



Spécialité : Génie mécanique 1^{ère} année Master
Option: énergétique

Année universitaire 2020/2021

L'auteur : Dr Ali Bendjaghlouli

Cours: dynamique des gaz

Chapitre 1+2+3:

Introduction

Dans ce chapitre, on s'intéresse à la dynamique des gaz pour les écoulements stationnaires monodirectionnels. Pour cela, précisons les hypothèses à utiliser:

- On néglige les effets de viscosités, essentiellement la dissipation de l'énergie mécanique sous forme de chaleur, ce qui rend l'écoulement irréversible
- On néglige les forces de volume dans l'écoulement du gaz (fluide non pesant)
- L'écoulement du gaz est adiabatique $\Delta q=0$
- Absence de machine $\Delta w=0$
- L'écoulement est sans combustion (pas de réaction chimique dans le gaz)

Dans ces conditions, les écoulements qu'on va traiter sont isentropiques c.à.d. réversible et adiabatique. Un écoulement est réversible s'il n'y a pas d'onde de choc et si les forces de frottement sont négligeables.

Equations de bases

Equation de masse

Elle traduit la conservation du débit massique : $q_m = \rho u S = C^{te}$

Son expression différentielle est : $d\rho \cdot u S + \rho du \cdot S + \rho u \cdot dS = 0 \Rightarrow \frac{d\rho}{\rho} + \frac{du}{u} + \frac{dS}{S} = 0$

Equation d'Euler

Elle s'établit par un bilan de quantité de m^v sur un élément de volume du gaz en écoulement :

$$\rho u \cdot du + dp = 0 \quad \text{après intégration} \rightarrow \quad \frac{u^2}{2} + \int \frac{dp}{\rho} = C^{te}$$

Equation de l'énergie

D'après le 1^{er} principe de la thermodynamique : $\Delta h + \Delta e_c + \Delta e_p = q + w$

A partir des hypothèses précédentes, l'équation devient : $\Delta h + \Delta e_c = 0 \Rightarrow h + \frac{1}{2}u^2 = h_t = C^{te}$

Le gaz est considéré comme gaz parfait : $dh = C_p dT \quad h(T=0) = 0 \rightarrow \quad h = C_p T$

Ainsi l'équation de l'énergie (conservation de l'enthalpie totale) peut être écrite sous les

formes suivantes: $C_p T + \frac{1}{2}u^2 = C^{te}, \quad \frac{\gamma}{\gamma-1} \cdot \frac{p}{\rho} + \frac{1}{2}u^2 = C^{te}$ "équation de Barré Saint-Venant"

Etat générateur

C'est l'état du gaz à une vitesse nulle. Exp: état du gaz dans un réservoir d'alimentation d'une conduite, la chambre de combustion d'un réacteur.

$$u = 0, \quad p = p_i, \quad T = T_i, \quad \rho = \rho_i$$

Ainsi, grâce à cet état on peut exprimer la constante de l'équation de Barré :

$$C_p T + \frac{1}{2}u^2 = C_p T_i, \quad \frac{\gamma}{\gamma-1} \cdot \frac{p}{\rho} + \frac{1}{2}u^2 = \frac{\gamma}{\gamma-1} \cdot \frac{p_i}{\rho_i}$$

Point d'arrêt

Le cas d'un obstacle dans un écoulement permanent et uniforme crée un point R où $u_R = 0$.

Appliquons la relation de Barré entre l'état générateur et ce point d'arrêt :

$$C_p T_R = C_p T_i, \quad \frac{p_R}{\rho_R} = \frac{p_i}{\rho_i}$$

Ainsi la température d'arrêt est la température génératrice : $T_R = T_i$

Comme l'écoulement est isentropique on a $\frac{p_R}{\rho_R^\gamma} = \frac{p_i}{\rho_i^\gamma} \Rightarrow \frac{r T_R}{\rho_R^{\gamma-1}} = \frac{r T_i}{\rho_i^{\gamma-1}}$

↳ Les caractéristiques du point d'arrêt sont les mêmes que celles de l'état générateur.

Etat critique

C'est l'état du gaz en un point où sa vitesse d'écoulement atteint la vitesse locale du son.

$$u = a_c, \quad M = 1, \quad p = p_c, \quad T = T_c, \quad \rho = \rho_c$$

L'équation de Barré entre l'état critique et l'état générateur, s'écrit alors :

$$C_p T_c + \frac{1}{2}a_c^2 = C_p T_i, \quad \frac{\gamma}{\gamma-1} \cdot \frac{p_c}{\rho_c} + \frac{1}{2}a_c^2 = \frac{\gamma}{\gamma-1} \cdot \frac{p_i}{\rho_i}$$

La vitesse critique dépend uniquement de la température génératrice :

$$u_c = a_c = \sqrt{\gamma r T_c} = \sqrt{\frac{2\gamma r}{\gamma+1} T_i}$$

Autres formulations de l'équation de Barré Saint-Venant (BSV)

$$\frac{\gamma}{\gamma-1} \cdot \frac{p_i}{\rho_i} = \frac{\gamma}{\gamma-1} \cdot \frac{p}{\rho} + \frac{1}{2}u^2 \quad \alpha^2 = \gamma p / \rho \rightarrow \quad \frac{a_i^2}{\gamma-1} = \frac{a^2}{\gamma-1} + \frac{1}{2}u^2$$

$$\frac{T_i}{T} = 1 + \frac{\gamma-1}{2} \cdot M^2$$

$$\times \left(\frac{\gamma-1}{a^2} \right)$$

Lois d'évolution isentropiques

$$p \cdot \frac{1}{\rho^\gamma} = c^{te} \quad \frac{\rho_2}{\rho_1} = \left(\frac{p_2}{p_1}\right)^{\frac{1}{\gamma}}$$

$$p \cdot T^{\frac{\gamma}{\gamma-1}} = c^{te} \quad \frac{p_2}{p_1} = \left(\frac{T_2}{T_1}\right)^{\frac{\gamma}{\gamma-1}}$$

$$\frac{1}{\rho} \cdot T^{\frac{1}{\gamma-1}} = c^{te} \quad \frac{\rho_2}{\rho_1} = \left(\frac{T_2}{T_1}\right)^{\frac{1}{\gamma-1}}$$

Lois des écoulements compressibles isentropiques

$$\frac{T_2}{T_1} = 1 + \frac{\gamma-1}{2} \cdot M_1^2$$

$$\frac{T_2}{T_1} = \frac{1 + \frac{\gamma-1}{2} \cdot M_2^2}{1 + \frac{\gamma-1}{2} \cdot M_1^2}$$

$$\frac{p_2}{p_1} = \left(1 + \frac{\gamma-1}{2} \cdot M_1^2\right)^{\frac{\gamma}{\gamma-1}}$$

$$\frac{p_2}{p_1} = \left(\frac{1 + \frac{\gamma-1}{2} \cdot M_2^2}{1 + \frac{\gamma-1}{2} \cdot M_1^2}\right)^{\frac{\gamma}{\gamma-1}}$$

$$\frac{\rho_2}{\rho_1} = \left(1 + \frac{\gamma-1}{2} \cdot M_1^2\right)^{\frac{1}{\gamma-1}}$$

$$\frac{\rho_2}{\rho_1} = \left(\frac{1 + \frac{\gamma-1}{2} \cdot M_2^2}{1 + \frac{\gamma-1}{2} \cdot M_1^2}\right)^{\frac{1}{\gamma-1}}$$

Remarque

Dans l'état critique où $M=1$, les relations précédentes prennent les formes suivantes :

$$\frac{T_c}{T_c} = \frac{\gamma+1}{2}, \quad \frac{p_c}{p_c} = \left(\frac{\gamma+1}{2}\right)^{\frac{\gamma}{\gamma-1}}, \quad \frac{\rho_c}{\rho_c} = \left(\frac{\gamma+1}{2}\right)^{\frac{1}{\gamma-1}}, \quad \frac{a_c}{a_c} = \sqrt{\frac{\gamma+1}{2}}$$

Pour un écoulement isentropique d'air en état critique (au col d'une conduite), on a :

$$\frac{T_c}{T_i} = 0.8333 \Rightarrow T_i \underset{17^2/p}{\succ} T_c \quad \frac{p_c}{p_i} = 0.5823 \Rightarrow p_i \underset{48^2/p^2}{\succ} p_c \quad \frac{\rho_c}{\rho_i} = 0.6339 \Rightarrow \rho_i \underset{37^2/\rho}{\succ} \rho_c$$

Les tables des écoulements compressibles ($\gamma=1.405$) en régime isentropiques :

M	$\frac{p}{p_i}$	$\frac{\rho}{\rho_i}$	$\frac{T}{T_i}$	$\frac{S}{S_c}$	a ($T_i = 288 \text{ °K}$)
0,10	0,993 0	0,995	0,998 0	5,820	33,4
0,11	0,991 6	0,994	0,997 5	5,303	36,9
0,12	0,990 0	0,993	0,997 0	4,870	40,4
0,13	0,988 3	0,992	0,996 5	4,503	43,8
0,14	0,986 4	0,991	0,995 9	4,188	47,2
0,15	0,984 4	0,990	0,995 3	3,915	50,6
0,16	0,982 3	0,988	0,994 7	3,676	54,0
0,17	0,980 0	0,986	0,994 1	3,465	57,4
0,18	0,977 6	0,984	0,993 4	3,278	60,8
0,19	0,975 1	0,982	0,992 7	3,111	64,2
0,20	0,972 4	0,980	0,992 0	2,961	67,6
0,21	0,969 6	0,978	0,991 2	2,826	71,0
0,22	0,966 7	0,976	0,990 3	2,704	74,4
0,23	0,963 7	0,974	0,989 4	2,594	77,8
0,24	0,960 6	0,972	0,988 5	2,494	81,2
0,25	0,957 3	0,970	0,987 5	2,402	84,6
0,26	0,953 9	0,968	0,986 5	2,317	87,9
0,27	0,950 4	0,965	0,985 4	2,238	91,2
0,28	0,946 8	0,962	0,984 3	2,165	94,5
0,29	0,943 1	0,959	0,983 2	2,097	97,8
0,30	0,939 3	0,956	0,982 0	2,034	101,1
0,31	0,935 4	0,953	0,980 8	1,975	104,4
0,32	0,931 4	0,950	0,979 6	1,920	107,7

\mathcal{M}	$\frac{p}{p_i}$	$\frac{\rho}{\rho_i}$	$\frac{T}{T_i}$	$\frac{S}{S_c}$	a ($T_i = 288 \text{ }^\circ\text{K}$)
0,56	0,807 7	0,860	0,940 3	1,240 0	184,6
0,57	0,801 7	0,856	0,938 3	1,226 0	187,7
0,58	0,795 6	0,851	0,936 3	1,212 6	190,8
0,59	0,789 5	0,846	0,934 2	1,199 8	193,9
0,60	0,783 4	0,841	0,932 1	1,187 6	197,0
0,61	0,777 2	0,836	0,930 0	1,176 0	200,0
0,62	0,771 0	0,831	0,927 9	1,165 0	203,0
0,63	0,764 8	0,826	0,925 8	1,154 5	206,0
0,64	0,758 5	0,821	0,923 6	1,144 5	209,0
0,65	0,752 2	0,816	0,921 4	1,135 0	212,0
0,66	0,745 9	0,811	0,919 2	1,125 9	215,0
0,67	0,739 5	0,806	0,916 9	1,117 3	218,0
0,68	0,733 1	0,801	0,914 6	1,109 1	221,0
0,69	0,726 7	0,796	0,912 3	1,101 3	224,0
0,70	0,720 2	0,791	0,909 9	1,093 9	227,0
0,71	0,713 8	0,786	0,907 5	1,086 9	229,9
0,72	0,707 3	0,781	0,905 1	1,080 3	232,8
0,73	0,700 8	0,776	0,902 7	1,074 0	235,7
0,74	0,694 3	0,771	0,900 3	1,068 0	238,6
0,75	0,687 8	0,766	0,897 9	1,062 3	241,5
0,76	0,681 3	0,761	0,895 4	1,056 9	244,4
0,77	0,674 8	0,756	0,892 9	1,051 8	247,3
0,78	0,668 3	0,751	0,890 4	1,047 0	250,2
0,79	0,661 8	0,746	0,887 9	1,042 5	253,1

\mathcal{M}	$\frac{p}{p_i}$	$\frac{\rho}{\rho_i}$	$\frac{T}{T_i}$	$\frac{S}{S_c}$	a ($T_i = 288 \text{ }^\circ\text{K}$)
0,80	0,655 3	0,741	0,885 4	1,038 2	255,9
0,81	0,649	0,736	0,882 8	1,034 2	258,7
0,82	0,642	0,730	0,880 2	1,030 4	261,5
0,83	0,636	0,724	0,877 6	1,026 9	264,3
0,84	0,629	0,718	0,875 0	1,023 7	267,1
0,85	0,623	0,712	0,872 4	1,020 7	269,9
0,86	0,616	0,707	0,869 8	1,017 9	272,7
0,87	0,610	0,702	0,867 2	1,015 3	275,5
0,88	0,603	0,697	0,864 5	1,012 9	278,3
0,89	0,597	0,692	0,861 7	1,010 7	281,0
0,90	0,590	0,687	0,859 0	1,008 7	283,7
0,91	0,584	0,681	0,856 3	1,006 9	286,4
0,92	0,577	0,675	0,853 6	1,005 4	289,1
0,93	0,571	0,670	0,850 9	1,004 1	291,8
0,94	0,565	0,665	0,848 2	1,003 0	294,5
0,95	0,559	0,660	0,845 4	1,002 1	297,2
0,96	0,553	0,655	0,842 7	1,001 4	299,9
0,97	0,547	0,650	0,839 9	1,000 8	302,5
0,98	0,540	0,645	0,837 2	1,000 4	305,1
0,99	0,534	0,640	0,834 4	1,000 2	307,7
1,00	0,528	0,635	0,831 6	1,000 0	310,3

\mathcal{M}	$\frac{P}{P_i}$	$\frac{P_i'}{P_i}$	$\frac{P_2}{P_1}$	$\frac{\rho}{\rho_i}$	$\frac{\rho_2}{\rho_1}$	$\frac{T}{T_i}$	$\frac{S}{S_c}$	a ($T_i=288^\circ\text{K}$)
1,00	0,527 5	1,000 00	1,000	0,634 3	1,000 0	0,831 6	1,000 0	310,3
1,01	0,521 3	0,999 99	1,023	0,629 0	1,016 7	0,828 8	1,000 2	312,9
1,02	0,515 2	0,999 98	1,047	0,623 7	1,033 4	0,826 0	1,000 5	315,5
1,03	0,509 1	0,999 94	1,071	0,618 4	1,050 1	0,823 1	1,000 9	318,0
1,04	0,503 0	0,999 88	1,095	0,613 2	1,066 9	0,820 3	1,001 5	320,6
1,05	0,497 0	0,999 8	1,119	0,608 0	1,083 7	0,817 5	1,002 2	323,1
1,06	0,491 0	0,999 7	1,144	0,602 8	1,100 6	0,814 6	1,003 1	325,6
1,07	0,485 1	0,999 5	1,169	0,597 6	1,117 5	0,811 8	1,004 1	328,1
1,08	0,479 2	0,999 4	1,194	0,592 4	1,134 5	0,808 9	1,005 2	330,6
1,09	0,473 3	0,999 2	1,219	0,587 2	1,151 5	0,806 1	1,006 5	333,1
1,10	0,467 5	0,998 9	1,245	0,582 1	1,168 5	0,803 2	1,007 9	335,5
1,11	0,461 7	0,998 5	1,271	0,577 0	1,185 6	0,800 3	1,009 5	338,0
1,12	0,456 0	0,998 1	1,297	0,571 9	1,202 7	0,797 5	1,011 2	340,4
1,13	0,450 3	0,997 6	1,323	0,566 8	1,219 8	0,794 6	1,013 1	342,8
1,14	0,444 6	0,997 1	1,350	0,561 7	1,237 0	0,791 7	1,015 1	345,2
1,15	0,439 0	0,996 5	1,377	0,556 6	1,254 2	0,788 8	1,017 3	347,6
1,16	0,433 4	0,995 9	1,404	0,551 6	1,251 4	0,785 9	1,019 6	350,0
1,17	0,427 9	0,995 2	1,431	0,546 8	1,288 7	0,783 0	1,022 0	352,3
1,18	0,422 4	0,994 4	1,458	0,541 6	1,306 0	0,780 1	1,024 6	354,7
1,19	0,417 0	0,993 6	1,486	0,536 6	1,323 3	0,777 2	1,027 3	357,0

\mathcal{M}	$\frac{P}{P_i}$	$\frac{P_i'}{P_i}$	$\frac{P_2}{P_1}$	$\frac{\rho}{\rho_i}$	$\frac{\rho_2}{\rho_1}$	$\frac{T}{T_i}$	$\frac{S}{S_c}$	a ($T_i=288^\circ\text{K}$)
1,20	0,411 6	0,992 8	1,514	0,531 7	1,340 6	0,774 3	1,030 1	359,3
1,21	0,406 3	0,992	1,542	0,526 8	1,357 9	0,771 4	1,033 1	361,6
1,22	0,401 0	0,991	1,570	0,521 9	1,375 2	0,768 5	1,036 2	363,9
1,23	0,395 7	0,990	1,599	0,517 0	1,392 5	0,765 6	1,039 4	366,2
1,24	0,390 5	0,989	1,628	0,512 2	1,409 8	0,762 7	1,042 8	368,5
1,25	0,385 3	0,987	1,657	0,507 4	1,427 1	0,759 7	1,046 3	370,8
1,26	0,380 2	0,986	1,686	0,502 6	1,444 4	0,756 8	1,050 0	373,0
1,27	0,375 1	0,985	1,716	0,497 8	1,461 8	0,753 9	1,053 8	375,2
1,28	0,370 1	0,983	1,746	0,493 0	1,479 2	0,751 0	1,057 7	377,4
1,29	0,365 1	0,982	1,776	0,488 3	1,496 6	0,748 0	1,061 7	379,6
1,30	0,360 2	0,980	1,806	0,483 6	1,514 0	0,745 1	1,065 9	381,8
1,31	0,355 3	0,978	1,836	0,478 9	1,531 3	0,742 2	1,070 2	384,0
1,32	0,350 5	0,976	1,867	0,474 3	1,548 7	0,739 3	1,074 6	386,2
1,33	0,345 7	0,974	1,898	0,469 7	1,566 0	0,736 3	1,079 2	388,4
1,34	0,341 0	0,972	1,929	0,465 1	1,583 3	0,733 4	1,083 9	390,5
1,35	0,336 3	0,970	1,961	0,460 5	1,600 6	0,730 5	1,088 7	392,6
1,36	0,331 7	0,968	1,993	0,456 0	1,618 0	0,727 6	1,093 6	394,7
1,37	0,327 1	0,966	2,025	0,451 5	1,635 3	0,724 7	1,098 7	396,8
1,38	0,322 5	0,963	2,057	0,447 0	1,652 6	0,721 7	1,103 9	398,9
1,39	0,318 0	0,961	2,089	0,442 5	1,669 9	0,718 8	1,109 2	401,0

\mathcal{M}	$\frac{p}{p_i}$	$\frac{p_i'}{p_0}$	$\frac{p_2}{p_1}$	$\frac{\rho}{\rho_i}$	$\frac{\rho_2}{\rho_1}$	$\frac{T}{T_i}$	$\frac{S}{S_c}$	a ($T_i=288^\circ\text{K}$)
1,40	0,313 6	0,958	2,122	0,438 1	1,687 2	0,715 9	1,114 7	403,1
1,50	0,271 9	0,929	2,461	0,395 7	1,859	0,687 0	1,176	423
1,60	0,234 8	0,894	2,823	0,356 6	2,028	0,658 6	1,249	443
1,70	0,202 2	0,855	3,208	0,320 6	2,193	0,630 8	1,336	461
1,80	0,173 7	0,813	3,617	0,287 8	2,353	0,603 8	1,436	477
1,90	0,149 0	0,769	4,049	0,258 0	2,508	0,577 7	1,551	492
2,00	0,127 7	0,723	4,505	0,231 1	2,657	0,552 5	1,682	507
2,20	0,093 4	0,630	5,486	0,185 1	2,939	0,505 0	1,997	533
2,40	0,068 4	0,542	6,561	0,148 3	3,197	0,461 6	2,392	556
2,60	0,050 2	0,462	7,30	0,118 9	3,431	0,422 2	2,879	576
2,80	0,036 9	0,392	8,992	0,095 6	3,644	0,386 5	3,474	594
3,00	0,027 3	0,330	10,347	0,077 1	3,835	0,354 4	4,19	608
3,50	0,013 2	0,215	14,14	0,046 0	4,232	0,287 3	6,70	640
4,00	0,006 66	0,141	18,53	0,028 24	4,538	0,235 8	10,53	663
4,50	0,003 51	0,092 9	23,49	0,017 90	4,774	0,196 1	16,21	680
5,00	0,001 927	0,063 1	29,04	0,011 68	4,959	0,165 0	24,38	693
5,50	0,001 100	0,043 5	35,17	0,007 83	5,105	0,140 3	35,81	702
6,00	0,000 651	0,030 6	41,89	0,005 39	5,222	0,120 6	51,45	711
7,00	0,000 250	0,015 9	57,08	0,002 73	5,395	0,091 7	100,00	723
8,00	0,000 107	0,008 87	74,61	0,001 49	5,513	0,071 6	181,4	730

Vitesse de décharge

Il s'agit de la vitesse atteinte en détendant un gaz de façon isentropique à partir des conditions d'arrêt (état générateur), jusqu'à ce que l'on atteigne une pression de valeur "p". En appliquant la relation de Barré entre ces deux états, on obtient

$$c_p T + \frac{1}{2} u_D^2 = c_p T_i \Rightarrow u_D = \left[2c_p T_i \left(1 - \frac{T}{T_i} \right) \right]^{1/2}$$

En utilisant la relation isentropique établie entre p/p_i et T/T_i , on obtient finalement

$$u_D = \left[2c_p T_i \left(1 - \frac{p}{p_i} \right)^{\frac{\gamma-1}{\gamma}} \right]^{1/2}$$

Remarque

Si on continue la **détente jusqu'au vide** ($p=0$), ce qui entraîne une température nulle $T=0$, l'écoulement atteint une **vitesse maximale** dépendant que des conditions génératrices

$$u_{max} = \sqrt{2c_p T_i} = \sqrt{\frac{2\gamma}{\gamma-1} \frac{p_i}{\rho_i}} = a_i \sqrt{\frac{2}{\gamma-1}}$$

Exp: u_{max} est la vitesse maximale que peuvent atteindre les gaz d'échappement d'une fusée dans le vide.

Théorème d'Hugoniot

Examinons l'effet de la variation de la section $S(x)$ en un endroit d'un canal sur les caractéristiques de l'écoulement d'un gaz :

L'équation de continuité :
$$\frac{d\rho}{\rho} + \frac{du}{u} + \frac{dS}{S} = 0$$

L'équation d'Euler :
$$\frac{dp}{\rho} + u du = 0 \Rightarrow \left(\frac{\partial p}{\partial \rho}\right)_s \frac{d\rho}{\rho} + u du$$

Comme la célérité sonore locale est définie par $a^2 = \left(\frac{\partial p}{\partial \rho}\right)_s$, on peut écrire :

$$a^2 \frac{d\rho}{\rho} + u^2 \frac{du}{u} = 0 \Rightarrow \frac{d\rho}{\rho} = -M^2 \frac{du}{u}$$

Substituant dans l'équation de continuité, on obtient l'équation d'Hugoniot :

$$\frac{du}{u}(1 - M^2) + \frac{dS}{S} = 0$$

d'où on déduit la relation entre les variations suivantes :

$$\frac{dS}{S} = -\frac{du}{u}(1 - M^2), \quad \frac{dS}{S} = -\frac{dp}{\rho u^2}(1 - M^2)$$

Ce résultat a une grande importance, car il permet de déterminer la forme à donner à la conduite pour effectuer une détente (tuyères) ou une compression (diffuseurs).

Cas de tuyère ($dp < 0$) :

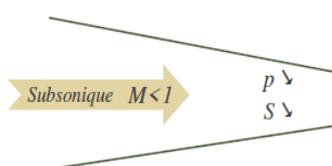
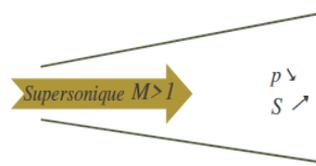


Figure 1



Convergente ($dS < 0$) si l'écoulement est subsonique
($M < 1$)

Divergente ($dS > 0$) si l'écoulement est supersonique
($M > 1$)

Cas de diffuseur ($dp > 0$) :

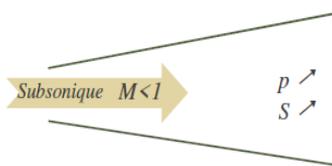
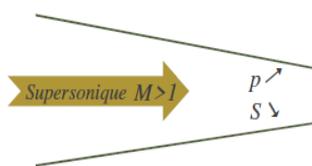


Figure 2



Divergent ($dS > 0$) si l'écoulement est subsonique
($M < 1$)

Convergent ($dS < 0$) si l'écoulement est supersonique
($M > 1$)

Ainsi, l'écoulement ne peut être sonique que là où la section passe par un extremum ($dS=0$) qui, compte tenu de la description ci-dessous, doit être un minimum c.à.d. au col.

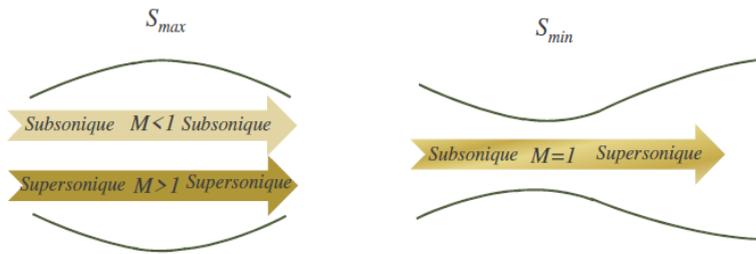


Figure3 : Ecoulement compressible dans un conduit de section variable

- On ne peut alors accélérer un écoulement jusqu'à des conditions supersoniques qu'au moyen d'une tuyère convergente-divergente, que l'on appelle tuyère de Laval.
- L'évolution en aval du col peut être soit subsonique, soit supersonique. C'est la condition aux limites en aval du divergent qui détermine lequel des deux cas se réalise.

Une telle relation s'obtient de la conservation du débit massique tout le long de la conduite :

$$\rho_1 \cdot S_1 \cdot u_1 = \rho_2 \cdot S_2 \cdot u_2 \Rightarrow \frac{S_1}{S_2} = \frac{\rho_2}{\rho_1} \cdot \frac{u_2}{u_1}$$

Comme l'écoulement est isentropique, on peut écrire : $\frac{\rho_2}{\rho_1} = \left(\frac{T_2}{T_1}\right)^{\frac{1}{\gamma-1}}$

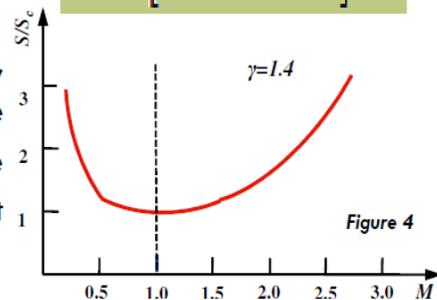
En explicitant le rapport des vitesses en fonction du rapport des nombres de Mach

$$u = M \sqrt{\gamma r T} \Rightarrow \frac{u_2}{u_1} = \frac{M_2}{M_1} \cdot \left(\frac{T_2}{T_1}\right)^{\frac{1}{2}}$$

le rapport $\frac{S_1}{S_2}$ est :

$$\frac{S_1}{S_2} = \frac{M_2}{M_1} \cdot \left(\frac{1 + \frac{\gamma-1}{2} M_1^2}{1 + \frac{\gamma-1}{2} M_2^2} \right)^{\frac{\gamma+1}{2(\gamma-1)}} \xrightarrow{M_2=1} \frac{S}{S_c} = \frac{1}{M} \cdot \left[\frac{2 \left(1 + \frac{\gamma-1}{2} M^2 \right)}{\gamma+1} \right]^{\frac{\gamma+1}{2(\gamma-1)}}$$

Cette relation, représentée par le graphe ci-contre, confirme la conclusion antérieure que le nombre de Mach d'un écoulement subsonique augmente dans une tuyère convergente et celui d'un écoulement supersonique dans une tuyère divergente.



On peut exprimer le débit massique passant par une section donnée en fonction du nombre de Mach, de la section S et des conditions d'arrêt :

$$q_m = \rho u S \quad u = M \sqrt{\gamma r T}, \quad \rho = p/rT \quad \rightarrow \quad q_m = S \cdot p \cdot M \sqrt{\frac{\gamma}{rT}}$$

On fait apparaître les rapports p/p_i et T/T_i :

$$q_m = S \cdot p_i \cdot M \cdot \sqrt{\frac{\gamma}{rT_i}} \cdot \frac{p}{p_i} \cdot \sqrt{\frac{T_i}{T}}$$

En écrivant ces rapports en fonction du nombre de Mach local, on aboutit à :

$$q_m = S \cdot p_i \cdot M \cdot \left(\frac{\gamma}{rT_i}\right)^{\frac{1}{2}} \cdot \left(1 + \frac{\gamma-1}{2} \cdot M^2\right)^{\frac{-(\gamma+1)}{2(\gamma-1)}}$$

On peut encore exprimer le débit en fonction que du rapport de pression p/p_i . Comme :

$$\frac{p}{p_i} = \left(1 + \frac{\gamma-1}{2} \cdot M^2\right)^{\frac{\gamma}{1-\gamma}} \Rightarrow M = \left\{ \frac{2}{\gamma-1} \left[\left(\frac{p}{p_i}\right)^{\frac{1-\gamma}{\gamma}} - 1 \right] \right\}^{\frac{1}{2}}$$

On obtient finalement :

$$q_m = \rho_i \cdot S \cdot \underbrace{\sqrt{\frac{2\gamma}{\gamma-1} \cdot \frac{p_i}{\rho_i}}}_{u_{max}} \cdot \underbrace{\left(\frac{p}{p_i}\right)^{\frac{2}{\gamma}} \cdot \left[1 - \left(\frac{p}{p_i}\right)^{\frac{\gamma-1}{\gamma}}\right]}_{\Psi}$$

Tuyère convergente

Soit une tuyère convergente le long de laquelle un gaz est accéléré, depuis des conditions d'arrêt (réservoir) données p_i, T_i, ρ_i , en diminuant la pression " p_a " régnant en aval. Par conséquent la vitesse à la section de sortie et donc aussi le débit augmentent. Si S est la section de sortie, on réécrit le débit sous la forme :

$$q_m = \rho_i \cdot S \cdot \underbrace{\sqrt{\frac{2\gamma}{\gamma-1} \cdot \frac{p_i}{\rho_i}}}_{u_{max}} \cdot \underbrace{\left(\frac{p}{p_i}\right)^{\frac{2}{\gamma}} \cdot \left[1 - \left(\frac{p}{p_i}\right)^{\frac{\gamma-1}{\gamma}}\right]}_{\Psi} = \frac{\rho_i \cdot S \cdot u_{max}}{cte} \Psi(x)$$

Etudions le comportement de l'écoulement du gaz en fonction de la pression aval p_a à l'enceinte de décharge. Posons la variable $p_a/p_i = p/p_i$ est x, le débit est maximal en même temps que Ψ . On cherche la valeur de x annulant la dérivée de Ψ :

$$\frac{d\Psi}{dx} = \frac{2x^{\frac{1-\gamma}{\gamma}} - (\gamma+1)}{2\gamma \sqrt{1-x^{\frac{\gamma-1}{\gamma}}}}, \quad \frac{d\Psi}{dx} = 0 \Rightarrow x = \left(\frac{2}{\gamma+1}\right)^{\frac{\gamma}{\gamma-1}} \quad q_m \text{ est maximal} \quad \rightarrow \quad p = p_i \cdot \left(\frac{2}{\gamma+1}\right)^{\frac{\gamma}{\gamma-1}} = p_c$$

Ainsi, lorsque la pression p ($p=p_c$) à la section de sortie (col) atteint la valeur critique p_c , la vitesse du gaz atteint la vitesse du son a_c et le débit est maximal :

$$q_{m,max} = S_c \cdot \rho_c \left(\frac{2}{\gamma+1} \right)^{\frac{1}{\gamma-1}} \cdot \sqrt{\frac{2\gamma}{\gamma+1} \frac{p_c}{\rho_c}} = S_c \cdot \rho_c \cdot a_c \left(\frac{2}{\gamma+1} \right)^{\frac{\gamma+1}{2(\gamma-1)}}$$

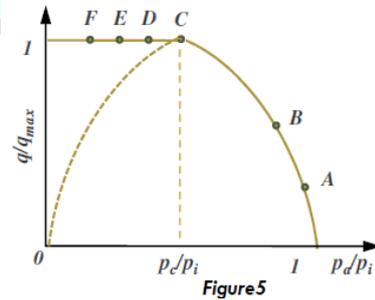
Cette dernière permet de calculer le débit de façon simple à partir de T_{i1} , P_{i1} et $S=S_c$ qui sont en général des données du problème ($q_{m,max}(\gamma = 1,4) = 0,685 \cdot S_c \cdot \rho_{i1} \cdot a_{i1}$).

Le rapport entre le débit de masse et le débit de masse maximal est :

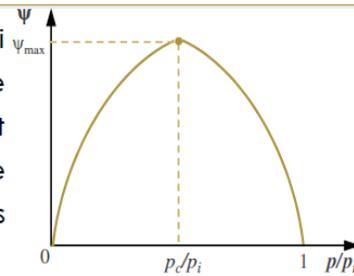
$$\frac{q_m}{q_{m,max}} = \left(\frac{\gamma+1}{2} \right)^{\frac{\gamma}{\gamma-1}} \cdot \left(\frac{\gamma+1}{\gamma-1} \right) \cdot \left(\frac{p}{p_i} \right)^{\frac{\gamma}{\gamma-1}} \cdot \left[1 - \left(\frac{p}{p_i} \right)^{\frac{\gamma-1}{\gamma}} \right]$$

Variation du débit avec le taux de détente p_a/p_i

On voit que pour $p_a = p_i$, il n'y a pas d'écoulement $q_m=0$ (Fig.5). En diminuant p_a , le débit augmente et atteint un maximum à la valeur $p_a/p_i = p_c/p_i$ qui correspond à $M=1$. A ce stade (C), la tuyère est dite étranglée (bloquée, amorcée).

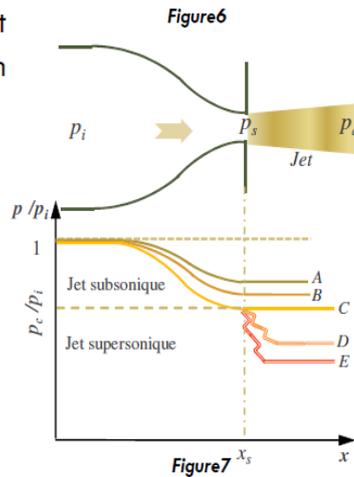


Physiquement, le débit de la tuyère va diminuer (Fig.6) si $p_a/p_i < p_c/p_i$ ($q_m = c^{te} \times \psi$). On constate de l'expérience que le débit reste constant égal à $q_{m,max}$. Les conditions soniques sont atteintes et ne changent plus c'est le "phénomène d'étranglement" et le débit au col ne dépend plus des conditions avalées (p_a/p_i).



Adoptons que la pression à la section de sortie est p_s et vérifions les différents états de l'écoulement dans la tuyère en donnant à la pression avalée p_a divers valeurs :

- Si $p_a > p_c$: l'écoulement est subsonique et le jet sort à la pression $p_s = p_a$ (cas (A) et (B)) (Fig.7).
- Si $p_a = p_c$: l'écoulement en amont du col est subsonique et au col est sonique (cas (C)) et le jet aussi $p_s = p_c$.
- Si $p_a < p_c$ l'écoulement en amont du col est subsonique et au col reste sonique $p_s = p_c$ (cas (D), (E)). Le jet est sous-détendu c.à.d. p_c s'ajuste jusqu'à p_a par une onde (de choc) de détente.



Tuyère convergente - divergente

Soit une tuyère convergente-divergente dite de Laval alimentée par un gaz aux conditions génératrices (réservoir) p_i, T_i, ρ_i . Le gaz est accéléré en diminuant la pression " p_a " régnant en aval de la tuyère à l'enceinte de décharge. A la section de sortie S_s la pression est désignée par " p_s ".

Les régimes d'écoulement (Fig.8(A, B,...)) ayant lieu dans une tuyère de Laval sont plus variées que dans une tuyère convergente. Ces divers régimes dépendent du taux de détente p_a/p_i . Etudions le comportement de l'écoulement du gaz en fonction du taux de détente c.à.d. pression avale p_a .

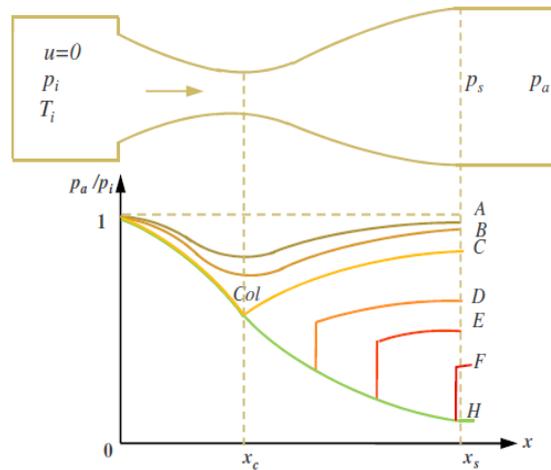


Figure8

► Si au col la vitesse est inférieure à la célérité du son :

La pression " p_a " en aval de la tuyère est assez haute et elle n'a pas atteint le niveau suffisamment faible pour induire un écoulement sonique au col. L'ensemble de l'écoulement est subsonique et la tuyère fonctionne comme un tube venturi (courbes (A), (B)). Le gaz est accéléré dans le convergent puis décéléré dans le divergent.

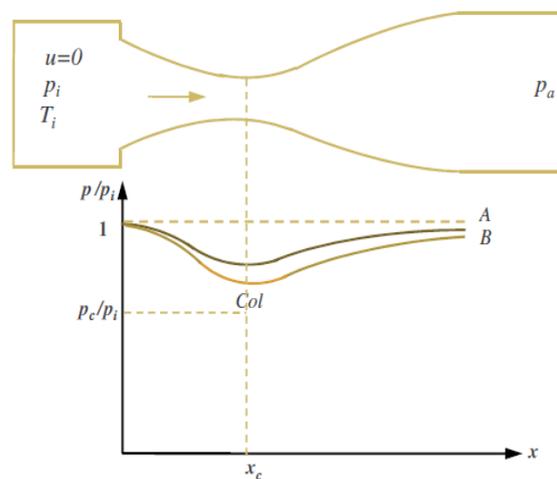


Figure10

L'écoulement est bien défini dans le convergent et le débit de la tuyère est maximal q_{max} . Dans le divergent l'écoulement dépend de la pression p_a (condition de sortie).
 Exprimons le débit dans une section quelconque S du divergent où la pression est "p" :

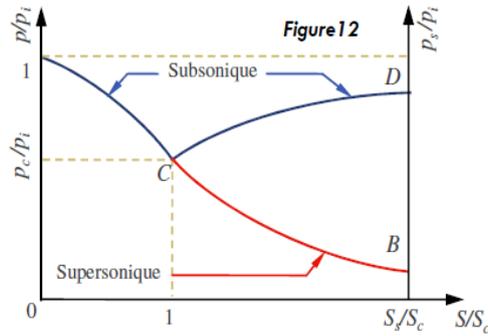
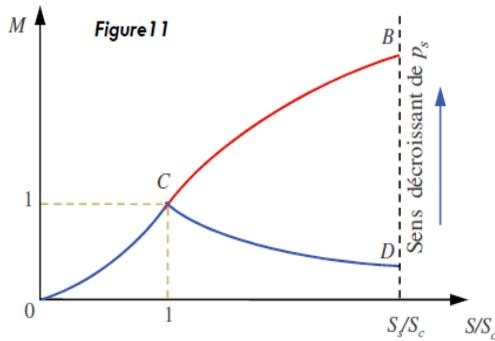
$$q_m = q_{m_{max}} = \rho_t \cdot S_t \cdot \sqrt{\frac{2\gamma}{\gamma-1} \frac{p_t}{\rho_t}} \cdot \sqrt{\left(\frac{p}{p_t}\right)^{\frac{2}{\gamma}} \cdot \left[1 - \left(\frac{p}{p_t}\right)^{\frac{\gamma-1}{\gamma}}\right]} \xrightarrow{\text{Au col}} q_{m_{max}} = \rho_c \cdot S_c \cdot a_c = \rho_t \cdot S_t \cdot \left(\frac{2}{\gamma+1}\right)^{\frac{1}{\gamma-1}} \cdot \sqrt{\frac{2\gamma}{\gamma+1} \frac{p_t}{\rho_t}}$$

On divise les deux relations afin d'écrire le rapport des deux sections en fonction de p/p_t :

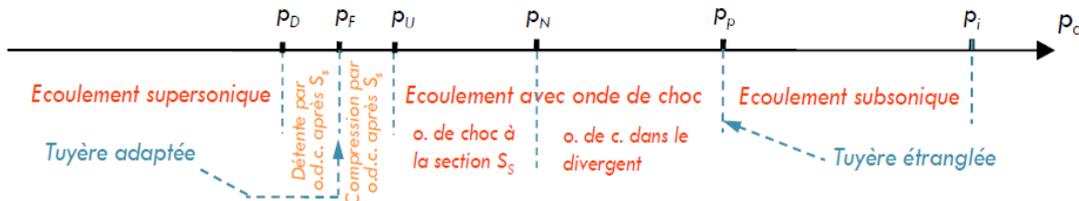
$$1 = \frac{\rho_t \cdot S_t \cdot \sqrt{\frac{2\gamma}{\gamma-1} \frac{p_t}{\rho_t}} \cdot \sqrt{\left(\frac{p}{p_t}\right)^{\frac{2}{\gamma}} \cdot \left[1 - \left(\frac{p}{p_t}\right)^{\frac{\gamma-1}{\gamma}}\right]}}{\rho_t \cdot S_c \cdot \left(\frac{2}{\gamma+1}\right)^{\frac{1}{\gamma-1}} \cdot \sqrt{\frac{2\gamma}{\gamma+1} \frac{p_t}{\rho_t}}} \rightarrow \frac{S}{S_c} = \frac{\left(\frac{2}{\gamma+1}\right)^{\frac{1}{\gamma-1}} \cdot \left(\frac{\gamma-1}{\gamma+1}\right)}{\sqrt{\left[1 - \left(\frac{p}{p_t}\right)^{\frac{\gamma-1}{\gamma}}\right] \cdot \left(\frac{p}{p_t}\right)^{\frac{2}{\gamma}}}}$$

On peut encore exprimer ce rapport de sections en fonction du nombre de Mach M :

$$\frac{S}{S_c} = \frac{1}{M} \cdot \left[\frac{2 \left(1 + \frac{\gamma-1}{2} M^2\right)}{\gamma+1} \right]^{\frac{\gamma+1}{2(\gamma-1)}}$$



A partir du col, la vitesse augmente (diminue) et la pression diminue (augmente) étant que l'écoulement est supersonique (subsonique). A la section de sortie la pression p_s et le nombre de Mach ont deux valeurs bien déterminées : $p_F < p_c$ ($p_p > p_c$), $M_F > M_c$ ($M_p < M_c$).
 Résumons ce qui se passe dans le divergent quand on donne à la pression p_a dans l'enceinte de décharge des valeurs variables et inférieures à p_t .



► 1^{er} Cas $p_a = p_p$:

L'écoulement devient sonique au col, mais de part et d'autre du col il reste subsonique. Le débit maximal q_{max} est atteint et le rapport de pression p_a/p_i passe un minimum au niveau du col " p_c/p_i " (courbe (C)).

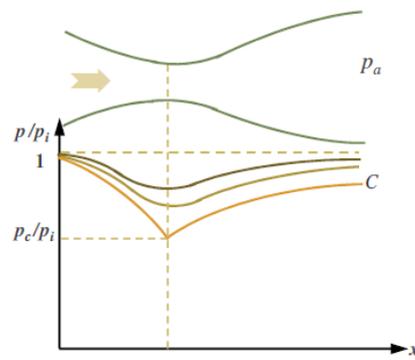


Figure 12

► 2^{ème} Cas $p_N \leq p_a < p_p$:

Les conditions restent critiques au col. L'écoulement devient supersonique dans une partie du divergent et la tuyère est dite "amorçée". Une onde de choc droite, dont sa position et amplitude dépendent de $p_{a'}$, s'établit dans le divergent. Le choc produit une compression accompagnée d'une décélération de l'écoulement. En l'aval du choc, l'écoulement est à nouveau subsonique jusqu'à la sortie (courbes (D), (E)).

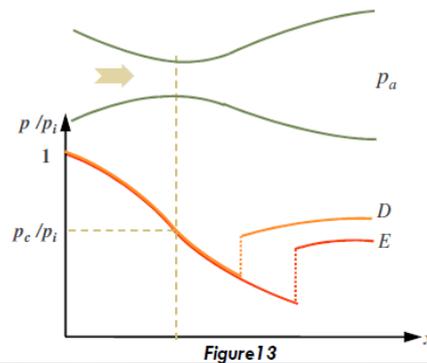


Figure 13

► 3^{ème} Cas $p_U < p_a < p_N$:

Le régime est caractérisé par un écoulement supersonique dans tous le divergent et l'onde de choc se situe à la section de sortie S_s . Le choc provoque un gain de pression de p_s (pression avant le choc) à p_a (pression après le choc) (courbe (F)).

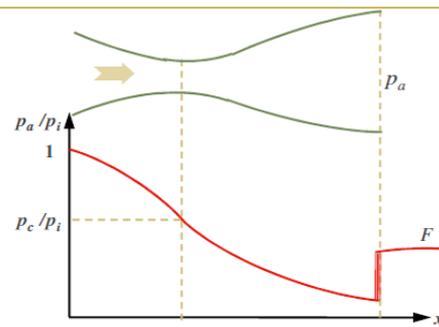


Figure 15

► 4^{ème} Cas $p_F < p_a < p_U$:

La diminution de p_a ne modifie plus l'écoulement dans la tuyère et elle est dite en "sur-expansion". A l'extérieur de la tuyère, l'écoulement génère des ondes de choc obliques (ajustement de pression ↗ entre le jet et l'ambient) qui rampent le caractère monodimensionnel de l'écoulement (courbe (G)).

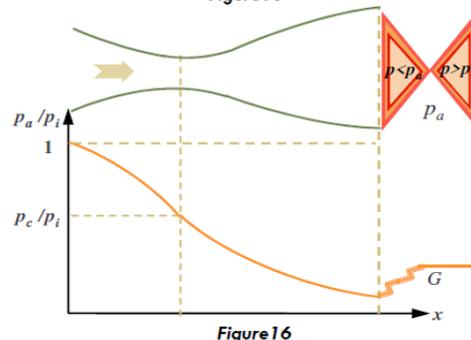


Figure 16

► 5^{ème} Cas $p_a = p_F$:

Lorsque la pression p_a en aval de la tuyère est égale à la pression p_s à la section de sortie, l'écoulement est isentropique et supersonique sur toute la longueur du divergent. Dans ce cas, aucun choc n'apparaît et la tuyère est dite "adaptée" (courbe (H)).

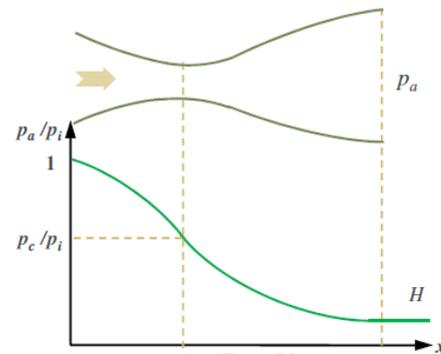


Figure 16

► 6^{ème} Cas $p_D < p_a < p_F$:

Pour ce régime, la pression en arrière de p_a est en dessous de p_s correspondant à une évolution isentropique. L'écoulement s'ajuste à la pression extérieure p_a par une série de ondes de détente obliques. La tuyère est dite en "sous-expansion". (courbe (I)).

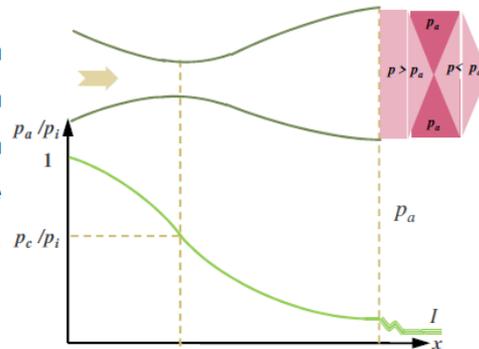


Figure 17

Ondes de choc

Introduction

Dans la réalité, de nombreux écoulements compressibles à grande vitesse subissent de fortes variations à leurs caractéristiques (T, p, ρ) sur des distances très faibles de telle sorte qu'elles apparaissent discontinues. Ces discontinuités sont appelés ondes de choc. A titre d'exemple, les ondes de détonation générées par une explosion ou produites par un avion en vol supersonique.

Dans ce chapitre, ce phénomène sera traité en modélisant le choc comme une discontinuité stationnaire. Ainsi, par le biais des équations de conservation, des relations simples entre l'état des variables physiques, caractérisant l'écoulement, en amont et en aval du choc seront établies. Pour cela, précisons les hypothèses à utiliser:

- Absence de travail et d'apport de chaleur
- Le fluide est à l'équilibre thermodynamique
- Les forces de frottement et de volume sont négligeables

A la fin du chapitre précédent, on a présenté les régimes d'écoulement ayant lieu dans une tuyère de Laval. Parmi ces régimes, on a cité le cas de tuyère "amorcée" caractérisé par le passage d'un écoulement de l'état supersonique à l'état subsonique à travers un choc normal dans le divergent.

L'écoulement reste isentropique en amont et en aval de l'onde de choc qui, elle, modifie l'entropie (conserve l'enthalpie totale h_t) des particules fluide. Ainsi ce phénomène de choc est fortement irréversible car il est accompagné d'un un incrément d'entropie.

Les ondes de choc, peuvent se propager dans la direction normale à l'écoulement ou bien de manière oblique. Dans la partie suivante on va étudier le choc normal qui aura lieu dans une conduite.

Equations de base

Soit un choc, normal à l'écoulement, séparant le domaine d'un canal en deux: une région en amont (1) et une région en aval (2). La discontinuité du choc est très mince de telle sorte que les $S_1=S_2=S$.

On écrit les différentes équations de conservations permettant de relier l'état (1) à l'état (2) :

Equation de masse $\rho_1 \cdot S_1 \cdot u_1 = \rho_2 \cdot S_2 \cdot u_2 \Rightarrow \rho_1 \cdot u_1 = \rho_2 \cdot u_2$

Equation d'Euler $\rho_2 \cdot u_2^2 \cdot S_2 - \rho_1 \cdot u_1^2 \cdot S_1 = -(p_2 \cdot S_2 - p_1 \cdot S_1) \Rightarrow p_1 + \rho_1 \cdot u_1^2 = p_2 + \rho_2 \cdot u_2^2$

Equation de l'énergie (conservation de l'enthalpie totale)

On applique l'équation de Barré Saint-Venant convenable aussi pour les écoulement

adiabatiques et irréversibles :
$$h_{t_i} = C_p T_i = \frac{1}{2} u_i^2 + \frac{\gamma}{\gamma-1} \cdot \frac{p_i}{\rho_i} = \frac{1}{2} u_1^2 + \frac{\gamma}{\gamma-1} \cdot \frac{p_1}{\rho_1} = \frac{1}{2} u_2^2 + \frac{\gamma}{\gamma-1} \cdot \frac{p_2}{\rho_2}$$

Equation de l'état

$$p = \rho r T \Rightarrow \frac{p_1}{\rho_1 T_1} = \frac{p_2}{\rho_2 T_2}$$

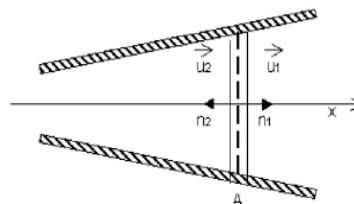


Figure 21

Relation de compression de l'onde de choc

A l'aide des équations de base on va établir les relations de compression liant les grandeurs d'état d'un gaz parfait immédiatement en amont et en aval du choc. De la substitution de l'équation de masse dans l'équation d'Euler, on obtient :

$$\rho_1 \cdot u_1 (u_2 - u_1) = p_1 - p_2 \quad \times (u_1 + u_2) / (\rho_1 \cdot u_1) \quad \rightarrow \quad u_2^2 - u_1^2 = (p_1 - p_2) \left(\frac{1}{\rho_1} + \frac{1}{\rho_2} \right)$$

En tenant compte de ce résultat, l'équation de Barré donne :

$$\frac{u_2^2}{2} - \frac{u_1^2}{2} = \frac{\gamma}{\gamma - 1} \left(\frac{p_1}{\rho_1} - \frac{p_2}{\rho_2} \right) = \frac{1}{2} (p_1 - p_2) \left(\frac{1}{\rho_1} + \frac{1}{\rho_2} \right)$$

La deuxième égalité relie l'état thermodynamique en amont du choc (p_1, ρ_1) à l'état (p_2, ρ_2) en aval du choc. Après des simplifications, l'équation prend la forme suivante :

$$\frac{p_2}{p_1} = \frac{\frac{\gamma + 1}{\gamma - 1} - (\rho_1 / \rho_2)}{\frac{\gamma + 1}{\gamma - 1} \cdot (\rho_1 / \rho_2) - 1}$$

De ce résultat et de l'équation d'état, on aboutit aux équations liant les grandeurs (T_1, ρ_1), (T_2, ρ_2), (p_1, ρ_1) de l'état amont aux grandeurs (T_2, ρ_2), (T_1, ρ_1) de l'état aval :

$$\frac{T_2}{T_1} = \frac{\frac{\gamma + 1}{\gamma - 1} - (\rho_1 / \rho_2)}{\frac{\gamma + 1}{\gamma - 1} - (\rho_2 / \rho_1)}$$

$$\frac{T_2}{T_1} = \frac{\frac{\gamma + 1}{\gamma - 1} + (p_2 / p_1)}{\frac{\gamma + 1}{\gamma - 1} + (p_1 / p_2)}$$

$$\frac{\rho_2}{\rho_1} = \frac{\frac{\gamma + 1}{\gamma - 1} \cdot (p_2 / p_1) + 1}{\frac{\gamma + 1}{\gamma - 1} + (p_2 / p_1)}$$

Ces relations, permettant de quantifier le saut affecté par le choc aux paramètres de l'état d'un gaz parfait, sont appelées "les équations de Rankines-Hugoniot".

L'évolution correspondante à l'équation reliant les grandeurs d'état amont (p_1, ρ_1) aux grandeurs d'état aval (p_2, ρ_2) est représentée sur la figure ci-contre. Sur cette même figure, la courbe décrivant une compression isentropique entre ces mêmes deux états est portée.

A une même valeur du rapport ρ_1 / ρ_2 correspond une variation de pression p_2 / p_1 , créée à travers l'onde de choc, plus grande que celle d'une compression isentropique.

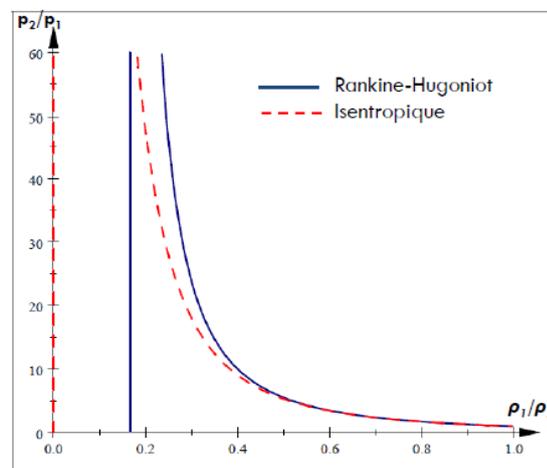


Figure 22

→ La traversée de l'onde de choc entraîne un accroissement très rapide de p et aussi de T .

Relation de Prandtl

De l'équation d'Euler, on écrit : $\rho_2 \cdot u_2^2 - \rho_1 \cdot u_1^2 = p_1 - p_2$ $\rho_1 \cdot u_1 = \rho_2 \cdot u_2$ $\Rightarrow u_2 - u_1 = \frac{p_1}{\rho_1 \cdot u_1} - \frac{p_2}{\rho_2 \cdot u_2}$ (1)

On introduit la vitesse du son : $u_2 - u_1 = \frac{1}{\gamma} \cdot \left(\frac{\gamma p_1}{\rho_1 \cdot u_1} - \frac{\gamma p_2}{\rho_2 \cdot u_2} \right) = \frac{1}{\gamma} \cdot \left(\frac{a_1^2}{u_1} - \frac{a_2^2}{u_2} \right)$

La relation de Barré entre les sections S_1 , S_2 et S , s'écrit comme suit:

$\frac{u_1^2}{2} + \frac{\gamma}{\gamma-1} \frac{p_1}{\rho_1} = \frac{u_2^2}{2} + \frac{\gamma}{\gamma-1} \frac{p_2}{\rho_2} = \frac{a_c^2}{2} + \frac{\gamma}{\gamma-1} \frac{p_c}{\rho_c}$ $\times (\gamma-1) \Rightarrow \frac{\gamma-1}{2} u_1^2 + a_1^2 = \frac{\gamma-1}{2} u_2^2 + a_2^2 = \frac{\gamma+1}{2} a_c^2$ (2)

En substituant l'éq. (2) dans l'éq. (1) et après des simplifications, on aboutit à :

$$\frac{\gamma+1}{2} u_1 \cdot u_2 = \frac{\gamma-1}{2} u_2^2 + a_2^2 = \frac{\gamma+1}{2} a_c^2$$

De ce résultat, on obtient la *relation de Prandtl* : $u_1 \cdot u_2 = a_c^2 \Leftrightarrow \frac{u_1}{a_c} \cdot \frac{u_2}{a_c} = 1$

→ L'écoulement en amont du choc est supersonique et en aval du choc il est subsonique.

Rapport des grandeurs en fonction du nombre de Mach

Comme $(T_2/T_1) = (\rho_1/\rho_2) \cdot (p_2/p_1)$, on a de même immédiatement :

$$\frac{T_2}{T_1} = \left(\frac{2\gamma}{\gamma+1} M_1^2 - \frac{\gamma-1}{\gamma+1} \right) \left(\frac{\gamma-1}{\gamma+1} + \frac{2}{(\gamma+1)M_1^2} \right) \quad \frac{T_1}{T_2} = \left(\frac{2\gamma}{\gamma+1} M_2^2 - \frac{\gamma-1}{\gamma+1} \right) \left(\frac{\gamma-1}{\gamma+1} + \frac{2}{(\gamma+1)M_2^2} \right)$$

On écrit M_1 et M_2 en fonction du rapport des pressions p_2/p_1 :

$$M_1^2 = 1 + \frac{\gamma+1}{2\gamma} (p_2/p_1 - 1), \quad M_2^2 = 1 + \frac{\gamma+1}{2\gamma} (p_1/p_2 - 1) \quad \Rightarrow \quad M_2^2 = \frac{1 + \frac{\gamma-1}{2} M_1^2}{\gamma M_1^2 - \frac{\gamma-1}{2}}$$

En faisant apparaître M_1 et M_2 dans les éq. de base, on obtient des expressions plus simples pour les rapports des grandeurs:

Equation de l'énergie $c_p T_2 = c_p T_1 + \frac{u_1^2}{2} = c_p T_1 \left(1 + \frac{\gamma-1}{2} M_1^2 \right) \Rightarrow \frac{T_2}{T_1} = \frac{1 + \frac{\gamma-1}{2} M_1^2}{1 + \frac{\gamma-1}{2} M_2^2}$

Equation d'Euler $p_1 + \rho_1 \cdot u_1^2 = p_1 \left(1 + \frac{\rho_1 \cdot u_1^2}{p_1} \right) = p_1 (1 + \gamma M_1^2) \Rightarrow \frac{p_2}{p_1} = \frac{(1 + \gamma M_1^2)}{(1 + \gamma M_2^2)}$

Equation de masse $\frac{\rho_2}{\rho_1} = \frac{u_1}{u_2} = \frac{M_1 \cdot a_1}{M_2 \cdot a_2} \Rightarrow \frac{\rho_2}{\rho_1} = \frac{M_1 \sqrt{1 + \frac{\gamma-1}{2} M_1^2}}{M_2 \sqrt{1 + \frac{\gamma-1}{2} M_2^2}}$

Variation d'entropie à travers une onde de choc

L'entropie s augmente à travers la traversée de l'onde de choc. Cet accroissement peut être déterminé à partir de la relation de Gibbs

$$ds = C_p \frac{dT}{T} - r \frac{dp}{p}$$

Cette relation se transforme en utilisant la dérivée logarithmique de l'équation d'état en :

$$\frac{dT}{T} = \frac{dp}{p} - \frac{d\rho}{\rho} \quad \longrightarrow \quad \frac{ds}{C_p} = \frac{dp}{p} - \gamma \frac{d\rho}{\rho}$$

on obtient en intégrant : $s_2 - s_1 = C_p \cdot \ln \left[\frac{p_2}{p_1} \cdot \left(\frac{\rho_1}{\rho_2} \right)^\gamma \right]$

On connaît déjà les rapports p_2/p_1 et ρ_1/ρ_2 en fonction du nombre de Mach amont M_1 . On obtient alors facilement

$$s_2 - s_1 = C_p \cdot \ln \left[\left(\frac{1}{\gamma + 1} \right)^{\gamma+1} (2\gamma M_1^2 - \gamma + 1) \cdot \left(\frac{2}{M_1^2} + \gamma - 1 \right)^\gamma \right]$$

Remarques :

- ▶ La variation d'entropie s'annule pour $M_1 = 1$
- ▶ La variation d'entropie est positive pour $M_1 > 1$
- ▶ La variation d'entropie est négative pour $M_1 < 1$. (ce qui est interdit par le 2^{ème} principe de la thermodynamique)

L'onde de choc (incrément d'entropie) ne peut exister que dans un écoulement supersonique

Il est également possible d'établir la relation de la variation d'entropie en fonction des conditions génératrices de part et d'autre du choc à partir de la relation suivante :

$$ds = C_p \frac{dT}{T} - r \frac{dp}{p} \quad \longrightarrow \quad s_2 - s_1 = C_p \cdot \ln \left(\frac{T_2'}{T_2} \right) - r \cdot \ln \left(\frac{p_2'}{p_2} \right)$$

Comme le choc conserve l'enthalpie totale $h_i = C_p T_i = c^{te}$ ($T_i = c^{te}$)

$$s_2 - s_1 = -r \cdot \ln \left(\frac{p_2'}{p_2} \right) > 0 \Rightarrow p_2' < p_2$$

La pression d'arrêt p_2' de l'état aval du choc est inférieure que celle de l'état amont p_2

Le choc dans la tuyère de Laval

Considérons une tuyère de Laval alimentée par un gaz aux conditions génératrices (réservoir) p_i, T_i, ρ_i . On a vu au chapitre précédent, qu'en diminuant la pression " p_a " régnant en aval de la tuyère (l'enceinte de décharge) le gaz est accéléré et divers régimes d'écoulement ayant lieu dans la tuyère (Fig.23).

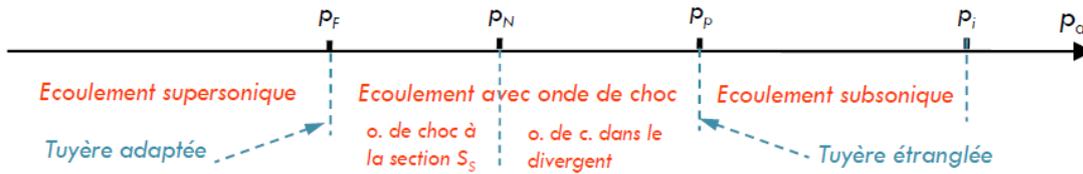


Figure23

On se place ici dans le cas de présence d'une onde de choc où $p_a \in]p_F, p_p[$. On sait que le choc droit ne peut avoir lieu que dans le divergent en régime supersonique. L'écoulement au côté aval du choc est nécessairement subsonique et interdit alors la présence d'un second choc.

Si $p_N \leq p_a < p_p$ l'onde de choc s'établit dans le divergent. L'écoulement en amont du choc est isentropique à partir de l'état générateur où la pression est p_i .

A l'aval du choc, la pression d'arrêt prend une autre valeur $p_i' < p_i$ mais la température d'arrêt T_i reste réservée.

Afin de déterminer cette pression p_i' , on imagine une tuyère fictive, dont l'écoulement est supersonique au divergent, de section de col fictive S_c' . Comme le débit est conservé à travers une onde de choc, le débit est le même dans cette tuyère fictive.

Le débit au col est maximal :
$$q_{m,max} = \frac{\rho_c \cdot a_c \cdot S_c}{\text{tuyère réelle}} = \frac{\rho_c' \cdot a_c' \cdot S_c'}{\text{tuyère fictive}} \quad (*)$$

comme la température de l'état générateur est la même dans les deux tuyères, on a :

$$T_c = \frac{2}{\gamma + 1} T_i, \quad a_c = \sqrt{\gamma r T_c} \Rightarrow T_c = T_c', \quad a_c = a_c'$$

ainsi l'équation (*) donne :

$$\frac{p_c}{r T_c} \cdot S_c = \frac{p_c'}{r T_c'} \cdot S_c' \Rightarrow \frac{p_c'}{p_c} = \frac{S_c}{S_c'} \quad \frac{p_t}{p_c} = \left(\frac{\gamma + 1}{2} \right)^{\frac{\gamma}{\gamma - 1}} = \frac{p_t'}{p_c'} \Rightarrow \frac{p_c'}{p_c} = \frac{p_i'}{p_i}$$

Par conséquent, le rapport des pressions totales de part et d'autre du choc est égal au rapport entre la section du col S_c (réelle) correspondante à M_1 avant le choc, et la section du col S_c' (fictive) correspondante à M_2 après le choc :

$$\frac{S_c}{S_c'} = \frac{p_i'}{p_i}$$

Il est utile d'obtenir l'expression de ce rapport p_i'/p_i en fonction du nombre de Mach amont M_1 . Pour se faire, on écrit

$$\frac{p_i'}{p_i} = \frac{p_i'}{p_2} \cdot \frac{p_2}{p_1} \cdot \frac{p_1}{p_i} \quad \longrightarrow \quad \frac{p_i'}{p_i} = \left(\frac{1 + \frac{\gamma-1}{2} \cdot M_2^2}{1 + \frac{\gamma-1}{2} \cdot M_1^2} \right)^{\frac{\gamma}{\gamma-1}} \left(\frac{2\gamma}{\gamma+1} M_1^2 - \frac{\gamma-1}{\gamma+1} \right)$$

On connaît déjà l'expression de M_2 en fonction de M_1 . On obtient alors facilement :

$$\frac{p_i'}{p_i} = \left(\frac{(\gamma+1)M_1^2}{2 + (\gamma-1)M_1^2} \right)^{\frac{\gamma}{\gamma-1}} \left(\frac{\gamma+1}{2\gamma M_1^2 - (\gamma-1)} \right)^{\frac{1}{\gamma-1}}$$

Exemple :

De l'air ($k=1.4$, $R=287\text{J}/(\text{kg}\cdot^\circ\text{K})$, $C_p=1005\text{J}/(\text{kg}\cdot^\circ\text{K})$) provenant d'un grands réservoir où la pression est $P_i=300\text{kPa}$ et la température est $T_i=500^\circ\text{K}$ s'écoule à travers une tuyère convergente-divergente ayant un col de section $S_c=1\text{m}^2$. On constate dans l'étude expérimentale du fonctionnement de la tuyère, la présence d'une onde de choc dans une section $S_{choc}=2\text{m}^2$. Calculer p_1 , p_2 , p_i' , S_c' , p_s sachant que $S_s=3\text{m}^2$.

Solution :

$$2 = \frac{S_{choc}}{S_c} = M_1 \cdot \left[2 \left(1 + \frac{\gamma-1}{2} \cdot M_1^2 \right) \right]^{\frac{\gamma+1}{2(\gamma-1)}} \Rightarrow 2 = \frac{1}{M_1} \cdot \frac{(1 + 0.2M_1^2)^3}{1.728}$$

De la table isentropique, on calcule M_1 par interpolation :

\mathcal{M}	$\frac{p}{p_i}$	$\frac{p_i'}{p_i}$	$\frac{p_2}{p_1}$	$\frac{\rho}{\rho_i}$	$\frac{\rho_2}{\rho_1}$	$\frac{T}{T_i}$	$\frac{S}{S_c}$	a ($T_i=288^\circ\text{K}$)
2,20	0,093 4	0,630	5,486	0,185 1	2,939	0,505 0	1,997	$\frac{S_{choc}}{S_c} = 2$
2,40	0,068 4	0,542	6,561	0,148 3	3,197	0,461 6	2,392	

$$\rightarrow M_1 = 2.20 + \frac{2.40 - 2.20}{2.392 - 1.997} (2 - 1.997) = 2.20152$$

$$\frac{p_i}{p_1} = \left(1 + \frac{\gamma-1}{2} \cdot M_1^2\right)^{\frac{\gamma}{\gamma-1}} \Rightarrow p_1 = \frac{p_i}{(1 + 0.2M_1^2)^{3.5}} = \frac{300000}{(1 + 0.2(2.20152)^2)^{3.5}} = 28 \text{ kPa}$$

$$\frac{p_2}{p_1} = \frac{2\gamma}{\gamma+1} M_1^2 - \frac{\gamma-1}{\gamma+1} = 1.1667 \times 4.8467 - 0.1667 = 5.4879 \rightarrow p_2 = 153.66 \text{ kPa}$$

On peut calculer p_2 par interpolation. De la table isentropique, on a :

\mathcal{M}	$\frac{p}{p_i}$	$\frac{p_i'}{p_i}$	$\frac{p_2}{p_1}$	$\frac{\rho}{\rho_i}$	$\frac{\rho_2}{\rho_1}$	$\frac{T}{T_i}$	$\frac{S}{S_c}$	a ($T_i=288 \text{ °K}$)
2,20	0,093 4	0,630	5,486	0,185 1	2,939	0,505 0	1,997	$\frac{S_{choc}}{S_c} = 2$
2,40	0,068 4	0,542	6,561	0,148 3	3,197	0,461 6	2,392	

$$\rightarrow \frac{p_2}{p_1} = 5.486 + \frac{6.561 - 5.486}{2.40 - 2.20} (2.20152 - 2.20) = 5.4942 \Rightarrow p_2 = 153.83 \text{ kPa}$$

$$\frac{p_i'}{p_i} = \left(\frac{(\gamma+1)M_1^2}{2 + (\gamma-1)M_1^2}\right)^{\frac{\gamma}{\gamma-1}} \left(\frac{\gamma+1}{2\gamma M_1^2 - (\gamma-1)}\right)^{\frac{1}{\gamma-1}} - 0.62741 \Rightarrow p_i' = 188225.1 \text{ Pa}$$

Calcul de p_i' par interpolation :

$$\rightarrow \frac{p_i'}{p_i} = 0.630 + \frac{0.542 - 0.630}{2.40 - 2.20} (2.20152 - 2.20) = 0.62933 \Rightarrow p_i' = 188799.36 \text{ Pa}$$

Afin de calculer la pression et le nombre de Mach au niveau de S_y , on doit déterminer la section du col dans la tuyère imaginaire. La section critique (du col) fictive est

$$\frac{p_i'}{p_i} = \frac{S_c}{S_c'} \rightarrow S_c' = \frac{S_c}{0.62933} = 1.589 \text{ m}^2$$

Le nombre de Mach aval M_2 est :
$$M_2 = \sqrt{\frac{1 + \frac{\gamma-1}{2} M_1^2}{\gamma M_1^2 - \frac{\gamma-1}{2}}} = \sqrt{\frac{1 + 0.2 \times 4.8467}{1.4 \times 4.8467 - 0.2}} = 0.5468$$

L'aire critique (col) fictive, correspondant au nombre de Mach $M_2 = 0.5468$ à la section du choc $S_{choc} = 2 \text{ m}^2$, est $S_c' = 1.589 \text{ m}^2$.

$$\frac{3}{1.589} = 1.888 = \frac{S_s}{S_c'} = \frac{1}{M_s} \left[\frac{2 \left(1 + \frac{\gamma-1}{2} M_s^2\right)}{\gamma+1} \right]^{\frac{\gamma+1}{2(\gamma-1)}} \Rightarrow 1.888 = \frac{1}{M_s} \cdot \frac{(1 + 0.2M_s^2)^3}{1.728}$$

On ne peut extraire M_s qu'à l'aide d'interpolation. De la table des écoulements isentropiques et subsoniques :

