Université Abdelhafid Boussouf - Mila
Institut des Sciences et de la Technologie
Département des Mathématiques et informatique

2021 − 2022
MI
$1h$

Examen : Algèbre linéaire

N.B : La documentation n'est pas autorisé.

Exercice 1. *(Deux parties).*

*Part*1) *soit,*

$$E = \{P \in \mathbb{R}_3[X] / P(-1) = 0, P(1) = 0\}.$$

1. *Montrer que E est un sous espac vectoriel de* $\mathbb{R}_3[X]$.

2. *Déterminer une base et la dimension de E.*

3. *Montrer que* $F = Vect(1, X)$ *est un supplémentaire de E.*

*Part*2) *Soient* E, F *et* G *trois* $\mathbb{K}$*-espaces vectoriels, et soient* $f \in \mathcal{L}(E, F)$ *et* $g \in \mathcal{L}(F, G)$. *Démontrer que*

$$g \circ f = 0 \iff \operatorname{Im}(f) \subset \ker(g).$$

Exercice 2. *On considère l'application* $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ *définie par*

$$f(x, y) = (x - y, -3x + 3y).$$

1. *Montrer que f est ni injective ni surjective.*

2. *Déterminer A la matrice associée de f.*

3. *Calculer le déterminant de A.*

4. *Montrer, par deux méthodes différentes, que A n'est pas inversible ?*

Corrigé type

Solution d'Exercice 1 : Part1)

1. (Il existe au moins une méthode de résolution)

Soient $P = a_0 + a_1X + a_2X^2 + a_3X^3 \in E$, et

$$\begin{cases} P(-1) = a_0 - a_1 + a_2 - a_3 = 0, & (0.5pts) \\ P(1) = a_0 + a_1 + a_2 + a_3 = 0, & (0.5pts) \end{cases}$$

$$\begin{cases} a_0 = -a_2, \\ a_1 = -a_3, \end{cases} \quad (0.5pts)$$

Alors,

$$\begin{cases} E &= \{-a_2 - a_3X + a_2X^2 + a_3X^3 \mid a_2, a_3 \in \mathbb{R}\} \ (0.5pts) \\ &= \{a_2(-1 + X^2) + a_3(-X + X^3) \mid a_2, a_3 \in \mathbb{R}\} \ (0.5pts) \\ &= Vect\{-1 + X^2, -X + X^3\}. \ (0.5pts) \end{cases}$$

Comme $\{-1 + X^2, -X + X^3\} \subset \mathbb{R}_3[X]$, alors E est un sous espace vectoriel de $\mathbb{R}_3[X]$. (1pts)

2. La famille $\{-1 + X^2, -X + X^3\}$ est une famille génératrice de E et puisque les polynôme $-1 + X^2$ et$-X + X^3$ ont des degrés différent, alors elle est libre, donc elle est une base de E et $\dim E = 2$. (1pts)

3. Puisque Les vecteurs 1 et X ont des degrés différents, alors $\{1, X\}$ est une base de F (1pts). Donc

$$E + F = Vect\{1, X, -1 + X^2, -X + X^3\}. \ (1pts)$$

Mais les vecteurs de la famille $\{1, X, -1 + X^2, -X + X^3\}$ ont des degrés différents, alors $\{1, X, -1 + X^2, -X + X^3\}$ est une base de $E + F$ (0.75pts). D'où $\dim(E + F) = 4 = \dim \mathbb{R}_3[X]$. Donc, $E + F = \mathbb{R}_3[X]$. (0.75pts)

D'autre part, on sait que $4 = dim(E + F) = dimE + dimF - dim(E \cap F) = 2 + 2 - dim(E \cap F)$, (01pts) alors $E \cap F = \{0\}$, donc $E \oplus F = \mathbb{R}_3[X]$. (1pts)

Part2)

Supposons d'abord que $g \circ f = 0$, et prenons $y \in \mathrm{Im}(f)$. Alors il existe $x \in E$ tel que $y = f(x)$. Mais alors, $g(y) = g \circ f(x) = 0$, et donc $y \in \ker(g)$. (1.25pts)

Réciproquement, supposons que $\mathrm{Im}(f) \subset \ker(g)$. Alors, pour tout $x \in E$, $f(x) \in \mathrm{Im}(f) \subset \ker(g)$, et donc $g(f(x)) = 0$, prouvant que $g \circ f = 0$. (1.25pts)

Solution d'Exercice 2 : 1. **a)** (Il existe au moins une méthode de résolution)

$f(1,1) = (0,0) = f(0,0)$ et pourtant $(1,1) \neq (0,0)$ donc f n'est pas injective. (1pts)

b) f est un endomorphisme donc f est injectif si et seulement si f est surjectif. Ici, f n'est pas injectif donc f n'est pas surjectif. (1pts)

2. on a, $f(1,0) = (1,-3)$, $(0.5pts)$ $f(0,1) = (-1,3)$ (0.5pts), alors

$$A = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ -3 & 3 \end{pmatrix}. \ (1pts)$$

3. $det(A) = (1 \times 3) - (-3 \times -1) = 0$. (1pts)

4. **M1 :** A n'est pas inversible, car $det(A) = 0$. (1pts)

M2 : On a $(1,-3) = -(-1,3)$ (0.5pts), alors $rg(A) = 1 < 2$ (0.5pts). Donc A n'est pas inversible.