Propriété :

$$F(F(f(x))) = \hat{\hat{f}}(x) = 2\pi f(-x)$$

Preuve :

Nous avons : $\hat{f}(w) = \int_{-\infty}^{+\infty} f(x)\, e^{-iwx}\, dx$

et $\mathcal{F}^{-1}(\hat{f}(w)) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} \hat{f}(w)\, e^{iwx}\, dw$

$$\mathcal{F}^{-1}(\hat{f}(w)) = f(x)$$

donc $f(-x) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} \hat{f}(t)\, e^{-itx}\, dt$

$$= \frac{1}{2\pi} \cdot F(\hat{f}(t))$$

$$= \frac{1}{2\pi} F(F(f(x)))$$

d'où $F(F(f(x))) = 2\pi f(-x)$

Exercice 03 :

Nous avons : $\displaystyle\int_{\mathbb{R}} \frac{f(t)}{(x-t)^2 + a^2}\, dt = \frac{1}{x^2+b^2}$ ---- (*)

Soit $g_c(t) = \frac{1}{t^2+c^2}$ donc $f * g_a = g_b$

En effet :

$$f * g_a(x) = \int_{\mathbb{R}} f(t)\, g_a(t-x)\, dt$$

$$= \int_{\mathbb{R}} f(t) \frac{1}{(t-a)^2 + a^2}\, dt$$

$$\overset{(*)}{=} \frac{1}{x^2+b^2} = g_b(x).$$

$$f * g_a = g_b \Longrightarrow \widehat{f * g_a} = \hat{g}_b$$

$$\Longrightarrow \hat{f} \cdot \hat{g}_a = \hat{g}_b$$

d'où $$\hat{f} = \frac{\hat{g}_b}{\hat{g}_a}$$

$$\hat{f}(x) = \frac{\hat{g}_b(x)}{\hat{g}_a(x)} \overset{(**)}{=} \frac{\frac{\pi}{b} e^{-b|x|}}{\frac{\pi}{a} e^{-a|x|}} = \frac{a}{b} e^{-(b-a)|x|}$$

Donc

$$F^{-1}(\hat{f}(x)) = \frac{a}{b} F^{-1}\left(e^{-(b-a)|x|}\right)$$

$$\begin{array}{c} \| \\ f(t) \end{array} \overset{(***)}{=} \frac{a}{b} \cdot \frac{b-a}{\pi} \cdot \frac{1}{(b-a)^2 + t^2}$$

d'où $$f(t) = \frac{a\,(b-a)}{b\pi\left[(b-a)^2 + t^2\right]}.$$

Montrons (★★) :

Soit $f(x) = e^{-a|x|}$, $a > 0$

f est une fonction paire alors:

$$F(f(x)) = F(e^{-a|x|}) = 2.\int_0^{+\infty} e^{-ax} \cos wx\, dx$$

$$= 2\,\mathrm{Re}\left(\int_0^{\infty} e^{-ax} e^{iwx}\, dx\right)$$

$$= 2.\,\mathrm{Re}\left(\int_0^{\infty} e^{(-a+iw)x}\, dx\right)$$

$$= 2.\,\mathrm{Re}\left(\frac{1}{-a+iw} e^{(-a+iw)x}\Big|_0^{\infty}\right)$$

$$= 2.\,\mathrm{Re}\left(\frac{1}{a-iw}\right) = \frac{2a}{a^2+w^2}$$

Nous avons: $F(F(f(x))) = 2\pi f(-x)$

alors: $F\left(\frac{2a}{a^2+w^2}\right) = 2\pi e^{-a|\cancel{x}|}$

donc $F\left(\frac{1}{a^2+w^2}\right) = \frac{2\pi}{2a} e^{-a|\cancel{x}|}$

d'où $\boxed{F\left(\frac{1}{a^2+w^2}\right) = \frac{\pi}{a} e^{-a|x|}}$

$$F^{-1}\left(e^{-a|x|}\right) = \frac{a}{\pi} \cdot \frac{1}{a^2+w^2} \quad \ldots \text{(★★★)}$$