Transformations Intégrales

3ème Math

Série de TD n° 3

Exo 1 : Calculer les transformées de Laplace des fonctions suivantes.

1. $f_1(t) = e^{at}\cos wt$
2. $f_2(t) = e^{at}\sin wt$
3. $f_3(t) = \cos^2 t$
4. $f_4(t) = t\,e^{-t}\cos t$

Exo 2 :

Soit $a \in \mathbb{R}_+$.

① Calculer la transformée de Laplace de f et déterminer l'absise de convergence simple

$$f(t) = t\,e^{at}$$

② Soit $k \in \mathbb{N}$; $f_k : \mathbb{R}_+ \longrightarrow \mathbb{R}$, $t \longmapsto f_k(t) = \dfrac{t^k}{k!}e^{at}$

Montrer par récurrence que :

$$\mathcal{L}(f_k)(p) = \frac{1}{(p-a)^{k+1}} \quad \cdots \quad (\star)$$

A

Ex03 : Trouver la transformée de Laplace inverse des fonctions suivantes.

ⓐ $F(P) = \dfrac{2P+1}{P^2+5P+6}$ ⓓ $F(P) = \dfrac{1}{P(P^2+w^2)}$.

ⓑ $F(P) = \dfrac{e^{-2P}}{P^2(P-1)}$

ⓒ $F(z) = \dfrac{3z}{z^2+4z+4}$.

Ex04 : Résoudre les problèms aux valeurs initiales

1- $\begin{cases} y''(t) - y(t) = 3e^{-2t} + t + 1, \quad y(0) = y'(0) = 0. \\ y(0) = 0 = y'(0) \end{cases}$

2- $\begin{cases} y''(t) + 2y'(t) + 5y(t) = 0 \\ y(0) = 2, \quad y'(0) = -4 \end{cases}$

3- $\begin{cases} y''(t) + 3y = \sin(t) \\ y(0) = 1, \quad y'(0) = 2. \end{cases}$

4- $\begin{cases} y'''(t) + 5y''(t) + 6y'(t) = 0. \\ y(0) = 3, \quad y'(0) = -2, \quad y''(0) = 7 \end{cases}$

Exercice 05

Résoudre l'équation intégrale

$$y(t) = t + \int_0^t y(x)\sin(t-x)\,dx$$

Solution :

$$y(t) = t + \int_0^t y(x)\sin(t-x)\,dx$$

$$= t + y * \sin t$$

Donc par la transformée de Laplace on obtient

$$Y(P) = \mathcal{L}(t) + Y(P)\cdot\mathcal{L}(\sin t)$$

$$= \frac{1}{p^2} + Y(P)\cdot\frac{1}{p^2+1}$$

donc $Y(P) = \dfrac{p^2+1}{p^4} = \dfrac{1}{p^2} + \dfrac{1}{p^4}$

d'où

$$y(t) = \mathcal{L}^{-1}\left(\frac{1}{p^2}\right) + \mathcal{L}^{-1}\left(\frac{1}{p^4}\right)$$

$$\boxed{y(t) = t + \frac{1}{6}t^3}$$