Transformations Intégrales

3ème Math
2021 - 2022

Série de TD n° 2
Transformation de Fourier

Exo 1 :

Déterminer les transformées de Fourier des fonctions suivantes :

① $x \longmapsto \mathbb{1}_{[-1,1]}(x)$.

② $x \longmapsto \dfrac{\sin x}{x}$

③ $x \longmapsto \exp\left(\dfrac{-|x|}{T}\right)$, $T \in \mathbb{R}$ للطالب

④ $x \longmapsto \dfrac{1}{\pi} \cdot \dfrac{1}{1+x^2}$ للطالب

Exo 2 :

$$f : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$$
$$x \longmapsto f(x) = \begin{cases} 1+x & \text{si } x \in [-1,0] \\ 1-x & \text{si } x \in [0,1] \\ 0 & \text{si } |x| > 1. \end{cases}$$

① Faire la représentation graphique de f

② Calculer la transformée de Fourier de f.

③ Déduire la valeur de l'intégrale

$$\int_0^{\infty} \frac{\sin^4 x}{x^4}\, dx.$$

Exo3 :

Soit l'équation intégrale, pour $0 < a < b$ et $f \in L^1(\mathbb{R})$:

$$\int_{\mathbb{R}} \frac{f(t)}{(x-t)^2 + a^2}\, dt = \frac{1}{x^2+b^2} \quad \cdots \; (*)$$

Exprimer $(*)$ sous forme d'une équation de convolution, déterminer $\hat{f}(\nu)$ et en déduire $f(t)$.

Exo4 :

Soit $f(t) = e^{-\pi x^2}$. Déterminer $\left(\hat{f}(\nu)\right)'$.

En déduire une équation différentielle en $\hat{f}$ que l'on ~~rédou~~ résoudra.

(On rappelle que $\int_{\mathbb{R}} e^{-\pi x^2}\, dx = 1$).