Centre Universitaire de Mila **Année universitaire** 2022/2023

Institut des Sciences et de la Technologie **Domaine**: MI-Mathématiques (1[er]année)

Analyse I Série d'exercices N°01 **Semestre I**

Exercice 1:

Soit $A, B \subset \mathbb{R}$ deux ensembles non vides et bornées. On pose: $-A = \{-x \ / \ x \in A\}$.

1) Montrer que: $\sup(-A) = -\inf(A)$ et $\inf(-A) = -\sup(A)$

2) Montrer que si pour tout $a \in A$ et $b \in B$ on a $a \leq b$, alors $\sup A \leq \inf B$.

3) Montrer que $A \cup B$ est une partie bornée de $\mathbb{R}$ et

a) $\sup(A \cup B) = \max(\sup A, \sup B)$.

b) $\inf(A \cup B) = \min(\inf A, \inf B)$. (*)

4) Montrer que si $A + B = \{z = x + y;\ x \in A,\ y \in B\}$ et $A - B = \{z = x - y; x \in A, y \in B\}$ alors:

a) $\sup(A + B) = \sup A + \sup B$.

b) $\inf(A + B) = \inf A + \inf B$.

c) $\sup(A - B) = \sup A - \inf B$.

d) $\inf(A - B) = \inf A - \sup B$. (*)

Exercice 2:

1) Montrer que si $r \in \mathbb{Q}$ et $x \notin \mathbb{Q}$ alors $r + x \notin \mathbb{Q}$; et si $r \neq 0$ alors $r.x \notin \mathbb{Q}$.

2) Montrer que $\sqrt{2} \notin \mathbb{Q}$.

3) On suppose que $\sqrt{2}, \sqrt{3}$ sont irrationnels. Montrer que $\sqrt{2} + \sqrt{3} \notin \mathbb{Q}$.

4) Montrer que $\dfrac{\ln 3}{\ln 2}$ est irrationnel.

Exercice 3:

Soient A et B deux sous ensembles de $\mathbb{R}$ tel que $B \subset A$. Montrer que:

1) A borné $\Longrightarrow B$ borné.

2) $\inf(A) \leq \inf(B)$ et $\sup(A) \geq \sup(B)$.

Exercice 4:

Soient $A = \left\{ a_n \in \mathbb{R} / \ a_n = \dfrac{n+3}{\frac{n}{4}+1}; n \in \mathbb{N} \right\}$ et $B = \left\{ b_n \in \mathbb{R} / \ b_n = \dfrac{1}{n^2} + \dfrac{2}{n} + 4; n \in \mathbb{N}^* \right\}$

1) Montrer que A et B sont bornés dans $\mathbb{R}$ et que: $\sup(A) = \inf(B)$.

2) Déterminer $\sup(B)$ et $\inf(A)$.

Exercice 5:

Déterminer la borne supérieure et la borne inférieure; si elles existent, des ensembles:

$A=\left\{\sin(\frac{2n\pi}{7});n\in\mathbb{Z}\right\}$; $B=\{\alpha x+\beta/x\in[-2,1]$ où $\alpha\in\mathbb{R};\beta\in\mathbb{R}\}$

$C=[0,1]\cap\mathbb{Q}$; $D=\left\{\frac{n-1}{2n+1},n\in\mathbb{N}^*\right\}$; $F=\left\{(-1)^n+\frac{1}{n};n\in\mathbb{N}^*\right\}$

Exercice 6:

1) Mettre sous la forme $a+ib$ $(a,b\in\mathbb{R})$ les nombres:

$$\frac{3+6i}{3-4i}\quad;\quad\left(\frac{1+i}{2-i}\right)^2+\frac{3+6i}{3-4i}\quad;\quad\frac{2+5i}{1-i}+\frac{2-5i}{1+i}\quad(*)$$

2) Résoudre dans $\mathbb{C}$ les équations suivantes:

$z^2+z+1=0$; $z^6=1$; $z^2=\frac{1}{4}(-1+i)$ (*) ; $z^2-\sqrt{3}z-i=0$ (*).

Exercice 7:

Soit z un nombre complexe de module ρ et d'argument θ et soit $\overline{z}$ son conjugué.

Calculer en fonction de ρ et θ l'expression: $(z+\overline{z})(z^2+\overline{z}^2)\ldots\ldots(z^n+\overline{z}^n)$.

Application:

Soient α et $\overline{\alpha}$ les solutions de l'équation $z^2-2z+2=0$.

- Trouver la forme trigonométrique de α et $\overline{\alpha}$.
- Montrer que: $\prod_{k=1}^{n}\left(\alpha^k+\overline{\alpha}^k\right)=0;\quad\forall n\geq 2.$

Exercice 8:

1) Soit $z\in\mathbb{C}$, calculer la somme:

$$S_n=1+z+z^2+\ldots..+z^n.$$

2) - Résoudre dans $\mathbb{C}$ l'équation $z^n=1$.

- Montrer que les racines s'écrivent sous la forme $1;\alpha;\alpha^2;\ldots\ldots;\alpha^{n-1}$.

En déduire les racines de l'équation:

$$P(z)=1+z+z^2+\ldots..+z^{n-1}=0.$$

3) Calculer pour $p\in\mathbb{N}$;

$$Q(z)=1+z^p+z^{2p}+\ldots\ldots+z^{(n-1)p}.$$

Exercice 9:

1) Calculer la somme: $S(x)=\sum_{p=0}^{n-1}e^{ipx};p\in\mathbb{N},x\in\mathbb{R}$.

2) Déduire les sommes suivantes:

$$S_1(x)=\sum_{p=0}^{n-1}\cos(px)\quad(*)\quad;\quad S_2(x)=\sum_{p=0}^{n-1}\sin(px)\quad(*).$$

N B: *Les exercices (*) sont laissés aux étudiants*