Mathématique Statistique Informatique

Dr. CHELLOUF YASSAMINE

Centre Universitaire Abdelhafid Boussouf Mila

Faculté des sciences et technologie

Département de math

Email: y.chellouf@centre-univ-mila.dz

5.0 Avril 2022

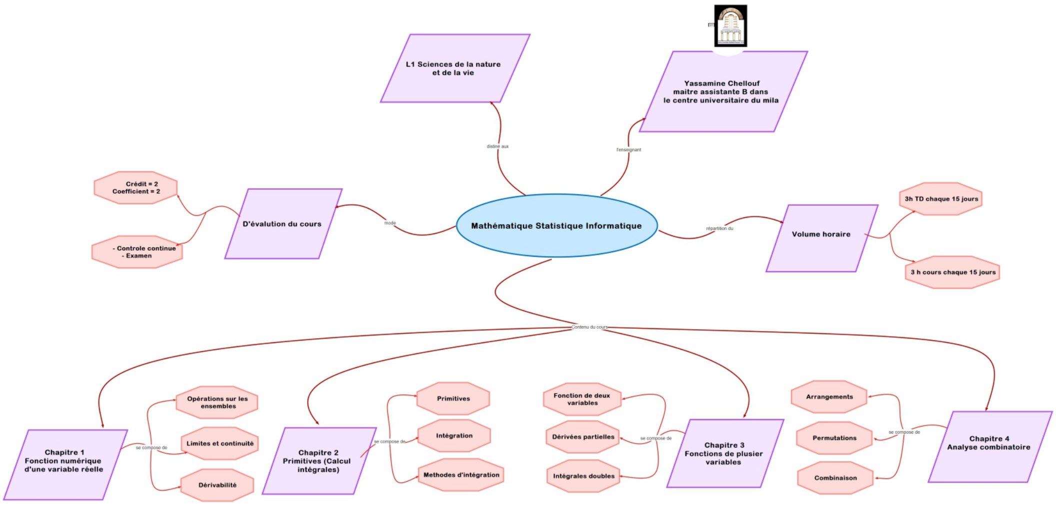
Table des matières

Objectifs

- Connaître les notions des ensembles, les fonctions et domaine de définition, limites et continuité, dérivabilité, les intégrales.
- Définir les fonctions de deux variables et comprend comment trouver ses domaines de définition.
- Calculer les dérivées partielles première et deuxième ordre.
- Calculer les intégrales doubles.
- Connaître l'analyse combinatoire qui étudie comment de nombrer des objets.
- Évaluer les connaissance des apprenants.

Introduction

Ce cours est adressé aux étudiants de 1ère année licence en sciences de la nature et de la vie. Il se compose à la fois d'un cours magistral, d'une séance de travaux dirigée et d'une séance de travaux pratique.



carte conceptuelle

Pré-requis

1. Quelle que notions sur les ensembles réels et sous-ensembles:
    - Les entier naturels.
    - Les entiers relatifs.
    - Les décimaux.
    - Les rationnels.
    - Les réels.
2. Ordre et opérations algébrique.
3. Quelle que notions sur les fonctions numérique:
    - Notions d'une fonction.
    - Domaine de définition.
    - Le graphe d'une fonction.
    - Fonctions monotones.
    - Fonctions réciproque.

Pré-Test

1. Exercice

[solution n°1 p. 23]

Indiquer si les affirmations suivantes sont vraies ou fausses.

1. Tout nombre réel est un nombre rationnel.
2. 0,5 est un nombre rationnel.
3. Le carré d'un nombre irrationnel n'est jamais rationnel.
4. Il n'existe aucun nombre réel qui ne soit pas un nombre décimal.
5. Le quotient de deux nombres décimaux non nuls est également un nombre décimal.
6. L'inverse d'un nombre décimal peut être un nombre entier.
7. Il existe deux nombres rationnels dont la somme est un nombre entier.

2. Exercice

[solution n°2 p. 23]

Déterminer le domaine de définition de la fonction f définie par: $f(x) = 3x^2 + 5x - 7$.

3. Exercice

[solution n°3 p. 23]

Le domaine de définition de la fonction g définie par: $g(x) = \dfrac{2x+1}{x-2}$ est:

- $\mathbb{R} - \{2\}$.
- $]-\infty, 2] \cup]2, +\infty[$

4. Exercice

Soit la fonction f définit par:

$$f : \begin{array}{rcl}]-1,1[& \longrightarrow & \mathbb{R} \\ x & \longrightarrow & \dfrac{x}{1-x^2} \end{array}.$$

Montrer que f admet une fonction réciproque que l'on déterminera.

Fonction Numérique d'une Variable Réelle

1. Opérations sur les ensembles

1.1. Définitions

Définition

Un **ensemble** est une **collection d'objets**. Ces objets sont appelés **éléments** de l'ensemble. Pour dire que x est un élément de l'ensemble E, on écrit $x \in E$. Pour dire que x n'est pas un élément de E, on écrit $x \notin E$.

Un ensemble est caractérisé par ses éléments.*[1]*∗

Exemple

$\mathbb{N}$ l'ensemble des nombres naturel, et on note $\mathbb{N} = \{0, 1, 2, \cdots, n, \cdots\}$.

On peut décrire un ensemble de deux manières. Soit en donnant la liste de ses éléments de manière explicite, soit en le définissant comme l'ensemble des éléments satisfaisant une certaine propriété.

Par exemple, l'ensemble A des entiers allant de 0 à 5 inclus peut notamment être décrit des trois manières suivantes :

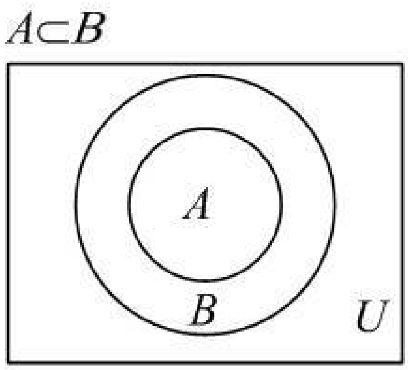
$A = \{n \in \mathbb{N}, n \leq 5\} = \{0, 1, 2, 3, 4, 5\} = \{n \in \mathbb{Z}, 0 \leq n \leq 5\}$.

L'inclusion de deux ensembles *Définition*

Dans le cas le plus simple, nous définissons **l'inclusion** par:

$A \subset B \Leftrightarrow \{\forall x,\ si\ x \in A\ alors\ x \in B\}$.

C'est à dire pour tout x appartenant à A chacun des ces x appartient à B.



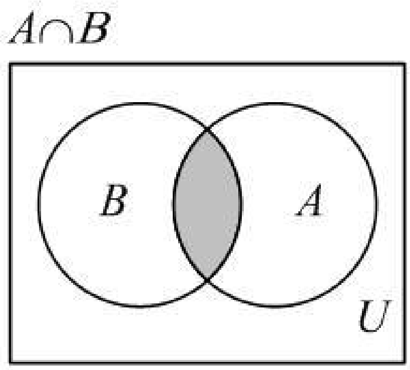
On dit que $A = B$ si $A \subset B$ et $B \subset A$.

L'intersection de deux ensembles

Définition

L'intersection des ensembles A et B consiste en l'ensemble des éléments qui se trouvent à la fois dans A et dans B. i.e:

$A \cap B = \{x|\ x \in A\ et\ x \in B\}.$

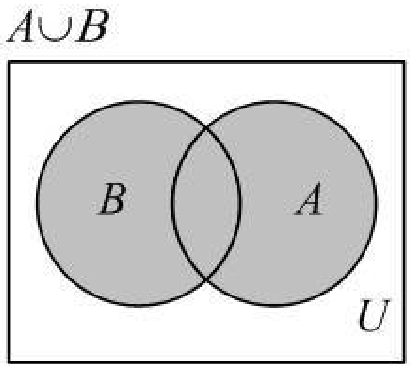


L'union (la réunion) de deux ensembles

Définition

La **réunion** ou **union** des ensembles A et B consiste en l'ensemble des éléments qui se trouvent dans A et en plus dans B. i.e:

$A \cup B = \{x|\ x \in A\ ou\ x \in B\}.$



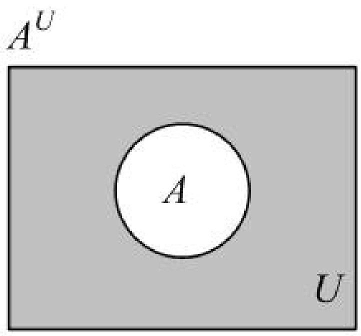
Complémentarité

Définition

Le **complémentaire** est défini comme en prenant B un ensemble et A un sous-ensemble de B alors le **complémentaire** de A dans B est l'ensemble des éléments qui sont dans B mais pas dans A i.e:

$\forall A \subset B,\ A^C = \{x|\ x \in B,\ x \notin A\}.$

Une autre notation de la complémentarité: $\overline{A}$.



[cf. Pdf]

1.2. Les intervalles

Soient $a, b \in \mathbb{R}$ tel que $a < b$, on appelle:

1. Intervalle ouvert d'extrémité a et b l'ensemble: $]a, b[= \{x \in \mathbb{R}, a < x < b\}$.
2. Intervalle fermé d'extrémité a et b l'ensemble: $[a, b] = \{x \in \mathbb{R}, a \leq x \leq b\}$.
3. Intervalle semi-ouvert, les ensembles suivantes:
    - $[a, b[= \{x \in \mathbb{R}, a \leq x < b\}$.
    - $]a, b] = \{x \in \mathbb{R}, a < x \leq b\}$.
4. Intervalle ouvert de centre a l'ensemble: $]a - \varepsilon, a + \varepsilon[\ ,\ avec\ \varepsilon \geq 0$.
5. Soient les ensembles:
    - $[a, +\infty[= \{x \in \mathbb{R},\ x \geq a\}$.
    - $]a, +\infty[= \{x \in \mathbb{R},\ x > a\}$.
    - $]-\infty, a] = \{x \in \mathbb{R},\ x \leq a\}$.
    - $]-\infty, a[= \{x \in \mathbb{R},\ x < a\}$.

1.3. Valeur absolue

Soit $x \in \mathbb{R}$, la valeur absolue de x est le nombre positive $|x|$ définit par:

$$|x| = \begin{cases} x & : \ x \geq 0 \\ -x & : \ x < 0 \end{cases}$$

Propriétés

Soient $x,\ y \in \mathbb{R}$, on a:

- $\forall x \in \mathbb{R},\ \ |x| \geq 0,\ \ |x| = |-x|\ ,\ et\ \ |x| \geq x$.
- $|x + y| \leq |x| + |y|$.
- $|x.y| = |x|\ .\ |y|$.

Voisinage *Définition*

On appelle un **voisinage** d'une point $x_0 \in \mathbb{R}$, est un intervalle ouvert qui contient x_0. i.e:

$V_\varepsilon(x_0) = \{x \in \mathbb{R},\ x_0 + \varepsilon < x < x + \varepsilon\} = \{x \in \mathbb{R},\ \ |x_0 - x| < \varepsilon\}$.

2. Limite et Continuité

2.1. Limite en un point

Définition

On dit qu'une fonction f définie au voisinage de $x_0 \in \mathbb{R}$, sauf peut être en x_0, admet une limite $l \in \mathbb{R}$ quant x tend vers x_0 et on écrit: $\lim\limits_{x \to x_0} f(x) = l$ si:

$\forall \varepsilon > 0,\ \exists \delta > 0,\ \forall x \in \mathbb{R},\ tel\ que\ \ |x - x_0| < \delta\ alors\ \ |f(x) - l| < \varepsilon$.[2]*

Limite à droite

On définit la limite à **droite** d'une fonction f comme suit:

$\lim\limits_{\substack{x \to x_0 \\ >}} f(x) = l \;\; si \;\; \forall \varepsilon > 0, \; \exists \delta > 0, \; \forall x \in \mathbb{R} \;\; tel \;\; que \;\; 0 < x - x_0 < \delta \;\; alors \;\; |f(x) - l| < \varepsilon..$

Et on note: $\lim\limits_{x \to x_0^+} f(x) = l.$

Limite à gauche

On définit la limite à **gauche** d'une fonction f comme suit:

$\lim\limits_{\substack{x \to x_0 \\ <}} f(x) = l \;\; si \;\; \forall \varepsilon < 0, \; \exists \delta < 0, \; \forall x \in \mathbb{R} \;\; tel \;\; que \;\; 0 < x_0 - x < \delta \;\; alors \;\; |f(x) - l| < \varepsilon.$

Et on note: $\lim\limits_{x \to x_0^-} f(x) = l.$

Remarque

La limite d'une fonction f, lorsqu'elle existe est **unique**:

$\lim\limits_{x \to x_0} f(x) = l = \lim\limits_{x \to x_0^+} f(x) = \lim\limits_{x \to x_0^-} f(x).$

2.2. Opérations sur les limites

Supposons que $\lim\limits_{x \to x_0} f(x) = l_1$ et $\lim\limits_{x \to x_0} g(x) = l_2$ et soit $\lambda \in \mathbb{R}$, alors:

- $\lim\limits_{x \to x_0} (f(x) + g(x)) = l_1 + l_2.$
- $\lim\limits_{x \to x_0} (f(x).g(x)) = l_1.l_2.$
- $\lim\limits_{x \to x_0} |f(x)| = |l_1|.$
- $\lim\limits_{x \to x_0} (\lambda f(x)) = \lambda l_1.$
- $\lim\limits_{x \to x_0} (\frac{f(x)}{g(x)}) = \frac{l_1}{l_2}, \;\; avec, \;\; l_2 \neq 0.$
- si $f \geq g$ au voisinage de x_0 alors $l_1 \geq l_2$.
- On dit que f tend vers $+\infty$ (resp: vers $-\infty$) lorsque x tend vers x_0 et on note: $\lim\limits_{x \to x_0} f(x) = +\infty$ (resp: $-\infty$).
- On dit que f tend vers l lorsque x tend vers $+\infty(resp : -\infty)$ et on note $\lim\limits_{x \to +\infty} f(x) = l$ (resp: $\lim\limits_{x \to -\infty} f(x) = l$).

Forme indéterminées

Les quartes formes indéterminées les plus connus sont:

$\frac{0}{0}, \;\; \frac{\infty}{\infty}, \;\; \infty - \infty, \;\; 0 \times \infty.$

Exemple

Calculer: $\lim\limits_{x \to \frac{1}{2}} \frac{4x^2 - 1}{2x - 1}.$

Ona: $\lim\limits_{x \to \frac{1}{2}} \frac{4x^2 - 1}{2x - 1} = \frac{0}{0}$, F.I.

Donc $\lim\limits_{x \to \frac{1}{2}} \frac{4x^2 - 1}{2x - 1} = \lim\limits_{x \to \frac{1}{2}} \frac{(2x - 1)(2x + 1)}{(2x - 1)} = 2.$

Théorème

Soient f, g, et h des fonction définies sur un voisinage V de x_0, alors:
$\forall x \in V - \{x_0\},\ \ f(x) \le h(x) \le g(x)$ et $\lim\limits_{x \to x_0} f(x) = \lim\limits_{x \to x_0} g(x) = l \in \mathbb{R}$, alors h admet une limite en x_0 et $\lim\limits_{x \to x_0} h(x) = l$.

Théorème

Soient f et g deux fonctions, soient $x_0, l, l' \in \mathbb{R}$, alors:
si $\lim\limits_{x \to x_0} f(x) = l$ et $\lim\limits_{x \to x_0} g(x) = l'$ donc $\lim\limits_{x \to x_0} g \circ f(x) = l'$.

[cf. Pdf 2]

2.3. Continuité

Définition

On dit que f est **continue** en $x_0 \in \mathbb{R}$ si:

1. f est definie en x_0, $(x_0 \in D_f)$.
2. $\lim\limits_{x \to x_0} f(x) = f(x_0)$.

- On dit que f est continue à droite en x_0 si $\lim\limits_{x \to x_0^+} f(x) = f(x_0)$.
- On dit que f est continue à gauche en x_0 si $\lim\limits_{x \to x_0^-} f(x) = f(x_0)$.*[3]**

Proposition

f est **continue** en x_0 si et seulement si elle est **continue à droite et à gauche**.

Remarque

- Une fonction f continue sur une partie $A \subseteq D$ si f est **continue en tout point** de A.
- Soient f et g deux fonctions continues en x_0, et soit $\lambda \in \mathbb{R}$ alors: $(f + g),\ (\lambda f),\ (f \times g),\ |f|$, et $(\frac{f}{g},\ \ g(x_0) \neq 0)$ sont des fonctions continues en x_0.

Prolongement par continuité

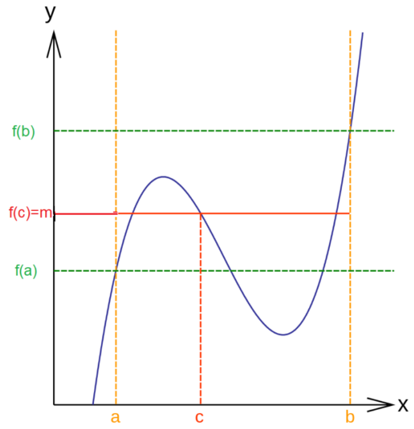
Soit f une fonction définie au voisinage de x_0 sauf en x_0 $(x_0 \notin D_f)$ et $\lim\limits_{x \to x_0} f(x) = l$. Alors la fonction $\tilde{f}$ definie par:

$$\tilde{f} = \begin{cases} f(x), & x \neq x_0 \\ l, & x = x_0 \end{cases}$$

est continue en x_0.

Théorème (Valeurs intermédiaires)

Soit $f : I = [a, b] \longrightarrow \mathbb{R}$ une fonction continue sur I, alore $\forall m$ comprise entre $f(a)$ et $f(b)$, il existe ($\exists$) au moins un $C \in [a, b]$ tel que: $f(C) = m$.



Corollaire

Si une fonction f continue sur $I = [a, b]$, et $f(a).f(b) < 0$, alors il existe au moins un $C \in]a, b[$ tel que $f(C) = 0$.

3. Dérivabilité

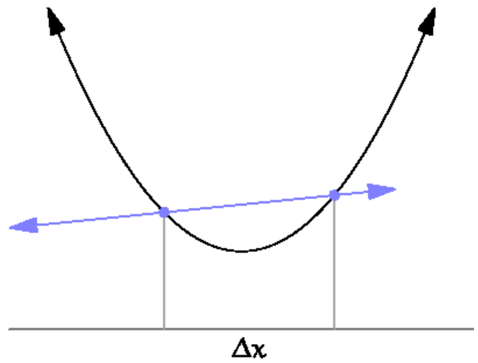
3.1. Fonctions dérivées

Soit $f : D_f \longrightarrow \mathbb{R}$ une fonction continue en $x_0 \in D_f$.

La dérivabilité — ***Définition***

On dit que f et en x_0 si et seulement si la fonction $x \longmapsto \dfrac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0}$ admet une **limite finie** quand x tend vers x_0. Lorsque cette existe et finie, elle sera notée $f'(x_0)$ et elle est appelée **la dérivée** de f en x_0.

$$f'(x_0) = \lim_{x \to x_0} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} = \lim_{x \to x_0} \frac{f(x_0 + h) - f(x_0)}{h}, x = x_0 + h.$$



Définition

On définie la dérivée à droite et la dérivée à gauche d'une fonction f comme suite:

- f est dérivable à droite en x_0 si $\lim_{x \to x_0^+} \dfrac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} = f'_d(x_0)$.
- f est dérivable à gauche en x_0 si $\lim_{x \to x_0^-} \dfrac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} = f'_g(x_0)$.

Remarque

f est dérivable en x_0 si et seulement si $f'_d(x_0)$ et $f'_g(x_0)$ existent et $f'_d(x_0) = f'_g(x_0)$.

Théorème

f est dérivable en $x_0 \Longrightarrow f$ est continue en x_0, (l'inverse n'est pas vrai).

Définition

Soit f une fonction définie et admet une dérivée sur un intervalle I de $\mathbb{R}$. On appelle fonction dérivée de f et on note f' la fonction

$$\begin{aligned} f' \quad &: \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R} \\ &: x \longrightarrow f'(x) \end{aligned}$$

3.2. Opérations sur les fonctions dérivables

Soient f et g deux fonctions dérivables en $x_0 \in D_f \cap D_g$, et soit $\lambda \in \mathbb{R}$, on a:

1. $(f + g)'(x_0) = f'(x_0) + g'(x_0)$.
2. $(\lambda f)'(x_0) = \lambda f'(x_0)$.
3. $(f.g)'(x_0) = f'(x_0).g(x_0) + f(x_0).g'(x_0)$.
4. $Si \;\; g(x_0) \neq 0, \;\; alors \;\; (\dfrac{f}{g})'(x_0) = \dfrac{f'(x_0).g(x_0) - f(x_0).g'(x_0)}{g^2(x_0)}$.
5. Si de plus f est derivable en $g(x_0)$, alors:
   - $(f \circ g)'\,(x_0) = g'(x_0).f'(g(x_0))$.
   - $\left(f^{-1}\right)'(x_0) = \dfrac{1}{f'(f^{-1}(x_0))}$.

Exemple

$$(e^x)' = \frac{1}{(\log e^x)'} = \frac{1}{e^{-x}} = e^x.$$

3.3. Dérivées usuelles

$f(x)$	D_f	$f'(x)$	$D_{f'}$
$x^n, \; n \in \mathbb{N}^*$	$\mathbb{R}$	nx^{n-1}	$\mathbb{R}$
$x^\alpha, \; \alpha \in \mathbb{R}$	par rapport à α	$\alpha x^{\alpha - 1}$	par rapport à $\alpha - 1$

$\cos x$	$\mathbb{R}$	$-\sin x$	$\mathbb{R}$
$\sin x$	$\mathbb{R}$	$\cos x$	$\mathbb{R}$
$\log x$	$\mathbb{R}_+^*$	$\dfrac{1}{x}$	$\mathbb{R}^*$
e^x	$\mathbb{R}$	e^x	$\mathbb{R}$

Règle de l'Hôpital

Soient f et g deux fonctions dérivables sur un voisinage de x_0 avec $f(x_0) = g(x_0) = 0$, et $g'(x_0) \neq 0$, alors:

$$\lim_{x \to x_0} \frac{f(x)}{g(x)} = \lim_{x \to x_0} \frac{f'(x)}{g'(x)}.$$

Exemple

$\lim_{x \to 0} \dfrac{\cos x - 1}{x} = 0$, pour $f(x) = \cos x - 1$ et $g(x) = x$, on a $f(0) = g(0) = 0$, et $g'(0) \neq 0$. Donc $\lim_{x \to 0} \dfrac{\cos x - 1}{x} = \lim_{x \to 0} \dfrac{f'(x)}{g'(x)} = 0.$

3.4. Dérivées successives

Soit f une fonction dérivable sur $I \subset \mathbb{R}$. Si f' est dérivable sur I , on note f'' ou $f^{(2)}$ la dérivée de f'.

f'' s'appelle la **dérivée second** de f. par récurrence sur $n \in \mathbb{N},\ n \geq 2$, la dérivée n^{eme} de f note $f^{(n)} = (f^{(n-1)})$, lorsque $f^{(n-1)}$ est dérivable sur I.

3.5. Variation d'une fonction

Soit f une fonction dérivable sur $I \subset \mathbb{R}$, alors:

- Si $f'(x) > 0$ donc, f est **strictement croissante** sur I.
- Si $f'(x) < 0$ donc, f est **strictement décroissante** sur I.

Théorème (Rolle)

Soit $f : [a, b] \longrightarrow \mathbb{R},\ \ (a \neq b)$ continue sur $[a, b]$, et dérivable sur $]a, b[$, si on a $f(a) = f(b)$, alors: $\exists\, C \in\,]a, b[\ \ tel\ \ que :\ \ f'(C) = 0.$

Corollaire (Formule d'égalité des accroissement finis)

Soit $f : [a, b] \longrightarrow \mathbb{R},\ (a \neq b)$ continue sur $[a, b]$, et dérivable sur $]a, b[$, alore $\exists\, C \in\,]a, b[\ \ tel\ \ que :\ \dfrac{f(b) - f(a)}{b - a} = f'(C).$

4. Test d'acquisitions

4.1. Exercice

Pour chacune des fonctions suivantes, déterminer le domaine de définition :

1. $f(x) = x - \ln x$.
2. $g(x) = \dfrac{1}{x^3 - 1}$.
3. $h(x) = \sqrt{x^2 - 3x + 1}$.

4.2. Exercice

Étudier la continuité des fonctions suivantes:

1. $f(x) = |4x - 5|$ sur $\mathbb{R}$.
2. $g(x) = \begin{cases} \dfrac{\sin 4x}{x}, & x \neq 0 \\ g(0) = 4 \end{cases}$ au point 0 sur $\mathbb{R}$.

4.3. Exercice

Calculer les dérivées des fonctions suivantes:

1. $f(x) = \tan x$.
2. $g(x) = \sin(2x + 6) + \cos(3x + 1)$.
3. $h(x) = \ln(\ln x)$.
4. $k(x) = \sqrt{1 + \sqrt{x}}$.

Primitives (Calcul Intégrales)

IV

1. Primitives

1.1. Primitive d 'une fonction

Soit f une fonction définie sur un intervalle I.

Définition

Une fonction F est une **primitive** de f sur I si et seulement si elle est dérivable sur I, et pour tout $x \in I, F'(x) = f(x)$.

Exemple

La fonction $f : x \longmapsto 10x + 3$ admet pour primitive sur $\mathbb{R}$ la fonction $F : x \longmapsto 5x^2 + 3x$.

f admet aussi la fonction $F_1 : x \longmapsto 5x^2 + 3x + c$ pour primitive sur $\mathbb{R}$, c est un constant dans $\mathbb{R}$.

Théorème

Soit f une fonction continue sur $I = [a, b]$. L'ensemble $P = \{\varphi = F + c,\ c \in \mathbb{R}\}$ est l'ensemble de tous les primitives de f sur $[a, b]$, tel que F est une primitive de f sur $[a, b]$.

Théorème (d'existence)

Tout fonction continue sur $[a, b]$ admet une primitive sur $[a, b]$.

Exemple

la fonction $f(x) = e^{-x^2}$.

Notation

$\int f(x)\, dx = F(x) + c$, avec F est une primitive de f.

2. Intégration

2.1. Définition

Définition

Soit f est une fonction continue sur un intervalle $I = [a, b]$, et F est une primitive de f. La quantité $F(b) - F(a) = [F(x)]_a^b$ est appelée intégrale de f entre a et b et est notée par $\int_a^b f(x)\, dx$. i.e:

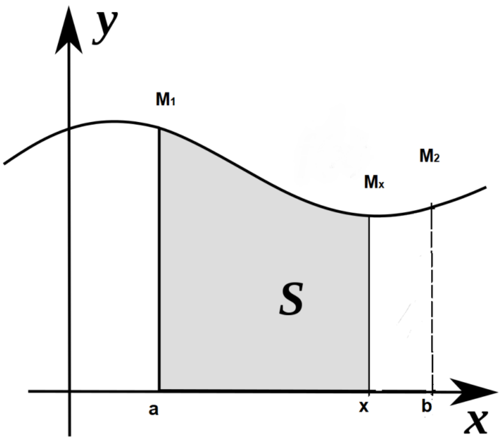
$\int_a^b f(x)\, dx = [F(x)]_a^b = F(b) - F(a)$.[4]*

Remarque

Si $a = b$, alors $\int_a^b f(x)\,dx = 0$.

2.2. Interprétation géométrique

Soit f une fonction continue sur $[a, b]$, et (C_f) la courbe de f, et $x \in [a, b]$. Soit $S(x)$ est la surface entre $[a, x]$, $[M_1, M_x]$, $[a, M_1]$ et $[x, M_x]$.



On a si $t \in [a, x]$, alors:

- Si $f(t) > 0$ sur $[a, x]$, donc:
  - $S(x) > 0,\ si\ a < x.$
  - $S(x) < 0,\ si\ a > x.$
- Si f(t) <0 sur [a,x], donc:
  - $S(x) < 0,\ si\ a < x.$
  - $S(x) > 0,\ si\ a > x.$

2.3. Propriétés de l'intégrale

Théorème

Soit $f : I = [a, b] \longrightarrow \mathbb{R}$ une fonction continue, et $c \in [a, b]$, alors:

- $\int_a^b f(x)\,dx = \int_a^c f(x)\,dx + \int_c^b f(x)\,dx.$
- $\int_a^a f(x)\,dx = 0$ et $\int_a^b f(x)\,dx = -\int_b^a f(x)\,dx.$

Linéarité de l'intégrale

Soient f et g deux fonctions continues sur I, et $\alpha,\ \beta \in \mathbb{R}$, alors:

$\int_a^b \alpha f(x) + \beta g(x)\,dx = \alpha \int_a^b f(x)\,dx + \beta \int_a^b g(x)\,dx.$

Remarque

$\int_a^b f(x).g(x)\,dx \neq \int_a^b f(x)dx.\int_a^b g(x)\,dx.$

Positivité de l'intégrale

Soit $f : I = [a, b] \longrightarrow \mathbb{R}$ une fonction continue et si f est positive alors:

$\int_a^b f(x)\,dx \geq 0.$

Croissance de l'intégrale

Soient $f : I \longrightarrow \mathbb{R}$ et $g : I \longrightarrow \mathbb{R}$ deux fonctions continues.

- Si $f(x) \leq g(x)$, alors $\int_a^b f(x)\,dx \leq \int_a^b g(x)\,dx.$
- $\left|\int_a^b f(x)\,dx\right| \leq \int_a^b |f(x)|\ dx.$

3. Méthodes d'intégration

3.1. Intégration direct

Soit f une fonction continue sur $[a, b]$.

$\int u'(x).f' \circ u(x)\,dx = f \circ u(x) + c$ et $\int_a^b u'(x).f' \circ u(x)\,dx = [f \circ u(x)]_a^b.$

Exemple

Calculer l'intégral suivant: $\int_2^3 \frac{x}{\sqrt{x^2+1}}\,dx.$

On a $\int_2^3 \frac{x}{\sqrt{x^2+1}}\,dx = \int_2^3 \frac{1}{2}\frac{2x}{\sqrt{x^2+1}}\,dx = \int_2^3 \frac{1}{2}\frac{u'(x)}{\sqrt{u(x)}}\,dx$, avec $u(x) = x^2 + 1.$

Alors $f \circ u(x) = \sqrt{u(x)}$, donc $\int_2^3 \frac{x}{\sqrt{x^2+1}}\,dx = \left[\sqrt{x^2+1}\right]_2^3 = \sqrt{10} - \sqrt{5}.$

Tableau des primitives usuelles

$f(x)$	$F(x)$	Domaine de validité
a (a constante réelle)	ax	$\mathbb{R}$
x^a, a réelle et $a \neq -1$	$\frac{1}{a+1}x^{a+1}$	$\mathbb{R}$ si a entier naturel. $\mathbb{R}^*$ si a entier negatif, $a \neq -1$. $]0, +\infty[$ dans les autres cas.
$\frac{1}{x}$	$\ln x$	$]0, +\infty[$
e^x	e^x	$\mathbb{R}$
$\sin x$	$-\cos x$	$\mathbb{R}$
$\cos x$	$\sin x$	$\mathbb{R}$
$\frac{1}{\cos^2 x}$	$\tan x$	$x \neq \frac{\pi}{2} + k\pi$
$\sinh x$	$\cosh x$	$\mathbb{R}$
$\cosh x$	$\sinh x$	$\mathbb{R}$

$\dfrac{1}{\cosh^2 x}$	$\tanh$	$\mathbb{R}$
$\dfrac{1}{\sqrt{1+x^2}}$	$\ln(x+\sqrt{1+x^2})$	$\mathbb{R}$
$\dfrac{1}{\sqrt{x^2-1}}$	$\ln\left\lvert x+\sqrt{x^2-1}\right\rvert$	$]-\infty,1[\cup]1,+\infty[$
$\dfrac{1}{1-x^2}$	$\dfrac{1}{2}\ln\left\lvert\dfrac{1+x}{1-x}\right\rvert$	$\mathbb{R}-[-1,1]$
$\dfrac{1}{1+x^2}$	$\arctan x$	$\mathbb{R}$
$\dfrac{1}{\sqrt{1-x^2}}$	$\arcsin x$	$]-1,1[$

3.2. Intégration par parties

Soient u et v deux fonctions de classe C^1 sur I, et $(a,b) \in I^2$, alors:

$\int_a^b u(x) + v'(x)\ dx = [u(x).v(x)]_a^b - \int_a^b u'(x).v(x)\ dx.$

[cf. intégration par partie]

Exemple

Calculer l'intégrale $I_1 = \int_0^1 xe^x\ dx.$

Soit

$$\begin{array}{rcl} u(x) = x & \longrightarrow & u'(x) = 1 \\ v'(x) = e^x & \longrightarrow & v(x) = e^x \end{array}$$

Donc $I_1 = [xe^x]_0^1 - \int_0^1 e^x\ dx = e^1 - [e^x]_0^1 = 1.$

Définition

On dit que f est une fonction de classe $C^n,\ n \in \mathbb{N}$ si et seulement si f est continue et tous les dérivées d'ordre inférieure ou égale à n sont continues.

3.3. Changement de variable

Théorème

Si $u(x)$ est dérivable avec $u'(x)$ continue sur $[\alpha,\beta]$, tel que $u([\alpha,\beta]) \subset [a,b]$, alors:

$\int_\alpha^\beta f \circ u(t).u'(t)\ dt = \int_{u(\alpha)}^{u(\beta)} f(x)\ dx$, avec: $x = u(t)$ et $dx = u'(t)\ dt$.

Si u bijective i.e u^{-1} existe, alors:

\int_{a}^{b} f(x)~dx=\int_{u^{-1}(a)}^{u^{-1}(b)}f \circ u(t)~dt.

Exemple

Calculer $I = \int_a^b e^{\sqrt{t}}\, dt$.

Soit $x = \sqrt{t}$, donc $x^2 = t$, et alors: $2x\, dx = dt$.

Si

$$\begin{cases} t = 0 & \Rightarrow \quad x = 0 \\ t = 1 & \Rightarrow \quad x = 1 \end{cases}$$

donc: $I = \int_0^1 e^x.2x\, dx = 2\int_0^1 xe^x\, dx = 2$.

Proposition

Soit $f : I \longrightarrow \mathbb{R}$ une fonction continue, alors:

- Si f est paire, alors: $\int_{-a}^{a} f(x)\, dx = 2\int_0^a f(x)\, dx$.
- Si f est impaire, alors: $\int_{-a}^{a} f(x)\, dx = 0$.

4. Test d'acquisitions

4.1. Exercice

Calculer les intégrales suivants:

1. $\int \arctan x\, dx$.
2. $\int (\ln x)^2 dx$.
3. $\int x^2 \cos x\, dx$.
4. $\int x\, e^x\, dx$.
5. $\int x \ln x\, dx$.

4.2. Exercice

Faire le changement de variable pour calculer les intégrales suivants:

1. $\int_1^4 \frac{1-\sqrt{t}}{\sqrt{t}} dt$.
2. $\int_1^e \frac{(\ln x)^n}{x} dx$.
3. $\int_1^2 \frac{e^x}{e^x+1} dx$.

4.3. Exercice

Calculer les intégrales suivants:

1. $\int \frac{\tan x}{1+\cos x} dx$.
2. $\int_0^{\pi} \frac{\cos x}{\sin^2 x - 5\sin x + 6} dx$.

Test de sortie

1. Exercice

1. Calculer les premières et les deuxième dérivées de $f(x) = x\ln(\sqrt{x})$.
2. Calculer l'intégrale: $\int_1^e f(x)\, dx$.

2. Exercice

Calculer les intégrales suivants a l'aide d’intégration par partie:

1. $\int_0^{\frac{\pi}{2}} t \sin t \, dt$.
2. $\int_0^{\frac{\pi}{2}} t^2 \sin t \, dt$.

3. Exercice

1. Étudier la dérivabilité sur $\mathbb{R}$ de la fonction f définie par:

   $$f(x) = x\sin(x)\sin(\frac{1}{x}), \quad si \quad x \neq 0 \quad et \quad 0 \quad si \quad x = 0.$$

2. Calculer l’intégrale suivant:

   $$\int_0^1 \frac{e^x}{\sqrt{e^x + 1}} dx.$$

4. Exercice

1. Étudier la continuité en $(0, 0)$ de la fonction f défini par:

   $$f(x, y) = \frac{xy^2}{x^2 + y^2} \quad si \quad (x, y) \neq (0, 0), \quad et \quad 0 \quad si \quad (x, y) = (0, 0).$$

2. Déterminer les dérivées partielles d’ordre 1 et 2 de la fonction g défini par:

   $$g(x, y) = (x^2 + y^2)(\cos x + \sin y), \ \forall (x, y) \in \mathbb{R}^2.$$

Solutions des exercices

Solution n°1

[exercice p. 7]

Indiquer si les affirmations suivantes sont vraies ou fausses.

1. Tout nombre réel est un nombre rationnel.
2. 0,5 est un nombre rationnel.
3. Le carré d'un nombre irrationnel n'est jamais rationnel.
4. Il n'existe aucun nombre réel qui ne soit pas un nombre décimal.
5. Le quotient de deux nombres décimaux non nuls est également un nombre décimal.
6. L'inverse d'un nombre décimal peut être un nombre entier.
7. Il existe deux nombres rationnels dont la somme est un nombre entier.

1. Faux, 2.Vrai, 3.Faux, 4.Faux, 5.Faux, 6. Vrai, 7.Vrai.

Solution n°2

[exercice p. 7]

Déterminer le domaine de définition de la fonction f définie par: $f(x) = 3x^2 + 5x - 7$.

Cette fonction est définie pour tout nombre réel et n'admet aucune valeur interdite.

Solution n°3

[exercice p. 7]

Le domaine de définition de la fonction g définie par: $g(x) = \dfrac{2x+1}{x-2}$ est:

- ◉ $\mathbb{R} - \{2\}$.
- ○ $]-\infty, 2] \cup]2, +\infty[$

Bibliographie

Université Paris-Dauphine. DUMI2E, Algèbre 1, 2009-2010.

Christian Houzel, « Limite (notion de) », Dictionnaire de mathématiques – algèbre, analyse, géométrie, Encyclopædia Universalis et Albin Michel, Paris 1997

J.-F. Burnol, Continuité et dérivabilité en un point et fonction réciproque

Jean-Yves Briend, Petit traité d'intégration, EDP Sciences, 2014, aperçu sur Google Livres