Réduction des Endomorphismes

Chapitre 1

Prérequis

1.1 Rappels sur les endomorphismes

Dans la suite, on désigne par E, F et G un espace vectoriel sur $\mathbb{K} = \mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$, de dimension finie ou non.

Définition 1.1.1. *On dit que $f : E \to F$ est une application linéaire si*

$$\begin{aligned} f(x+y) &= f(x) + f(y), \\ f(\alpha.x) &= \alpha f(x), \end{aligned}$$

$\forall\, x, y \in E, \forall \alpha \in \mathbb{K}$.
Si $E = F$ l'application linéaire f est dite endomorphisme de E.

Définition 1.1.2. *On dit que $f : E \to F$ est une application linéaire si*

$$f(x + \alpha y) = f(x) + \alpha f(y),$$

$\forall\, x, y \in E, \forall \alpha \in \mathbb{K}$.

Notations 1.1.1.
- *On note $\mathcal{L}(E, F)$ l'espace des applications linéaires de E dans F.*
- *On note $\mathcal{L}(E)$ l'espace des endomorphismes de E.*

Exemple 1.1.1.
1. *L'application*

$$\begin{aligned} Id_E : \quad E &\longrightarrow E \\ x &\longmapsto Id_E(x) = x \end{aligned}$$

est un endomorphisme de E dit l'endomorphisme identité.

2. *L'application*

$$\begin{aligned} f : \quad \mathbb{R}^3 &\longrightarrow \mathbb{R}^3 \\ (x, y, z) &\longmapsto (x + y, 2x - z, x + y + 2z) \end{aligned}$$

est un endomorphisme de $\mathbb{R}^3$.

3. *Soit*

$$\mathbb{R}_2[X] = \left\{ a_0 + a_1 X + a_2 X^2 : a_0, a_1, a_2 \in \mathbb{R} \right\}.$$

L'application

$$\begin{array}{rll}\Psi: & \mathbb{R}_2[X] & \longrightarrow \mathbb{R}_2[X] \\ & P & \longmapsto P-(X-1)P'\end{array}$$

où P' est le polynôme dérivé de P, est un endomorphisme de $\mathbb{R}_2[X]$.

1.1.1 Noyau et image d'une application linéaire

Définition 1.1.3. *Soit $f: E \to F$ une application linéaire.*

1. *On appelle noyau de f, l'ensemble défini par :*

$$ker f = \{x \in E : f(x) = 0_F\}.$$

2. *On appelle image de f, l'ensemble défini par :*

$$Im f = \{y \in F\ \exists x \in E : y = f(x)\}.$$

Proposition 1.1.1. *Soit $f: E \to F$ une application linéaire.*

- **i)** *$ker f$ est un sous espace vectoriel de E.*
- **ii)** *$Im f$ est un sous espace vectoriel de F.*

Corollaire 1.1.1. *Si E est de dimension finie, $dim E = p$ et $B = \{e_1, e_2, \ldots, e_p\}$ est une base de E, alors $\{f(e_1), f(e_2), \ldots, f(e_p)\}$ est une famille génératrice de $Im f$. L'espace vectoriel $Im f$ est donc de dimension finie.*

Définition 1.1.4. *Soit $f: E \to F$ une application linéaire et E de dimension finie. On appelle rang de f, noté $rg(f)$ la dimension de $Im f$, c'est à dire*

$$rg(f) = dim Im f.$$

Théorème 1.1.1. *Soit $f: E \to F$ une application linéaire et E de dimension finie, alors :*

$$dim E = dim ker f + dim Im f.$$

1.1.2 Matrice associée à une application linéaire

Définition 1.1.5. *Soient $f : E \to F$ une application linéaire, E et F de dimensions finies et $B = \{e_1, e_2, \ldots, e_p\}$ une base de E et $B' = \{e'_1, e'_2, \ldots, e'_n\}$ une base de F.*
On appelle matrice de f relativement aux bases B et B' la matrice dont les colonnes sont formées par $\{f(e_1), f(e_2), \ldots, f(e_p)\}$. On la note $\mathcal{M}at(f)^B_{B'}$. Ainsi :

$$\mathcal{M}at(f)^B_{B'} = \begin{array}{cc} \begin{array}{cccc} f(e_1) & f(e_2) & \cdots & f(e_p) \end{array} & \\ \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1p} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2p} \\ \vdots & & \ddots & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{np} \end{pmatrix} & \begin{array}{c} e'_1 \\ e'_2 \\ \vdots \\ e'_n \end{array} \end{array}$$

Exemple 1.1.2. *Soit l'application linéaire*

$$\begin{array}{rccl} f : & \mathbb{R}^3 & \longrightarrow & \mathbb{R}^2 \\ & (x, y, z) & \longmapsto & (x + y, x + 3y + 2z) \end{array}$$

et soient $B = \{e_1 = (1, 0, 0), e_2 = (0.1.0), e_3 = (0, 0, 1)\}$ la base canonique de $\mathbb{R}^3$ et $B' = \{\varepsilon_1 = (1, 0), \varepsilon_2 = (0, 1)\}$ la base canonique de $\mathbb{R}^2$. On a

$$\begin{aligned} f(e_1) &= \varepsilon_1 + \varepsilon_2, \\ f(e_2) &= \varepsilon_1 + 3\varepsilon_2, \\ f(e_3) &= 2\varepsilon_2. \end{aligned}$$

Donc

$$\mathcal{M}at(f)^B_{B'} = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 1 & 3 & 2 \end{pmatrix}.$$

1.2 Rappels sur les déterminants

1.2.1 Définition des déterminants

Définition 1.2.1. *Soit $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$, on définit par récurrence une application*

$$\begin{array}{rll} det: & \mathcal{M}_n(\mathbb{K}) & \longrightarrow \mathbb{K} \\ & A & \longmapsto detA \end{array}$$

de la manière suivante :

1. *Si $n = 1$, $A = (a)$ on pose $detA = a$.*
2. *Si $n > 1$, $detA = \sum_{i=1}^{n}(-1)^{q+i}a_{iq} \times (S_{iq}) = \sum_{j=1}^{n}(-1)^{p+j}a_{pj} \times (S_{pj})$.*
   avec S_{pq} la matrice carrée d'ordre $n-1$, obtenue en supprimant à A la P^{ime} ligne et la q^{ime} colonne.

Le scalaire $detA$ est dit déterminant de A et on le note habituellement :

$$detA = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1p} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2p} \\ \vdots & & \ddots & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{np} \end{vmatrix}.$$

Définition 1.2.2.
1. *La formule $\sum_{i=1}^{n}(-1)^{q+i}a_{iq} \times (S_{iq})$ est dite le développement de $detA$ par rapport à la colonne q.*
2. *La formule $\sum_{j=1}^{n}(-1)^{p+j}apj \times (S_{pj})$ est dite le développement de $detA$ par rapport à la ligne p.*

Exemple 1.2.1. **1)** *Déterminant d'une matrice 2×2.*

Soit $A = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$ une matrice carrée d'ordre 2. On a

$$detA = \begin{vmatrix} a & b \\ c & d \end{vmatrix} = ad - bc.$$

2) *Déterminant d'une matrice 3×3.*

Soit $A = \begin{pmatrix} x & a & b \\ y & c & d \\ z & e & f \end{pmatrix}$ une matrice carrée d'ordre 3. On a

$$detA = \begin{vmatrix} x & a & b \\ y & c & d \\ z & e & f \end{vmatrix} = x\begin{vmatrix} c & d \\ e & f \end{vmatrix} - y\begin{vmatrix} a & b \\ e & f \end{vmatrix} + z\begin{vmatrix} a & b \\ c & d \end{vmatrix}.$$

1.2.2 Propriétés du déterminants

Proposition 1.2.1. *Soient $A, B \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$.*

i) *Le déterminant d'une matrice diagonale ou triangulaire est égal au produit de ses éléments diagonaux.*

ii) $det A = det^t A$, *où* $^t A$ *est la matrice transposé de* A.

iii) $det(AB) = det A.det B$.

iv) *Si* A *est inversible, alors* $\det\left(A^{-1}\right) = \dfrac{1}{det A}$.

v) *Si une colonne (ligne) de* A *est nulle, alors* $det A = 0$.

vi) *Si* $\alpha \in K$, *alors* $det(\alpha A) = \alpha^n det A$.

Théorème 1.2.1. *Soit* $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$, *alors on a les propriétés suivantes :*

i) *Si deux colonnes (lignes) sont liées, le déterminant est nul.*

ii) *Si on échange entre deux colonnes (lignes) de la matrice, alors le déterminant change de signe.*

1.2.3 Déterminant d'un endomorphisme

Définition 1.2.3. *Soit* $f \in \mathcal{L}(E)$, *où* E *est de dimension finie, on appelle déterminant de* f *le déterminant de la matrice associée à* f *dans une base arbitraire de* E.

Exemple 1.2.2. *Soit*

$$\mathbb{R}_2[X] = \left\{a_0 + a_1 X + a_2 X^2 : a_0, a_1, a_2 \in \mathbb{R}\right\}.$$

Soit l'endomorphisme de $\mathbb{R}_2[X]$.

$$\begin{array}{rlll} \Psi : & \mathbb{R}_2[X] & \longrightarrow & \mathbb{R}_2[X] \\ & P & \longmapsto & P + (X-1)P' \end{array}$$

et $B = \{1, X, X^2\}$ *la base canonique de* $\mathbb{R}_2[X]$. *Donc*

$$det \Psi = det \mathcal{M}at(\Psi)_B^B = \begin{vmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 2 & -2 \\ 0 & 0 & 3 \end{vmatrix} = 6.$$

1.2.4 Calcul de l'inverse d'une matrice

Théorème 1.2.2. *Soit $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$, $n \geq 1$.*

1. *On a*
$$A^t.(Co(A)) = (detA)I_n$$
avec
$$Co(A) = \begin{pmatrix} cof_{11}(A) & cof_{12}(A) & \cdots & cof_{1n}(A) \\ cof_{21}(A) & cof_{22}(A) & \cdots & cof_{2n}(A) \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ cof_{n1}(A) & cof_{n2}(A) & \cdots & cof_{nn}(A) \end{pmatrix} \text{ et } cof_{ij}(A) = (-1)^{i+j} \times detS_{ij}$$
où S_{pq} est la matrice carrée d'ordre $n-1$, obtenue en supprimant de A la p^{ime} ligne et la q^{ime} colonne.

2. *Si $detA \neq 0$ l'inverse de A est donnée par*
$$A^{-1} = \frac{1}{detA} {}^t(Co(A))$$

Définition 1.2.4.
1. *Les scalaires $cof_{ij}(A)$ sont dites les cofacteurs de A.*
2. *La matrice $Co(A)$ est dite la co-matrice de A.*

Exemple 1.2.3. *Soit la matrice $A = \begin{pmatrix} -2 & -1 & -1 \\ -2 & -1 & 1 \\ -1 & -1 & 3 \end{pmatrix} \in \mathcal{M}_3(\mathbb{R})$. On a $detA = -2 \neq 0$ donc A est inversible.*
La co-matrice de A est

$$Co(A) = \begin{pmatrix} \begin{vmatrix} -1 & 1 \\ -1 & 3 \end{vmatrix} & -\begin{vmatrix} -2 & 1 \\ -1 & 3 \end{vmatrix} & \begin{vmatrix} -2 & -1 \\ -1 & -1 \end{vmatrix} \\ -\begin{vmatrix} -1 & -1 \\ -1 & 3 \end{vmatrix} & \begin{vmatrix} -2 & -1 \\ -1 & 3 \end{vmatrix} & -\begin{vmatrix} -2 & -1 \\ -1 & -1 \end{vmatrix} \\ \begin{vmatrix} -1 & -1 \\ -1 & 1 \end{vmatrix} & -\begin{vmatrix} -2 & -1 \\ -2 & 1 \end{vmatrix} & \begin{vmatrix} -2 & -1 \\ -2 & -1 \end{vmatrix} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -2 & 5 & 1 \\ 4 & -7 & -1 \\ -2 & 4 & 0 \end{pmatrix}.$$

L'inverse de A est
$$A^{-1} = \frac{1}{detA} {}^t(Co(A)) = \frac{1}{-2} \begin{pmatrix} -2 & 4 & -2 \\ 5 & -7 & 4 \\ 1 & -1 & 0 \end{pmatrix}.$$

1.3 Rappels sur les polynômes

1.3.1 Racines d'un polynômes

Soit $P(X)$ un polynôme de degré p à coefficients dans $\mathbb{K}$.

Définition 1.3.1.
- *On dit que $\alpha \in \mathbb{K}$ est une racine de P si $P(\alpha) = 0$. Dans ce cas, on pourra écrire*
$$P(X) = (X - \alpha)P_1(X),$$
où $P_1(X)$ est un polynôme de degré $p - 1$.
- *On dit que $\alpha \in \mathbb{K}$ est une racine de multiplicité k de P si l'on peut écrire*
$$P(X) = (X - \alpha)^k P_k(X),$$
où $P_k(X)$ est un polynôme de degré $p - k$ qui n'admet pas α comme racine.

1.3.2 Polynômes scindés

Définition 1.3.2. *Soit $P(X)$ un polynôme à coefficients dans $\mathbb{K}$. On dit que $P(X)$ est scindé dans $\mathbb{K}$ si l'on peut écrire $P(X)$ sous la forme*
$$P(x) = a(X - \alpha_1)^{\beta_1} \dots (X - \alpha_k)^{\beta_k} \dots (X - \alpha_p)^{\beta_p},$$
où $a \in \mathbb{K} - \{0\}, \alpha_i \in \mathbb{K}$ et $\beta_i \in \mathbb{N}$, $(1 \leq i \leq p)$.
Autrement dit, $P(X)$ est scindé dans $\mathbb{K}$ s'il est écrit comme produit de polynômes du premier degré à coefficients dans $\mathbb{K}$.

Exemple 1.3.1.
1. *$P(X) = X^3 - 5X^2 + 3X + 9$ est scindé dans $\mathbb{R}$ puisque $P(X) = (X - 3)^2(X + 1)$.*
2. *$Q(X) = X^2 + 1$ n'est pas scindé dans $\mathbb{R}$ car ce polynôme n'a pas de racines dans $\mathbb{R}$.*
3. *$Q(X) = X^2 + 1$ est scindé dans $\mathbb{C}$ puisque $X^2 + 1 = (X - i)(X + i)$.*

Corollaire 1.3.1. *Tout polynôme non constant de $\mathbb{C}[X]$ est scindé dans $\mathbb{C}$.*

1.3.3 Clôture algébrique

On peut montrer que pour tout corps $\mathbb{K}$ il existe un corps $\mathbb{K}' \supset \mathbb{K}$ tel que tout polynôme P de degré n à coefficients dans $\mathbb{K}'$ admette exactement n racines dans $\mathbb{K}'$ (c'est scindé dans $\mathbb{K}'$). En particulier, puisque $\mathbb{K} \subset \mathbb{K}'$, tout polynôme de degré n de $\mathbb{K}[X]$ admet exactement n racines dans $\mathbb{K}'$. $\mathbb{K}'$ est dit ***clôture algébrique*** de $\mathbb{K}$. (Ainsi $\mathbb{C}$ est la clôture algébrique de $\mathbb{R}$).
Tout polynôme $P \in \mathbb{K}[X]$ peut donc s'écrire sous la forme
$$P(X) = a(X - \alpha_1)^{\beta_1} \cdots (X - \alpha_p)^{\beta_p}$$
avec $a \in \mathbb{K}$, $\alpha_i \neq \alpha_j$ pour $i \neq j$ et $\beta_1 + \cdots + \beta_p = degP$ à condition de considérer les racines $\alpha_1, \dots, \alpha_p$ éventuellement dans $\mathbb{K}'$.

1.3.4 Polynômes de matrices

Si $P(X)$ est un polynôme à coefficients dans $\mathbb{K}$, l'indéterminée X peut décrire un ensemble de matrices. Ainsi, si

$$P(X) = a_n X^n + a_{n-1} X^{n-1} + \ldots + a_1 X + a_0,$$

où $a_i \in \mathbb{K}$, i=0,1,...,n, on pose pour tout $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$,

$$P(A) = a_n A^n + a_{n-1} A^{n-1} + \ldots + a_1 A + a_0 I_n,$$

où I_n désigne la matrice identité.

De la même façon, la variable peut aussi décrire l'ensemble des endomorphismes de E. Ainsi, si f est un endomorphisme de E,

$$P(f) = a_n f^n + a_{n-1} f^{n-1} + \ldots + a_1 f + a_0 Id_E,$$

où Id_E désigne l'endomorphisme identité.

Remarque 1.3.1. 1. *Si f est un endomorphisme de E et $n \in \mathbb{N}$ avec n finie, on a*

$$f^0 = Id_E \text{ et } f^n = \underbrace{f \circ f \circ \ldots \circ f}_{n \text{ fois}}.$$

2. *Si $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ et $n \in \mathbb{N}$ avec n finie, on a*

$$A^0 = I_n \text{ et } A^n = \underbrace{A \times A \times \ldots \times A}_{n \text{ fois}}.$$