begin{array}{ccc} \mathbb{R}_3[X] & \longrightarrow & \mathbb{R}^3 \\ P & \longmapsto & (P(1), P'(1) + P(2), P''(2) + P'(-1)). \end{array}$$

**Exercice 5.** *On considère les matrices suivantes*

$$A = \begin{pmatrix} -1 & 2 & 0 \\ -1 & 1 & 4 \end{pmatrix} \quad \textit{and} \quad B = \begin{pmatrix} 3 & 0 & -1 \\ -6 & 1 & 3 \end{pmatrix}.$$

***1.*** *Calculer les matrices suivantes*

$$a) A + B \quad b) \frac{1}{3}A \quad c) A - B \quad d) -2A + 4B$$

**2.** *Existe-t-il deux réels α et β tels que*

$$\alpha A + \beta B == \begin{pmatrix} 9 & 2 & -3 \\ -11 & 2 & -2 \end{pmatrix}.$$

**3.** *Déterminer α et β tels que*

$$\alpha A + \beta B = -\begin{pmatrix} -5 & 4 & 1 \\ 4 & 1 & 5 \end{pmatrix}.$$

**Exercice 6.** ***1.*** *Soit $\lambda \in \mathbb{R}$ et $A(\lambda)$ la matrice*

$$\begin{pmatrix} 2-\lambda & 1 & \lambda \\ 2\lambda - 1 & \lambda & 1 \\ \lambda & \lambda+1 & \lambda \end{pmatrix}$$

- ***(a)*** *Calculer le déterminant de $A(\lambda)$.*
- ***(b)*** *Déterminer en fonction de λ le rang de la matrice $A(\lambda)$.*

**2.** *Déterminer le nombre complexe λ tel que la matrice $A - \lambda I_n$ ne soit pas inversible, avec*

$$A = \begin{pmatrix} 4 & 2 \\ 2 & 7 \end{pmatrix} \quad et \quad A = \begin{pmatrix} 4 & 2 & 0 \\ 4 & 6 & 0 \\ 5 & 2 & 3 \end{pmatrix}$$