UNE INTRODUCTION A LA THEORIE DES DISTRIBUTIONS

BOUDJEDAA BADREDINE
Université Med Saddik Ben Yahia - Jijel 18000 Algérie
Faculté des Sciences Exactes et Informatique
Département de Mathématiques

(COURS DE MASTER MATHS)
ANNEE 2015/2016

Table des matières

Ce document de cours est destiné aux étudiants de Master en mathématiques ainsi qu'aux étudiants des sciences physiques. Il leur donne les définitions et notions les plus élémentaires pour se familiariser au calcul distributionnel telles que la notion de dérivation, de limite d'une suite ou de série de distributions ainsi que d'autres opérations sur les distributions. Par des exemples bien choisis, ils peuvent voir la différence, entre ce qui est classique pour des fonctions ordinaires et ce qui est distributionnel pour ce qu'on appelle ordinairement des "fonctions généralisées", c'est-à-dire des distributions.

Ces notes de cours ont été rédigées dans l'esprit de présenter les distributions dans un sens aussi clair que possible, sans les faire alourdir des notions encore plus intéressantes, et de ne pas s'écarter du but principal, qui est de donner aux étudiants un manuel de cours plus ou moins simple et qui contient les résultats les plus essentiels et les plus importants sur les distributions. Le lecteur qui est intéressé par plus de détails sur les distributions pourra consulter l'une des références citées ci-après.

Les principales références pour ces notes de cours sont :

1- L SCHWARTZ , Théorie des Distributions. Hermann, 1966, Paris.

2- L SCHWARTZ, Méthodes Mathématiques pour les Sciences Physiques. Hermann, 1983, Paris.

3- C ZUILY, Eléments de Distributions et d'Equations aux Dérivées Partielles. Dunod, 2002, Paris.

4- C ZUILY, Problems in Distributions and Partial Differential Equations. Hermann, 1988, Paris.

5- R S PATHAK, A Cours in Distribution Theory and Applications. Alpha Science, 2001, UK.

6- F HIRSCH - G LACOMBE, Eléments d'Analyse Fonctionnelle. Dunod, 1999, Paris.

Notations

Fixons d'abord quelques notations qu'on utilisera tout le long de ce cours.

- Si $x = (x_1, ..., x_n) \in \mathbb{R}^n$ on note : $|x| = (x_1^2 + ... + x_n^2)^{\frac{1}{2}}$.
- Si $x, y \in \mathbb{R}^n$ on note aussi : $x + y = (x_1 + y_1, ..., x_n + y_n)$;
et le produit scalaire par : $(x, y) = x_1y_1 + ... + x_ny_n$ et $ax = (ax_1, ..., ax_n)$, $a \in \mathbb{R}$.
- Un élément $\alpha \in \mathbb{N}^n$ est appelé multi-indice :
Si $\alpha = (\alpha_1, ..., \alpha_n) \in \mathbb{N}^n$ on pose $|\alpha| = \alpha_1 + ... + \alpha_n$ (longueur de α)
et $\alpha! = \alpha_1!...\alpha_n!$ et pour $x \in \mathbb{R}^n$, $x^\alpha = x_1^{\alpha_1}...x_n^{\alpha_n}$.
- Pour $\alpha,\ \beta \in \mathbb{N}^n$ on note $\alpha \leq \beta$ si $\alpha_1 \leq \beta_1, ..., \alpha_n \leq \beta_n$;

et on pose aussi : $$\begin{pmatrix} \alpha \\ \beta \end{pmatrix} = \frac{\alpha!}{\beta!(\alpha - \beta)!} = \prod_{i=1}^{n} \begin{pmatrix} \alpha_i \\ \beta_i \end{pmatrix} ,$$

où $\begin{pmatrix} \alpha_i \\ \beta_i \end{pmatrix}$ représente le coefficient binomial $\dfrac{\alpha_i!}{\beta_i!(\alpha_i - \beta_i)!}$.

- Pour $\alpha \in \mathbb{N}^n$ on écrit : $D^\alpha = (\dfrac{\partial}{\partial x_1})^{\alpha_1}...(\dfrac{\partial}{\partial x_n})^{\alpha_n} = \dfrac{\partial^{|\alpha|}}{\partial x_1^{\alpha_1}...\partial x_n^{\alpha_n}}$.
- Pour $1 \leq p < \infty$, $L^p(\Omega)$ désigne l'espace des "classes" de fonctions f p-intégrables sur Ω (un ouvert de $\mathbb{R}^n$). $L^p(\Omega)$ est un espace de Banach pour la norme

$$\|f\|_p^p = \int_\Omega |f(x)|^p \, dx$$

- Pour $p = \infty$, $L^\infty(\Omega)$ désigne l'espace des "classes" de fonctions f mesurables sur Ω qui sont essentiellement bornées supérieurement sur Ω. $L^\infty(\Omega)$ est un espace de Banach pour la norme

$$\|f\|_\infty = \sup_\Omega ess\, |f(x)| = \inf \{c \ / \ \ |f(x)| \leq c \ \text{ p. p. sur } \Omega\} .$$

Chapitre 1

LES DISTRIBUTIONS

Les distributions sont des objets qui généralisent les fonctions localement intégrables et les mesures de Radon sur $\mathbb{R}^n$. L'un des intérêts principaux de la théorie des distributions est de permettre la construction d'un calcul différentiel qui prolonge le calcul différentiel ordinaire et pour lequel toute distribution est indéfiniment dérivable. Cette théorie est devenue un outil essentiel, notamment dans l'étude des équations aux dérivées partielles. Elle a aussi permis une modernisation mathématique pour de nombreux phénomènes physiques. L'idée de base de la théorie des distributions est de définir les distributions par leur action sur un espace de fonctions appelées " fonctions-test". On peut noter que cette idée apparait déjà dans la définition de mesures et en particulier dans la définition des mesures de Radon.

Avant d'aborder les distributions donnons quelques espaces fonctionnels sur lesquels on définit des structures topologiques qui nous permettrons de mieux comprendre les notions de limite, de continuité...etc, pour les distributions.

1.1 Les espaces $C^m(\Omega)$, $0 \leq m \leq +\infty$

Dans tout ce qui suit Ω désigne toujours un ouvert de $\mathbb{R}^n$. On note par $C(\Omega)$ ou $C^0(\Omega)$ (resp. $C^1(\Omega)$) l'espace des fonctions continues (resp. continûment différentiables) sur Ω à valeurs numériques (i.e réelles ou complexes).

Pour $m \in \mathbb{N}$, $m \geq 2$, on pose

$$C^m(\Omega) = \left\{ u \in C^{m-1}(\Omega) : \quad \frac{\partial u}{\partial x_i} \in C^{m-1}(\Omega), \quad i = 1, ..., n \right\}$$

c'est l'espace des fonctions m fois continûment différentiables sur Ω.

Enfin on notera

$$C^\infty(\Omega) = \bigcap_{m \in \mathbb{N}} C^m(\Omega) \ ,$$

c'est l'espace des fonctions indéfiniment différentiables sur Ω.

Avant de définir la topologie "*naturelle*" sur les espaces fonctionnels $C^m(\Omega)$, donnons d'abord un lemme qui nous permet d'écrire tout ouvert Ω de $\mathbb{R}^n$ comme réunion croissante de compacts.

Lemme 1 − 1

Pour $i \in \mathbb{N}^*$, soit

$$\mathbf{K}_i = \{x \in \mathbb{R}^n \ : \ |x| \leq i\} \cap \left\{ x \in \Omega \ : \ d(x \ , \ C\Omega) \geq \frac{1}{i} \right\}.$$

Alors

1) $\{\mathbf{K}_i\}_{i \in \mathbb{N}^*}$ est une suite croissante de compacts tels que $\mathbf{K}_i \subset \mathring{\mathbf{K}}_{i+1}$,

2) $\Omega = \bigcup_{i \in \mathbb{N}^*} \mathbf{K}_i = \bigcup_{i \geq 2} \mathring{\mathbf{K}}_i$,

3) Pour tout compact $\mathbf{K}$ de Ω il existe un $i_0 \in \mathbb{N}^*$ tel que $\mathbf{K} \subset \mathbf{K}_{i_0}$.

Définissons maintenant pour chaque $i \in \mathbb{N}^*$, les semi-normes suivantes :

$$p_i(u) = \sum_{|\alpha| \leq m} \sup_{x \in \mathbf{K}_i} |D^\alpha u(x)| \ , \quad \text{si} \ \ u \in C^m(\Omega), \ m \in \mathbb{N} \ ,$$

$$p_i(u) = \sum_{|\alpha| \leq i} \sup_{x \in \mathbf{K}_i} |D^\alpha u(x)| \ , \quad \text{si} \ \ u \in C^\infty(\Omega).$$

Les (p_i) sont des semi-normes puisque elles possèdent les propriétés suivantes

$$p_i(0) = 0 \ , \quad p_i(\lambda u) = |\lambda| \, p_i(u) \ \ \text{si} \ \lambda \in \mathbb{C} \ , \quad p_i(u+v) \leq p_i(u) + p_i(v)$$

i.e elles vérifient les axiomes des normes sauf que $p_i(u) = 0 \ \nRightarrow u = 0$ mais seulement $u = 0$ sur $\mathbf{K}_i$.

On va définir une topologie sur ces espaces, en définissant une base de voisinages.

Pour $u \in C^m(\Omega), \ m \in \mathbb{N} \ \cup \{+\infty\}$, $\varepsilon > 0$ et $i \in \mathbb{N}^*$ on pose

$$V_i^\varepsilon(u) = \{v \in C^m(\Omega) \ : \ p_i(v-u) < \varepsilon \ \} \ .$$

Un voisinage de u sera alors un sous-ensemble de $C^m(\Omega)$ qui contient un voisinage $V_i^\varepsilon(u)$ pour un certain couple $(i \ , \varepsilon)$. Donc si on définit un ouvert comme étant un sous-ensemble de $C^m(\Omega)$ qui est voisinage de chacun de ses points, on vérifie bien que l'on obtient une topologie τ sur $C^m(\Omega)$.

Proposition $1-1$ (Caractérisation de la topologie τ de $C^m(\Omega)$)

Soit $\{u_k\}_{k \in \mathbb{N}}$ une suite de $C^m(\Omega)$ et $u \in C^m(\Omega)$. Les propositions suivantes sont équivalentes :

1) La suite $\{u_k\}_{k \in \mathbb{N}}$ converge vers u pour la topologie τ.

2) Pour tout multi-indice $\alpha \in \mathbb{N}^n$, $|\alpha| \leq m$, (tout α si $m = +\infty$) et pour tout compact $\mathbf{K}$ de Ω,

la suite $\{D^\alpha u_k\}_{k \in \mathbb{N}}$ converge uniformément vers $D^\alpha u$ sur $\mathbf{K}$.

Proposition 1 − 2

La topologie τ ainsi définie sur $C^m(\Omega)$ est métrisable. Plus précisément, si on prend pour $u,\ v\ \in C^m(\Omega)$:

$$d(u\ ,\ v) = \sum_{i=1}^{+\infty} \frac{1}{2^i} \frac{p_i(u-v)}{1+p_i(u-v)}\ . \tag{1.1}$$

Alors

1) d est une métrique sur $C^m(\Omega)$ qui définit la même topologie que τ.

2) $C^m(\Omega)$ muni de cette métrique est un espace complet.

Remarque 1 − 1

La topologie τ de l'espace $C^m(\Omega)$, définie précédemment, n'est pas normable (i.e n'est pas induite par une norme).

1.2 Les espaces $C_0^m(\Omega),\ 0 \leq m \leq +\infty$

Définition 1 − 1 (*Théorème*)

Soit $u \in C(\Omega)$. Le support de u est le sous-ensemble fermé de Ω défini par l'une des assertions équivalentes suivantes :

1) supp $u = \overline{\{x \in \Omega\ :\ u(x) \neq 0\}}$;

2) $x_0 \notin$supp $u \Leftrightarrow \exists V_{x_0}$ (voisinage de x_0) : $u(x) = 0$, $\forall x \in V_{x_0}$;

3) C(supp u) est le plus grand ouvert où u est nulle.

On peut facilement vérifier les propriétés suivantes :

a) supp $u = \varnothing \Leftrightarrow u \equiv 0$ dans Ω ,

b) supp $(u.v) \subset$ supp $u \cap$ supp v ,

c) supp $\dfrac{\partial u}{\partial x_i} \subset$ supp u , $i = 1, ..., n$ si $u \in C^1(\Omega)$.

Définition 1 – 2

Pour $m \in \mathbb{N} \cup \{+\infty\}$, $C_0^m(\Omega)$ désigne l'ensemble des $u \in C^m(\Omega)$ tels que supp u est un compact contenu dans Ω.

Remarque 1 – 2

a) Si $u \in C_0^m(\Omega)$, son prolongement par zéro à l'extérieur de Ω appartient à $C_0^m(\mathbb{R}^n)$, i.e la fonction définie sur $\mathbb{R}^n$ par,

$$\tilde{u}(x) = \begin{cases} u(x) & \text{si } x \in \Omega \\ 0 & \text{si } x \notin \Omega \end{cases} \in C_0^m(\mathbb{R}^n) \tag{1.2}$$

b) L'espace $C_0^m(\Omega) \neq \varnothing$ (n'est pas vide) . En effet, si on prend un $x_0 \in \Omega$ et $a > 0$ tel que $\{x_0\} \neq \{x \in \Omega \;:\; |x - x_0| < a\} \subset \Omega$. La fonction φ définie sur Ω par

$$\varphi(x) = \begin{cases} \exp(\dfrac{1}{|x - x_0|^2 - a^2}) & \text{si} \quad |x - x_0| < a \\ \\ 0 & \text{si} \quad |x - x_0| \geq a \;, \quad x \in \Omega \end{cases} , \tag{1.3}$$

appartient à $C_0^m(\Omega)$ (elle est même dans $C_0^\infty(\Omega)$) et son support est la boule fermée de centre x_0 et de rayon a.

1.3 Les fonctions-test

Définition 1 – 3

L'ensemble de toutes les fonctions indéfiniment dérivables définies de Ω dans $\mathbb{C}$ et à support compact est noté $\mathcal{D}(\Omega)$ ou $C_0^\infty(\Omega)$. Qui est un espace vectoriel et tout élément de cet espace s'appelle une fonction-test.

Définition 1 – 4

Si $\mathbf{K}$ est un compact de Ω on note par $\mathcal{D}_{\mathbf{K}}(\Omega)$ l'espace de toutes les fonctions-test $\varphi \in \mathcal{D}(\Omega)$ telles que supp $\varphi \subset \mathbf{K}$.

Exemple

$$\rho(x) = \begin{cases} \exp\left(\dfrac{1}{|x|^2 - 1}\right) & \text{si} \quad |x| < 1 \\ \\ 0 & \text{si} \quad |x| \geq 1 \ , \end{cases} \tag{1.4}$$

est une fonction-test sur $\mathbb{R}^n$ i.e. $\rho \in \mathcal{D}(\mathbb{R}^n)$.

En utilisant cette fonction $\rho(x)$ on peut construire une infinité de fonctions-test, pour $\varepsilon > 0$ on définit

$$\psi_\varepsilon(x) = \frac{\rho(\frac{x}{\varepsilon})}{\int\limits_{\mathbb{R}^n} \rho(\frac{x}{\varepsilon})dx} \in \mathcal{D}(\mathbb{R}^n) \ , \text{supp } \psi_\varepsilon = \{x \ : \ |x| \leq \varepsilon\} \quad \text{et} \quad \int\limits_{\mathbb{R}^n} \psi_\varepsilon(x)dx = 1. \tag{1.5}$$

Donnons d'abord quelques résultats qu'on utilisera par la suite.

Lemme 1 – 2 (La régularisation)

Soit $\psi \in \mathcal{D}(\mathbb{R}^n)$ telle que $\psi \geq 0$, $\int\limits_{\mathbb{R}^n} \psi(x)dx = 1$ et soit $\psi_\varepsilon(x) = \varepsilon^{-n}\psi(\frac{x}{\varepsilon}),\ \varepsilon > 0.$

Si pour $f \in L^p(\mathbb{R}^n),\ 1 \leq p < \infty$, on se donne

$$f_\varepsilon(x) = f * \psi_\varepsilon(x) = \int\limits_{\mathbb{R}^n} f(y)\psi_\varepsilon(x-y)dy. \tag{1.6}$$

alors

$$f_\varepsilon \in C^\infty(\mathbb{R}^n) \quad , \quad f_\varepsilon \rightarrow f \ \text{ dans } L^p(\mathbb{R}^n),\ \varepsilon \rightarrow 0 \ \text{ et on a } \|f_\varepsilon\|_p \leq \|f\|_p \ .$$

Théorème $1-1$ (*La densité*)

$\mathcal{D}(\mathbb{R}^n)$ est dense dans $L^p(\mathbb{R}^n)$ pour $1 \leq p < \infty$.

Théorème $1-2$ (*La partition de l'unité*)

Soit $\mathbf{K}$ est un compact de Ω et soient Ω_i , $i = 1, 2, ..k$, un recouvrement fini de $\mathbf{K}$ i.e. $\mathbf{K} \subset \bigcup_{i=1}^{k} \Omega_i$, alors il existe des fonctions $\varphi_i \in \mathcal{D}(\Omega_i)$ telles que $0 \leq \varphi_i \leq 1$, $i = 1, 2, ..k$ et $\sum_{i=1}^{k} \varphi_i = 1$ au voisinage de $\mathbf{K}$.

1.4 La convergence dans $\mathcal{D}(\Omega)$

Définition $1-5$

Soit Ω un ouvert de $\mathbb{R}^n$. Une suite de fonctions-test $\{\varphi_k\}_{k\in\mathbb{N}}$ converge vers zéro dans $\mathcal{D}(\Omega)$ si

(i) Il existe un compact $\mathbf{K}$ de Ω tel que supp $\varphi_k \subset \mathbf{K}$, $\forall k \in \mathbb{N}$.

(ii) Pour tout multi-indice α la suite $\{D^\alpha \varphi_k\}_{k\in\mathbb{N}}$ converge uniformément vers zéro dans Ω.

Exemple

La suite $\phi_p(x) = \frac{1}{p}\rho(x)$, $\rho(x)$ est la fonction donnée dans l'exemple précédent appartient à $\mathcal{D}(\mathbb{R}^n)$ et converge vers zéro dans $\mathcal{D}(\mathbb{R}^n)$.

Alors que la suite $\phi_p(x) = \rho(\frac{x}{p}) \in \mathcal{D}(\mathbb{R}^n)$ ne converge pas dans $\mathcal{D}(\mathbb{R}^n)$ lorsque $p \to \infty$ parce qu'il ne peut exister un compact $\mathbf{K}$ en dehors duquel toutes les $\phi_p(x)$ s'annulent.

1.5 Les distributions

Définition 1 – 6

Une application f de $\mathcal{D}(\Omega)$ dans $\mathbb{C}$ est appelée une fonctionnelle et on note sa valeur par

$$\langle f \ , \ \varphi \rangle \quad , \ \forall \varphi \in \mathcal{D}(\Omega).$$

Définition 1 – 7

Une fonctionnelle linéaire f définie sur $\mathcal{D}(\Omega)$ est dite continue si pour toute suite de fonctions-test $\{\varphi_k\}_{k\in\mathbb{N}}$ qui converge vers zéro dans $\mathcal{D}(\Omega)$ la suite numérique $\{\langle f \ , \ \varphi_k \rangle\}_{k\in\mathbb{N}}$ converge vers zéro.

Définition 1 – 8

On appelle distribution définie dans Ω toute fonctionnelle linéaire continue sur $\mathcal{D}(\Omega)$.

L'espace de toutes les distributions définies sur Ω est noté $\mathcal{D}'(\Omega)$ ou simplement $\mathcal{D}'$, c'est l'espace dual de $\mathcal{D}(\Omega)$.

Donnons maintenant quelques exemples de distributions :

1.5.1 Les Fonctions localement intégrables

Soit f une fonction localement intégrable sur $\mathbb{R}$, i.e. absolument intégrable sur tout intervalle fermé borné de $\mathbb{R}$, alors f définit une distribution par :

$$\langle f \ , \ \varphi \rangle = \int_{-\infty}^{+\infty} f(x)\varphi(x)dx \ , \ \forall \varphi \in \mathcal{D}(\mathbb{R}). \tag{1.7}$$

La distribution définie par f est notée aussi f. Il est assez clair que f est linéaire sur $\mathcal{D}(\mathbb{R})$. Montrons la continuité de f, soit $\{\varphi_k\}_{k\in\mathbb{N}}$ une suite de $\mathcal{D}(\mathbb{R})$ qui converge vers zéro dans $\mathcal{D}(\mathbb{R})$ tel que supp $\varphi_k \subset [a \ , \ b]$ alors :

$$|\langle f \ , \ \varphi_k \rangle| \leq \int_a^b |f(x)\varphi_k(x)|\, dx \leq \sup_{[a \ , \ b]} |\varphi_k(x)| \int_a^b |f(x)|\, dx \to 0 \ , \ \text{quand } k \to \infty \tag{1.8}$$

car $\{\varphi_k\}_{k\in\mathbb{N}}$ converge vers zéro dans $\mathcal{D}(\mathbb{R})$.

Les distributions qui sont définies par des fonctions localement intégrables sont appelées distributions régulières.

Proposition 1 − 3

Deux fonctions localement intégrables sur Ω définissent la même distribution si et seulement si elles sont égales presque partout.

Exemple

Pour tout nombre complexe λ, $\operatorname{Re}\lambda > -1$, les fonctions

$$x_+^\lambda = \begin{cases} x^\lambda & \text{si } x > 0 \\ 0 & \text{si } x \leq 0 \end{cases} \quad ; \quad x_-^\lambda = \begin{cases} |x|^\lambda & \text{si } x < 0 \\ 0 & \text{si } x \geq 0 \end{cases} . \tag{1.9}$$

définissent des distributions régulières dans $\mathbb{R}$ car elles sont localement intégrables.

1.5.2 La distribution delta de Dirac

Elle est définie par

$$\langle \delta \ , \ \varphi \rangle = \varphi(0) \ \ , \ \forall \varphi \in \mathcal{D}(\mathbb{R}) \ ; \tag{1.10}$$

de cette définition on peut voir facilement que δ est linéaire sur $\mathcal{D}(\mathbb{R})$, i.e.

$$\langle \delta \ , \ \alpha\varphi_1 + \beta\varphi_2 \rangle = \alpha \langle \delta \ , \ \varphi_1 \rangle + \ \beta \langle \delta \ , \ \varphi_2 \rangle \ \ , \ \forall \varphi_1, \ \varphi_2 \in \mathcal{D}(\mathbb{R}) \text{ et } \forall \ \alpha, \ \beta \in \mathbb{C}.$$

Montrons la continuité de δ et soit $\{\varphi_k\}_{k\in\mathbb{N}}$ une suite de $\mathcal{D}(\mathbb{R})$ qui converge vers zéro dans $\mathcal{D}(\mathbb{R})$. Alors

$$\langle \delta \ , \ \varphi_k \rangle = \varphi_k(0) \ \rightarrow 0 \quad \text{quand } k \rightarrow +\infty$$

donc δ est une fonctionnelle linéaire continue sur $\mathcal{D}(\mathbb{R})$ i.e c'est une distribution sur $\mathbb{R}$.

Remarquons que δ n'est pas une distribution régulière, en effet supposons le contraire i.e qu'elle est définie par une fonction localement intégrable alors on aura

$$\varphi(0) = \langle \delta \ , \ \varphi \rangle = \int_{-\infty}^{+\infty} \delta(x)\varphi(x)dx \quad , \ \forall \varphi \in \mathcal{D}(\mathbb{R}).$$

Soit $\varphi(x) = \rho(\frac{x}{a}),\ a > 0$, où ρ est la fonction donnée plus haut.

Alors

$$e^{-1} = \int_{-a}^{+a} \delta(x) \exp(\frac{-a^2}{a^2 - x^2}) dx \tag{1.11}$$

$$\text{i.e.} \qquad e^{-1} \leq e^{-1} \int_{-a}^{+a} |\delta(x)| \, dx \to 0 \quad , \quad \text{quand } a \to 0^+ \ ; \tag{1.12}$$

ce qui est impossible d'où la contradiction i.e. δ ne peut être une distribution régulière.

De la définition de la distribution delta de Dirac il est possible de vérifier les propriétés suivantes :

(i) $\delta(x) = \delta(-x)$;

(ii) $\delta(ax) = \dfrac{1}{|a|}\delta(x)$, $a \neq 0$;

(iii) $\delta(x^2 - a^2) = \dfrac{1}{2\,|a|}\left(\delta(x-a) + \delta(x+a)\right)$;

(iv) $\delta(f(x)) = \sum_k \dfrac{1}{|f'(x_k)|}\delta(x - x_k)$, $f(x_k) = 0.$

Remarque 1 − 3

Toute distribution qui n'est pas régulière est appelée distribution singulière.

1.5.3 La distribution " Valeur principale "

Considérons la fonction $x \mapsto \dfrac{1}{x}$ de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$. Cette fonction n'est pas localement intégrable sur $\mathbb{R}$, mais elle l'est sur $\mathbb{R}^*$. Nous allons voir comment prolonger à $\mathbb{R}$ la distribution que cette fonction définit sur $\mathbb{R}^*$.

Proposition 1 – 4

Pour toute fonction-test $\varphi \in \mathcal{D}(\mathbb{R})$, la limite

$$VP\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{\varphi(x)}{x}dx = \lim_{\varepsilon \to 0^+} \int_{|x|>\varepsilon} \frac{\varphi(x)}{x}dx \tag{1.13}$$

existe. La fonctionnelle linéaire ainsi définie est une distribution sur $\mathbb{R}$, appelée " valeur principale" de $\frac{1}{x}$ et notée $VP(\frac{1}{x})$.

En effet, soit $\varphi \in \mathcal{D}(\mathbb{R})$ et soit $a > 0$ tel que supp$\varphi \subset [-a\ ,\ a]$ .En utlisant le développement de $Taylor$ on peut écrire :

$$\varphi(x) = \varphi(0) + x\psi(x) \tag{1.14}$$

où $\psi(x)$ est une fonction continue sur $\mathbb{R}$.

Alors si $\varepsilon < a$

$$\int_{\varepsilon}^{a} \frac{\varphi(x)}{x}dx = \varphi(0)\int_{\varepsilon}^{a} \frac{dx}{x} + \int_{\varepsilon}^{a} \psi(x)dx \quad \text{et} \quad \int_{-a}^{-\varepsilon} \frac{\varphi(x)}{x}dx = -\varphi(0)\int_{\varepsilon}^{a} \frac{dx}{x} + \int_{-a}^{-\varepsilon} \psi(x)dx$$

d'où

$$\int_{|x|>\varepsilon} \frac{\varphi(x)}{x}dx = \int_{-a}^{-\varepsilon} \psi(x)dx + \int_{\varepsilon}^{a} \psi(x)dx \tag{1.15}$$

et puisque $\psi(x)$ est continue en $x = 0$ alors

$$VP\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{\varphi(x)}{x}dx = \lim_{\varepsilon \to 0^+} \int_{|x|>\varepsilon} \frac{\varphi(x)}{x}dx = \int_{-a}^{a} \psi(x)dx \tag{1.16}$$

$$\text{i.e.} \qquad \left\langle VP(\frac{1}{x})\ ,\ \varphi \right\rangle = \int_{-a}^{a} \psi(x)dx\ , \tag{1.17}$$

il est assez clair que $VP(\frac{1}{x})$ est linéaire sur $\mathcal{D}(\mathbb{R})$.

Montrons que $VP(\frac{1}{x})$ est continue sur $\mathcal{D}(\mathbb{R})$. Soit $\{\varphi_k\}_{k\in\mathbb{N}}$ une suite de $\mathcal{D}(\mathbb{R})$ qui converge vers zéro dans $\mathcal{D}(\mathbb{R})$ et $a > 0$ tel que supp $\varphi_k \subset [-a\ ,\ a]\ \ \forall k \in \mathbb{N}$, alors on peut écrire :

$$\left|\left\langle VP(\frac{1}{x})\ ,\ \varphi_k \right\rangle\right| = \left|\int_{-a}^{a} \psi_k(x)dx\right| = \left|\int_{-a}^{a} \frac{\varphi_k(x) - \varphi_k(0)}{x} dx\right| \leq \int_{-a}^{a} \frac{1}{|x|} \left|\int_{0}^{x} \varphi_k'(t)dt\right| dx$$

$$\leq \int_{-a}^{a} \frac{1}{|x|} \left|\int_{0}^{x} \left|\varphi_k'(t)\right| dt\right| dx \leq 2a \sup_{[-a\ ,\ a]} \left|\varphi_k'(x)\right| \to 0\ ,\ \text{quand } k \to \infty \tag{1.18}$$

d'où $VP(\frac{1}{x})\ \in \mathcal{D}'(\mathbb{R})$.

Le théorème suivant donne une caractérisation très utile de $\mathcal{D}'(\Omega)$.

Théorème $1-3$

Une fonctionnelle linéaire f est une distribution sur Ω si et seulement si, pour tout compact $\mathbf{K}$ de Ω il existe $C_{\mathbf{K}} > 0$ et $k \in \mathbb{N}$ tels que

$$|\langle f\ \ ,\ \varphi\rangle| \leq C_{\mathbf{K}} \sum_{|\alpha|\leq k} \sup_{x\in\mathbf{K}} |D^{\alpha}\varphi(x)|\quad ,\quad \forall\varphi \in \mathcal{D}_{\mathbf{K}}(\Omega). \tag{1.19}$$

1.6 L'ordre d'une distribution

L'entier $k \in \mathbb{N}$ intervenant dans la relation (1.19) du théorème précédent peut dépendre du compact $\mathbf{K}$. Si par contre un même k est valable pour tous les compacts on dit que la distribution f est d'ordre inférieur ou égal à k.

Définition $1-9$

Le plus petit k pour lequel la relation (1.19) est vérifiée pour tous les compacts $\mathbf{K}$ est appelé l'ordre de la distribution $f \in \mathcal{D}'(\Omega)$. L'ensemble de ces distributions est noté $\mathcal{D}'^{\,(k)}(\Omega)$.

On note aussi $\mathcal{D}'^{\,F}(\Omega) = \bigcup_{k\in\mathbb{N}} \mathcal{D}'^{\,(k)}(\Omega)$, l'espace des distributions d'ordre fini.

Remarque $1-4$

On peut dire alors qu'une distribution f est d'ordre k si f appartient $\mathcal{D}'^{\,(k)}(\Omega)$ mais pas à $\mathcal{D}'^{\,(k-1)}(\Omega)$.

Exemples

$a)$ Toute distribution régulière est d'ordre zéro.

$b)$ La distribution delta de Dirac est d'ordre zéro.

$c)$ La distribution $VP(\frac{1}{x})$ est d'ordre 1.

1.7 Le support d'une distribution

Nous allons introduire maintenant la notion de support pour une distribution qui généralise celle donnée plus haut pour les fonctions continues.

Définition $1-10$

Soit $f \in \mathcal{D}'(\Omega)$ et ω un ouvert contenu dans Ω. On dit que f est nulle dans ω si

$$\langle f \ , \ \varphi \rangle = 0 \quad , \quad \forall \varphi \in \mathcal{D}(\omega).$$

Lemme $1-3$

Soit $(\omega_i)_{i\in I}$ une famille d'ouverts de Ω et $\omega = \bigcup_{i\in I} \omega_i$. Si $f \in \mathcal{D}'(\Omega)$ est nulle dans chaque ω_i alors f est nulle dans ω.

Preuve

Soit $\varphi \in \mathcal{D}(\omega)$, posons $\mathbf{K}$ le compact de Ω tel que supp $\varphi = \mathbf{K}$.On a évidemment $\mathbf{K} \subset \bigcup_{i\in I} \omega_i$ alors il existe un ensemble fini d'indices $J \subset I$ tel que $\mathbf{K} \subset \bigcup_{i\in J} \omega_i$. Soit $(\chi_i)_{i\in J}$ une partition de l'unité relative au recouvrement $(\omega_i)_{i\in J}$ de $\mathbf{K}$ i.e

$$\chi_i \in \mathcal{D}(\omega_i), \ \forall i \in J \qquad \text{et} \qquad \sum_{i\in J} \chi_i(x) = 1 \ \text{ pour } x \in \bigcup_{i\in J} \omega_i.$$

Comme supp $\varphi = \mathbf{K}$ on a alors

$$\varphi(x) = \sum_{i \in J} \chi_i\,(x)\varphi(x)$$

et donc

$$\langle f\ ,\ \varphi\rangle = \sum_{i \in J} \langle f\ ,\ \chi_i\,\varphi\rangle$$

or $\chi_i\,\varphi \in \mathcal{D}(\omega_i)$, f est nulle dans ω_i donc $\langle f\ ,\ \chi_i\,\varphi\rangle = 0$ et par suite $\langle f\ ,\ \varphi\rangle = 0$ i.e $f = 0$ dans ω.

Remarque $1-5$

Ce lemme montre que pour toute distribution $f \in \mathcal{D}'(\Omega)$ il existe un plus grand ouvert où f est nulle : c'est la réunion de tous les ouverts où $f = 0$. On introduit alors la définition suivante.

Définition $1-11$

Pour $f \in \mathcal{D}'(\Omega)$, le support de f , que l'on note supp f , est le complémentaire du plus grand ouvert où f est nulle.

Donnons quelques propriétés du support d'une distribution qui sont facile à obtenir directement de la définition du support.

Propriété 1 $x_0 \notin$supp $f \Leftrightarrow \exists V_{x_0}$ voisinage de x_0 tel que $\langle f\ ,\ \varphi\rangle = 0$, $\forall \varphi \in \mathcal{D}(V_{x_0})$.

Propriété 2 $x_0 \in$supp $f \Leftrightarrow \forall V_{x_0}$ voisinage de x_0 $\exists \varphi \in \mathcal{D}(V_{x_0})$ tel que $\langle f\ ,\ \varphi\rangle \neq 0$.

Propriété 3 supp $f \subset F \Leftrightarrow f = 0$ dans CF .

Exemples

1) Si f est une fonction continue alors le support de f autant que fonction et le support de f autant que distribution coïncident i.e. si on note la distribution associée à f par T_f alors supp f =supp T_f . En effet si $x_0 \notin$supp f il existe V_{x_0} tel que $f\,(x) = 0$, $\forall x \in V_{x_0}$. Alors si $\varphi \in \mathcal{D}(V_{x_0})$ $f\,(x)\varphi(x) = 0$ dans Ω et donc $\langle T_f\ ,\ \varphi\rangle = 0$ i.e. $x_0 \notin$supp T_f .

Inversement si $x_0 \notin$supp T_f il existe V_{x_0} tel que

$$\langle T_f \ , \ \varphi\rangle = \int f\ (x)\varphi(x)dx \ = 0 \ , \ \forall\varphi \in \mathcal{D}(V_{x_0}),$$

ce qui implique que $f\ (x) = 0$ dans V_{x_0} et donc $x_0 \notin$supp f.

2) Si $\langle f \ , \ \varphi\rangle = D^\alpha\varphi(x_0)$ alors supp $f = \{x_0\}$. En effet si $\varphi \in \mathcal{D}(\Omega - \{x_0\})$ on a $\langle f \ , \ \varphi\rangle = 0$ et donc supp $f \subset \{x_0\}$.

Inversement $x_0 \in$ supp f. En effet soit V_{x_0} un voisinage ouvert de x_0 et $\chi \in \mathcal{D}(V_{x_0})$, $\chi = 1$ au voisinage de x_0. Prenons $\varphi(x) = \dfrac{(x-x_0)^\alpha}{\alpha!}\chi(x)$, alors par application de la formule de *Leibniz*, il est facile de voir que $D^\alpha\varphi(x_0) = 1$.

<u>Théorème 1 – 4</u>

Soit $f \in \mathcal{D}'(\Omega)$ et $\varphi \in \mathcal{D}(\Omega)$ tels que

$$\text{supp } f \cap \text{supp } \varphi = \varnothing \ \ , \text{ alors } \ \ \langle f \ , \ \varphi\rangle = 0 \ .$$

<u>Preuve</u>

Si supp $f\cap$ supp $\varphi = \varnothing$ alors supp φ est contenu dans le complémentaire du support de f, donc pour tout $x \in$ supp φ il existe un voisinage V_x tel que

$$\langle f \ , \ \psi\rangle = 0 \text{ pour tout } \psi \in \mathcal{D}(V_x).$$

Alors supp $\varphi \subset \bigcup\limits_{x\in \text{supp } \varphi} V_x$; comme supp φ est un compact donc il existe un nombre fini de points $x_1, x_2, ..., x_n$ du support de φ tel que supp $\varphi \subset \bigcup\limits_{i=1}^{n} V_{x_i}$. Soit $(\chi_i)_{i=1}^n$ une partition de l'unité relative au recouvrement $(V_{x_i})_{i=1}^n$ i.e

$$\chi_i \in \mathcal{D}(V_{x_i}), \ \ \forall i = 1, 2, .., n \qquad \text{et} \qquad \sum_{i=1}^{n}\chi_i\ (x) = 1 \ \text{ pour } x \in \bigcup_{i=1}^{n} V_{x_i}.$$

Comme supp $\varphi \subset \bigcup_{i=1}^{n} V_{x_i}$ on a alors

$$\varphi(x) = \sum_{i=1}^{n} \chi_i\,(x)\varphi(x)\ , \quad \text{pour } x \in \text{supp}\ \varphi$$

et donc

$$\langle f\ ,\ \varphi\rangle = \sum_{i=1}^{n} \langle f\ ,\ \chi_i\,\varphi\rangle = 0\ \ , \quad \text{car}\ \ \chi_i\,\varphi \in \mathcal{D}(V_{x_i})\ .$$

1.8 Les opérations sur les distributions

Plusieurs opérations définies pour les fonctions peuvent être prolongées de la même manière pour les distributions i.e. dans $\mathcal{D}'$.

1.8.1 Addition

La somme de deux distributions de f et g $\mathcal{D}'(\Omega)$ est définie par

$$\langle f\ + g\ ,\ \varphi\rangle = \langle f\ \ ,\ \varphi\rangle + \langle g\ \ ,\ \varphi\rangle\ \ \ ,\ \forall\varphi \in \mathcal{D}(\Omega).$$

$f + g$ est bien une distribution car elle définit une fonctionnelle linéaire et continue sur $\mathcal{D}(\Omega)$.

1.8.2 La multiplication par une constante

La multiplication d'une distribution par une constante $\lambda \in \mathbb{C}$ est définie par

$$\langle \lambda f\ \ ,\ \varphi\rangle = \langle f\ \ ,\ \lambda\varphi\rangle\ \ \ ,\ \ \forall\varphi \in \mathcal{D}(\Omega).$$

Il est évident que c'est une distribution de $\mathcal{D}'(\Omega)$.

Remarque 1 − 6

Il est clair que, d'après ce qui précède, on vient de munir l'espace $\mathcal{D}'(\Omega)$ d'une structure d'espace vectoriel sur $\mathbb{C}$.

1.8.3 La translatée d′une distribution

Notons d'abord que pour une fonction f localement intégrable dans $\mathbb{R}^n$ et $a \in \mathbb{R}^n$, par le changement de variable on a

$$\int_{\mathbb{R}^n} f(x-a)\varphi(x)dx = \int_{\mathbb{R}^n} f(x)\varphi(x+a)dx \quad , \quad \forall\varphi \in \mathcal{D}(\mathbb{R}^n) \tag{1.20}$$

ce qui peut être étendu facilement et de la même manière pour une distribution $f \in \mathcal{D}'(\mathbb{R}^n)$ et $a \in \mathbb{R}^n$, i.e. on définit la translatée de la distribution $f \in \mathcal{D}'(\mathbb{R}^n)$ par

$$\langle f(x-a) \ , \ \varphi(x)\rangle = \langle f(x) \ , \ \varphi(x+a)\rangle \quad , \quad \forall\varphi \in \mathcal{D}(\mathbb{R}^n). \tag{1.21}$$

$f(x-a)$ est bien une distribution dans $\mathcal{D}'(\mathbb{R}^n)$.

De là on a $\langle \delta(x-a) \ , \ \varphi(x)\rangle = \langle \delta(x) \ , \ \varphi(x+a)\rangle = \varphi(a) \ , \ \forall\varphi \in \mathcal{D}(\mathbb{R}^n)$.

1.8.4 La multiplication par une fonction C^∞

La multiplication ou la division de deux distributions est une opération qui n'est pas toujours valable et qui peut engendrer des problèmes, elle n'est pas en général définie, comme on peut le voir sur cet exemple pour $f(x) = g(x) = \dfrac{1}{\sqrt{|x|}} \in \mathcal{D}'(\mathbb{R})$ car elles sont localement intégrables mais $f(x)g(x) = \dfrac{1}{|x|} \notin \mathcal{D}'(\mathbb{R})$. Par contre si $f(x) \in \mathcal{D}'(\Omega)$ et $\psi(x) \in C^\infty(\Omega)$ le produit $\psi(x)f(x)$ peut avoir un sens et définit une distribution sur Ω, comme on peut le voir d'après ce qui suit.

Définition 1 – 12 (*Théorème*)

Soit $f(x) \in \mathcal{D}'(\Omega)$ et $\psi(x) \in C^\infty(\Omega)$. La fonctionnelle linéaire ψf sur $\mathcal{D}(\Omega)$ définie par

$$\langle \psi f \ , \ \varphi \rangle = \langle f \ , \ \psi\varphi \rangle \quad , \quad \forall \varphi \in \mathcal{D}(\Omega) \ ; \tag{1.22}$$

est une distribution sur Ω.

Il est assez facile de vérifier les propriétés suivantes :

Propriété 4 Pour $f_1, \ f_2 \in \mathcal{D}'(\Omega)$ et $\psi_1, \ \psi_2 \in C^\infty(\Omega)$ on a

$$(\psi_1 + \psi_2) \ f_1 = \psi_1 \ f_1 + \psi_2 \ f_1 \quad , \quad \psi_1\psi_2 \ f_1 = \psi_1 \ (\psi_2 \ f_1) \ , \ \psi_1 \ (f_1 + f_2) = \psi_1 \ f_1 + \psi_1 \ f_2 \ .$$

Propriété 5 Pour $f \in \mathcal{D}'(\Omega)$ et $\psi \in C^\infty(\Omega)$ on a

$$\text{supp} \ (\ \psi f) \subset \text{supp} \ (\ \psi) \cap \text{supp} \ (\ f) \, .$$

Exemples

1) Si $\psi \in C^\infty(\Omega)$ et $x_0 \in \Omega$ on a : $\psi\delta(x - x_0) = \psi(x_0)\delta(x - x_0)$; en particulier sur $\mathbb{R}$ on a $x^m\delta = 0$, $\forall m \geq 1$.

2) Le produit $\cos x \ \delta$ est une distribution définie sur $\mathcal{D}(\mathbb{R})$ par

$$\langle \cos x \ . \ \delta \ , \ \varphi \rangle = \langle \delta \ , \ \cos x \ \varphi \rangle \ = \varphi(0) \ , \ \forall \varphi \in \mathcal{D}(\mathbb{R}).$$

De même

$$\langle \sin x \ . \ \delta \ , \ \varphi \rangle = \langle \delta \ , \ \sin x \ \varphi \rangle \ = 0 \ , \ \forall \varphi \in \mathcal{D}(\mathbb{R}).$$

Proposition 1 − 5

Si $f \in \mathcal{D}'(\mathbb{R})$. On a équivalence entre les deux propositions suivantes :

a) $xf = 0$ au sens de $\mathcal{D}'(\mathbb{R})$.

b) $f = c\delta$, où $c \in \mathbb{C}$ et δ est la distribution delta de Dirac à l'origine.

Preuve

b) $\Rightarrow$ *a)* c'est évident.

Montrons la réciproque. Pour toute fonction $\varphi \in \mathcal{D}(\mathbb{R})$ on a

$$\langle xf \ , \ \varphi\rangle = \langle f \ , \ x\varphi\rangle = 0 \ . \tag{1.23}$$

Donc f s'annule sur toutes les fonctions de la forme $x\varphi$ où $\varphi \in \mathcal{D}(\mathbb{R})$. Or on a l'équivalence

$$\psi = x\varphi \ , \ \varphi \in \mathcal{D}(\mathbb{R}) \Leftrightarrow \psi \in \mathcal{D}(\mathbb{R}) \ \text{ et } \psi(0) = 0. \tag{1.24}$$

L'implication $\Rightarrow$ est évidente. Inversement si $\psi \in \mathcal{D}(\mathbb{R})$, supp $\psi \subset [-a \ , \ a]$, $a > 0$, et $\psi(0) = 0$, la formule de Taylor permet d'écrire

$$\psi(x) = \psi(0) + x\int_0^1 \psi'(tx)dt = x\varphi(x).$$

La fonction φ est de classe C^∞ et si $|x| > a$ on a $\psi(x) = 0$ d'où $\varphi(x) = 0$, i.e. $\varphi \in \mathcal{D}(\mathbb{R})$.

On déduit alors de (1.24) que f s'annule sur toutes les fonctions $\psi \in \mathcal{D}(\mathbb{R})$ et $\psi(0) = 0$. Fixons $\chi \in \mathcal{D}(\mathbb{R})$, $\chi = 1$ pour $|x| \leq 1$. Soit $\varphi \in \mathcal{D}(\mathbb{R})$ quelconque. Posons $\psi = \varphi - \varphi(0)\chi$ alors

$$\langle f \ , \ \psi\rangle = 0 \qquad \text{d'où} \qquad \langle f \ , \ \varphi\rangle = \varphi(0)\, \langle f \ , \ \chi\rangle$$

$$\text{i.e} \quad \langle f \ , \ \varphi\rangle = c\, \langle \delta \ , \ \varphi\rangle \qquad \text{où} \qquad c = \langle f \ , \ \chi\rangle$$

ce qui prouve *b)*.

1.9 Les distributions à support compact

Définition 1 – 13

On note $\mathcal{E}^{'}(\Omega)$ l'espace vectoriel sur $\mathbb{C}$ des distributions à support compact.

Définition 1 – 14

On dit qu'une suite $\{\varphi_k\}_{k\in\mathbb{N}}$ de $C^\infty(\Omega)$ converge vers zéro dans $C^\infty(\Omega)$ si pour tout multi-indice α, $D^\alpha\varphi_k$ converge vers zéro uniformément dans tout compact de Ω.

Théorème 1 – 5

Soit Ω un ouvert de $\mathbb{R}^n$. Alors $\mathcal{D}(\Omega)$ est dense dans $C^\infty(\Omega)$.

Remarque 1 – 7

On définit la continuité et la linéarité d'une fonctionnelle sur $C^\infty(\Omega)$ de la même manière que dans $\mathcal{D}(\Omega)$, le dual topologique de $C^\infty(\Omega)$ est noté $(C^\infty(\Omega))^{'}$, qui est l'espace des fonctionnelles linéaires continues définies sur $C^\infty(\Omega)$.

On a le résultat principal suivant :

Théorème 1 – 6

Il existe une application linéaire bijective Φ de $\mathcal{E}^{'}(\Omega)$ dans le dual de $C^\infty(\Omega)$ qui permet d'identifier $\mathcal{E}^{'}(\Omega)$ à $(C^\infty(\Omega))^{'}$.

On peut caractériser cette application par :

Proposition 1 – 6

Soit $f\in\mathcal{E}^{'}(\Omega)$ et $\mathbf{K}_0 =$supp f. Il existe une application linéaire $\tilde{f}$ de $C^\infty(\Omega)$ dans $\mathbb{C}$ telle que

(i) $\left\langle \tilde{f}\ ,\ \varphi\right\rangle = \langle f\ ,\ \varphi\rangle$ si $\varphi\in\mathcal{D}(\Omega)$.

(ii) $\left\langle \tilde{f}\ ,\ \varphi\right\rangle = 0$ si $\varphi\in C^\infty(\Omega)$, supp $\varphi\cap\mathbf{K}_0=\varnothing$.

(iii) Il existe $k\in\mathbb{N}$, un compact $\mathbf{K}\subset\mathbf{\Omega}$ (voisinage de $\mathbf{K}_0$) et $c>0$ tels que

$$\left|\left\langle \tilde{f}\ ,\ \varphi\right\rangle\right| \leq c\sum_{|\alpha|\leq k}\sup_{\mathbf{K}}|D^\alpha\varphi(x)| \quad , \quad \forall\ \varphi\in C^\infty(\Omega).$$

On note par Φ l'application $f\mapsto\tilde{f}$ définie de $\mathcal{E}^{'}(\Omega)$ dans $(C^\infty(\Omega))^{'}$.

Proposition $1-7$

Soit $\tilde{f} \in (C^{\infty}(\Omega))'$. La restriction de $\tilde{f}$ à $\mathcal{D}(\Omega)$ est une distribution à support compact.

L'application $\mathcal{R}$ $\tilde{f} \mapsto \tilde{f}_{/\mathcal{D}(\Omega)}$ de $(C^{\infty}(\Omega))'$ dans $\mathcal{E}'(\Omega)$ est un inverse à droite de l'application Φ définie ci-dessus.

1.10 Exercices

Exercice 01 :

Soient $\varphi \in D(\mathbb{R}^n)$, $h \in \mathbb{R}^n \backslash \{0\}$. pour $t \in \mathbb{R} \backslash \{0\}$ on pose

$$\varphi_t(x) = \frac{\varphi(x+th) - \varphi(x)}{t}.$$

a) Montrer que $\varphi_t \in D(\mathbb{R}^n)$ pour $t \neq 0$.

b) Montrer que lorsque t tend vers 0, φ_t converge dans $D(\mathbb{R}^n)$ vers une fonction de $D(\mathbb{R}^n)$ et calculer cette fonction.

Exercice 02 :

a) Soit $\varphi \in D(\mathbb{R})$ telle que $supp\ \varphi \subset]1\ ,\ 2[$, $0 \leq \varphi(x) \leq 1$ et $\varphi(x) = 1$ pour $a \leq x \leq b$ où $1 < a < b < 2$. Pour $k \in \mathbb{N}^*$ posons

$$\varphi_k(x) = e^{-k}\varphi(kx).$$

Montrer que $\{\varphi_k\}_{k \in \mathbb{N}^*}$ converge vers zéro dans $D(\mathbb{R})$.

b) Montrer qu'il n'existe pas de distribution $f \in D\prime(\mathbb{R})$ telle que

$$\langle f\ ,\ \varphi \rangle = \int_{\mathbb{R}} \exp(\frac{1}{x^2})\ \varphi(x)dx\ .$$

Exercice 03 :

a) Montrer que pour $\lambda \in \mathbb{C}$ avec $\operatorname{Re}\lambda > -1$ les fonctions

$$x_+^\lambda = \begin{cases} x^\lambda \ , & x > 0 \\ 0 \ , & x \le 0 \end{cases} \quad ; \quad x_-^\lambda = \begin{cases} |x|^\lambda \ , & x < 0 \\ 0 \ , & x \ge 0 \end{cases}$$

définissent des distributions sur $\mathbb{R}$.

b) En remarquant que pour $\operatorname{Re}\lambda > -1$ on a

$$\int_0^{+\infty} x^\lambda \varphi(x)dx = \int_0^1 x^\lambda \left[\varphi(x) - \varphi(0)\right] dx + \int_1^{+\infty} x^\lambda \varphi(x)dx + \frac{\varphi(0)}{\lambda+1} \ ;$$

montrer que l'on peut définir une distribution x_+^λ pour $\operatorname{Re}\lambda > -2$ et $\lambda \neq -1$.

Définir la même chose pour x_-^λ et pour les mêmes valeurs de λ.

c) Généraliser ce procédé au cas où $\operatorname{Re}\lambda > -m-1$, $\lambda \neq -1, \ -2, \ ..., -m$.

d) Soient x_+^λ , x_-^λ les distributions définies pour $\operatorname{Re}\lambda > -m-1$, $\lambda \neq -1, \ -2, \ ..., -m$.

Calculer : $x.x_+^\lambda$, $x.\ x_-^\lambda$.

Exercice 04 :

Montrer que les applications suivantes définissent des distributions :

a) $D(\mathbb{R}) \ni \varphi \mapsto \langle Pf\dfrac{1}{x^2} \ , \ \varphi\rangle = \lim\limits_{\epsilon\to 0}\left[\displaystyle\int_{|x|\ge\epsilon} \frac{\varphi(x)}{x^2}dx - 2\frac{\varphi(0)}{\epsilon}\right]$;

b) $D(\mathbb{R}) \ni \varphi \mapsto \langle Pf\dfrac{H}{x^2} \ , \ \varphi\rangle = \lim\limits_{\epsilon\to 0}\left[\displaystyle\int_{\epsilon}^{+\infty} \frac{\varphi(x)}{x^2}dx - \frac{\varphi(0)}{\epsilon} + \varphi\prime(0)\ln\epsilon\right]$;

(Pf := partie finie ; H := la fonction de Heaviside)

c) Définir $Pf\dfrac{1}{x^m}$, $Pf\dfrac{H}{x^m}$ pour m entier $m \ge 3$.

Chapitre 2

LA DERIVATION DES DISTRIBUTIONS

On introduit dans ce chapitre la notion de dérivation pour les distributions. On donne une généralisation de la notion de dérivée pour les distributions mais tout en conservant cette même notion classique pour des fonctions ordinaires. Par un choix particulier de quelques exemples on met en exergue la diférence entre la dérivation classique (i.e. la dérivation des fonctions) et la dérivation distributionnelle.

2.1 La Dérivation des distributions

Soit $f \in C^1(\mathbb{R})$ et $\varphi \in \mathcal{D}(\mathbb{R})$. Alors une intégration par parties donne

$$\left\langle f' \ , \ \varphi \right\rangle = \int_{-\infty}^{+\infty} f'(x) \ \varphi(x) dx = -\int_{-\infty}^{+\infty} f(x) \ \varphi'(x) dx = -\left\langle f \ , \ \varphi' \right\rangle \tag{2.1}$$

ce qui motive la définition suivante :

<u>Définition 2 − 1</u>

Soit Ω un ouvert de $\mathbb{R}^n$. Alors la dérivée Df de $f \in \mathcal{D}'(\Omega)$ est définie par

$$\langle Df \ , \ \varphi \rangle = - \langle f \ , \ D\varphi \rangle \ \ , \ \ \forall \varphi \in \mathcal{D}(\Omega) \ ; \tag{2.2}$$

quelquefois on note aussi la dérivée par f' et $\dfrac{d}{dx}f$.

Si α est un multi-indice on définit

$$\langle D^\alpha f \ , \ \varphi\rangle = (-1)^{|\alpha|} \langle f \ , \ D^\alpha \varphi\rangle \quad , \quad \forall \varphi \in \mathcal{D}(\Omega) \ . \tag{2.3}$$

On note que le second membre de (2.3) est bien défini pour tout multi-indice α et qui représente une fonctionnelle linéaire continue dans $\mathcal{D}(\Omega)$ i.e. une distribution sur Ω.

Remarque $2-1$

Il est assez clair, d'après la définition 2 - 1, que toute distribution est indéfiniment différentiable, i.e. de classe C^∞.

Exemples

1) Soit H la fonction de *Heaviside* sur $\mathbb{R}$ définie par

$$H(x) = \begin{cases} 1 & \text{si} \quad x > 0 \\ 0 & \text{si} \quad x < 0 \end{cases} . \tag{2.4}$$

Alors

$$\left\langle H' \ , \ \varphi \right\rangle = -\left\langle H \ , \ \varphi' \right\rangle = -\int_0^{+\infty} \varphi'(x)dx = \varphi(0) = \langle \delta \ , \ \varphi\rangle \quad , \ \forall \varphi \in \mathcal{D}(\mathbb{R}) \tag{2.5}$$

i.e. au sens des distributions la dérivée de H est égale à δ (la distribution de Dirac), $H' = \delta$.

2) La fonction signe sur $\mathbb{R}$ est définie par :

$$Sign\ x = \begin{cases} 1 & \text{si} \quad x > 0 \\ -1 & \text{si} \quad x < 0 \end{cases} . \tag{2.6}$$

Donnons une autre forme de la fonction signe

$$Sign\ x \ = \ H(x) - H(-x) \ , \tag{2.7}$$

donc de 1) on aura au sens des distributions

$$\frac{d}{dx} Sign\ x = 2\delta. \tag{2.8}$$

Théorème 2 − 1

(i) La dérivée d'une distribution est aussi une distribution.

(ii) On peut intervertir l'ordre de dérivation dans la dérivation au sens des distributions.

Théorème 2 − 2

La dérivation est une opération linéaire continue dans $\mathcal{D}^{'}(\Omega)$ dans le sens suivant

$$D^{\alpha}(af + bg) \ = aD^{\alpha}f + bD^{\alpha}g \ , \quad \forall f, g \in \mathcal{D}^{'}(\Omega) \ \text{ et } \ a, b \in \mathbb{C}, \ \forall \alpha \in \mathbb{N}^n. \tag{2.9}$$

$$\text{Si} \quad f_k \to f \quad \text{dans } \mathcal{D}^{'}(\Omega) \ \text{ alors } \ D^{\alpha}f_k \to D^{\alpha}f \qquad \text{dans } \mathcal{D}^{'}(\Omega), \ \forall \alpha \in \mathbb{N}^n. \tag{2.10}$$

Remarque 2 − 2

On dit qu'une suite de distributions $\{f_k\}_{k\in\mathbb{N}}$ dans $\mathcal{D}^{'}(\Omega)$ converge vers zéro si et seulement si pour toute fonction-test $\varphi \in \mathcal{D}(\Omega)$ la suite numérique $\{\langle f_k \ , \ \varphi\rangle\}_{k\in\mathbb{N}}$ converge vers zéro au sens usuel.

Preuve (du Théorème 2 -2)

Soit $\varphi \in \mathcal{D}(\Omega)$, pour $f, g \in \mathcal{D}^{'}(\Omega)$, $a, b \in \mathbb{C}$ et $\alpha \in \mathbb{N}^n$ on a

$$\begin{aligned}
\langle D^{\alpha}(af + bg) \ , \ \varphi\rangle &= (-1)^{|\alpha|} \langle af + bg \ , \ D^{\alpha}\varphi\rangle = (-1)^{|\alpha|} \langle af \ , \ D^{\alpha}\varphi\rangle + (-1)^{|\alpha|} \langle bg \ , \ D^{\alpha}\varphi\rangle \\
&= (-1)^{|\alpha|} \langle f \ , \ aD^{\alpha}\varphi\rangle + (-1)^{|\alpha|} \langle g \ , \ bD^{\alpha}\varphi\rangle \\
&= (-1)^{|\alpha|} \langle f \ , \ D^{\alpha}(a\varphi)\rangle + (-1)^{|\alpha|} \langle g \ , \ D^{\alpha}(b\varphi)\rangle \\
&= \langle D^{\alpha}f \ , \ a\varphi\rangle + \langle D^{\alpha}g \ , \ b\varphi\rangle = \langle aD^{\alpha}f \ , \ \varphi\rangle + \langle bD^{\alpha}g \ , \ \varphi\rangle \\
&= \langle aD^{\alpha}f + bD^{\alpha}g \ , \ \varphi\rangle .
\end{aligned}$$

i.e. que D^{α}, $\forall \alpha \in \mathbb{N}^n$, est une opération linéaire sur $\mathcal{D}^{'}(\Omega)$.

Montrons que si $f_k \to f$ dans $\mathcal{D}'(\Omega)$ alors $D^\alpha f_k \to D^\alpha f$ dans $\mathcal{D}'(\Omega)$, $\forall \alpha \in \mathbb{N}^n$.

En effet puisque $f_k \to f$ dans $\mathcal{D}'(\Omega)$ donc $\forall \varphi \in \mathcal{D}(\Omega)$ on a $\langle f_k \ , \ \varphi \rangle \to \langle f \ , \ \varphi \rangle$, quand $k \to +\infty$. On sait que si $\varphi \in \mathcal{D}(\Omega)$ alors $D^\alpha \varphi \in \mathcal{D}(\Omega)$, $\forall \alpha \in \mathbb{N}^n$, et par suite $\langle f_k \ , \ D^\alpha \varphi \rangle \to \langle f \ , \ D^\alpha \varphi \rangle$, quand $k \to +\infty$ donc $\langle D^\alpha f_k \ , \ \varphi \rangle \to \langle D^\alpha f \ , \ \varphi \rangle$, quand $k \to +\infty$ i.e. $D^\alpha f_k \to D^\alpha f$, $\forall \alpha \in \mathbb{N}^n$, au sens de $\mathcal{D}'(\Omega)$.

Exemples

1) Soit la fonction

$$x_+ = \begin{cases} x & \text{si } x > 0 \\ 0 & \text{si } x \leq 0 \end{cases} \tag{2.11}$$

qui définit bien une distribution régulière, car elle est localement intégrable. Elle n'est pas dérivable au sens classique au point $x = 0$, mais on peut voir qu'elle est dérivable au sens distributionnel, en effet :

$$\left\langle x_+' \ , \ \varphi \right\rangle = -\left\langle x_+ \ , \ \varphi' \right\rangle = -\int_0^{+\infty} x\varphi'(x)dx \ , \ \forall \varphi \in \mathcal{D}(\mathbb{R}) \tag{2.12}$$

une intégration par parties donne

$$\begin{aligned} \left\langle x_+' \ , \ \varphi \right\rangle &= [-x\varphi(x)]_0^{+\infty} + \int_0^{+\infty} \varphi(x)dx = \int_0^{+\infty} H(x) \ \varphi(x)dx \\ &= \langle H(x) \ , \ \varphi \rangle \ , \forall \varphi \in \mathcal{D}(\mathbb{R}), \text{ i.e. } x_+' = H(x) \text{ au sens de } \mathcal{D}', \end{aligned} \tag{2.13}$$

où H est la fonction de *Heaviside*.

2) On définit la fonction caractéristique sur $[a \ , \ b]$ dans $\mathbb{R}$ par

$$I_{[a \ , \ b]}(x) = \begin{cases} 1 & \text{si } x \in [a \ , \ b] \\ 0 & \text{si } x \notin [a \ , \ b] \end{cases} . \tag{2.14}$$

Il est facile de vérifier que

$$I_{[a\ ,\ b]}(x) = H(x-a) - H(x-b)\ ,$$

alors

$$I'_{[a\ ,\ b]}(x) = \delta(x-a) - \delta(x-b)\ . \tag{2.15}$$

3) La fonction $\ln|x|$, pour $x \neq 0$, est intégrable au voisinage de l'origine donc elle est localement intégrable sur $\mathbb{R}$ i.e. elle définit une distribution règulière dans $\mathcal{D}'(\mathbb{R})$. Sa dérivée classique

$$\frac{d}{dx}\ln|x| = \frac{1}{x} \quad , \quad x \neq 0 \tag{2.16}$$

qui ne définit pas une distribution sur $\mathbb{R}$, car elle n'est pas intégrable au voisinage de l'origine ; mais sa dérivée au sens des distributions existe et on peut la calculer comme suit :

$$\left\langle \frac{d}{dx}\ln|x|\ ,\ \varphi \right\rangle = -\left\langle \ln|x|\ ,\ \varphi' \right\rangle \ ,\quad \forall\varphi \in \mathcal{D}(\mathbb{R})\ ; \tag{2.17}$$

donc

$$\begin{aligned}\left\langle \frac{d}{dx}\ln|x|\ ,\ \varphi \right\rangle &= -\int_{-\infty}^{+\infty} \ln|x|\ \varphi'(x)dx \\ &= -\lim_{\varepsilon\to 0}\left(\int_{-\infty}^{-\varepsilon} \ln|x|\ \varphi'(x)dx + \int_{\varepsilon}^{+\infty} \ln|x|\ \varphi'(x)dx \right),\end{aligned} \tag{2.18}$$

des intégrations par parties donnent

$$\left\langle \frac{d}{dx}\ln|x|\ ,\ \varphi \right\rangle = \lim_{\varepsilon\to 0}\left(\varepsilon\ln\varepsilon \frac{\varphi(\varepsilon)-\varphi(-\varepsilon)}{\varepsilon} \right) + \lim_{\varepsilon\to 0}\left(\int_{-\infty}^{-\varepsilon} \frac{\varphi(x)}{x}dx + \int_{\varepsilon}^{+\infty} \frac{\varphi(x)}{x}dx \right). \tag{2.19}$$

Le premier terme au second membre est nul car φ est dérivable à l'origine et le second terme est bien défini et tend vers $\left\langle VP(\frac{1}{x}) \ , \ \varphi \right\rangle$ lorsque $\varepsilon \to 0$, i.e.

$$\frac{d}{dx} \ln |x| = VP(\frac{1}{x}) \text{ au sens de } \mathcal{D}'(\mathbb{R}). \tag{2.20}$$

2.2 La Dérivation d'un produit $\psi \ f$

On va montrer que la dérivée d'un produit $\psi \ f$ pour $f \in \mathcal{D}'(\Omega)$ et $\psi \in C^\infty(\Omega)$ obéit à la même règle ordinaire pour le produit de deux fonctions classiques

$$D(\psi f) = D\psi \ f + \psi \ Df. \tag{2.21}$$

En effet pour $\varphi \in \mathcal{D}(\Omega)$ on a

$$\begin{aligned}
\langle D(\psi f) \ , \ \varphi \rangle &= - \langle \psi f \ , \ D\varphi \rangle = - \langle f \ , \ \psi D\varphi \rangle && (2.22)\\
&= - \langle f \ , D(\psi\varphi) - D\psi \ \varphi \rangle = - \langle f \ , D(\psi\varphi) \rangle + \langle f \ , D\psi \ \varphi \rangle \\
&= \langle Df \ , \ \psi\varphi \rangle + \langle f \ , \ D\psi \ \varphi \rangle = \langle \psi Df \ , \ \varphi \rangle + \langle D\psi \ f \ , \ \varphi \rangle \\
&= \langle \psi Df \ + D\psi \ f, \varphi \rangle . && (2.23)
\end{aligned}$$

En général on peut démontrer la formule de *Leibniz* pour le produit d'une distribution par une fonction de classe C^∞ et on a

$$D^\alpha(\psi f) = \sum_{\beta \leq \alpha} \begin{pmatrix} \alpha \\ \beta \end{pmatrix} D^\beta \psi D^{\alpha - \beta} f$$

pour $f \in \mathcal{D}'(\Omega)$ et $\psi \in C^\infty(\Omega)$.

Exemple

Pour $\varphi \in D(\mathbb{R})$ et $\psi \in C^1(\mathbb{R})$ on a

$$\begin{aligned} \langle \psi D\delta\ ,\ \varphi \rangle &= \langle D\delta\ ,\ \psi\varphi \rangle = -\langle \delta\ ,\ D(\psi\varphi)\rangle \qquad (2.24) \\ &= -D(\psi\varphi)(0) = -\psi(0)\varphi^{'}(0) - \psi^{'}(0)\varphi(0) \\ &= \left\langle \psi(0)D\delta - \psi^{'}(0)\delta\ \ ,\ \varphi \right\rangle \qquad (2.25) \end{aligned}$$

d'où

$$\psi D\delta = \psi(0)D\delta - \psi^{'}(0)\delta\ \ . \qquad (2.26)$$

En particulier

$$xD\delta = -\delta\ ,\quad x^k D\delta = 0\ \ ,\ \ k > 1. \qquad (2.27)$$

2.3 La formule des sauts

Soit f une fonction localement intégrable sur $\mathbb{R}$ telle que $\dfrac{d}{dx}f$ existe au sens ordinaire partout sauf en un nombre fini de points a_i , $i = 1...m$ tel que $f(a_i^-)$ et $f(a_i^+)$ existent. Alors la dérivée au sens des distributions est :

$$Df(x) = \frac{d}{dx}f + \sum_{i=1}^{m} \left[f(a_i^+) - f(a_i^-) \right] \delta(x - a_i) \qquad (2.28)$$

cette formule s'appelle formule des sauts.

En effet, soit $\varphi \in D(\mathbb{R})$, alors pour un point de discontinuité a, on a

$$\langle Df(x)\ ,\ \varphi \rangle = -\langle f(x)\ ,\ D\varphi \rangle = -\int_{-\infty}^{a} f(x)\varphi^{'}(x)dx - \int_{a}^{+\infty} f(x)\varphi^{'}(x)dx$$

$$= \left[f(a^+) - f(a^-)\right] \varphi(a) + \int_{-\infty}^{a} \frac{d}{dx} f \ \varphi(x)dx - \int_{a}^{+\infty} \frac{d}{dx} f \ \varphi(x)dx$$

$$= \left[f(a^+) - f(a^-)\right] \langle \delta(x-a) \ , \ \varphi \rangle + \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{d}{dx} f \ \varphi(x)dx$$

alors

$$Df(x) = \left[f(a^+) - f(a^-)\right] \langle \delta(x-a) \ , \ \varphi \rangle + \frac{d}{dx} f \ .$$

Remplaçons maintenant a par a_i et sommons pour $i = 1, 2, ...m$ i.e. si on suppose que $a_1 < a_2 < ... < a_m$ alors pour tout $\varphi \in D(\mathbb{R})$ on a

$$\langle Df(x) \ , \ \varphi \rangle = - \langle f(x) \ , \ D\varphi \rangle = - \int_{-\infty}^{a_1} f(x)\varphi'(x)dx - \sum_{i=1}^{m-1} \int_{a_i}^{a_{i+1}} f(x)\varphi'(x)dx - \int_{a_m}^{+\infty} f(x)\varphi'(x)dx.$$

Par des intégrations par parties on peut facilement voir que

$$\langle Df(x) \ , \ \varphi \rangle = \sum_{i=1}^{m} \left[f(a_i^+) - f(a_i^-)\right] \varphi(a_i) + \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{d}{dx} f(x) \ \varphi(x)dx$$

$$= \sum_{i=1}^{m} \left[f(a_i^+) - f(a_i^-)\right] \langle \delta(x-a_i) \ , \ \varphi \rangle + \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{d}{dx} f(x) \ \varphi(x)dx$$

i.e. au sens des distributions on a

$$Df(x) = \frac{d}{dx} f + \sum_{i=1}^{m} \left[f(a_i^+) - f(a_i^-)\right] \delta(x-a_i).$$

Remarque 2 − 3

On peut avoir la même chose même dans le cas d'un nombre dénombrable de points de discontinuité $(a_i)_{i=1}^{\infty}$ i.e.

$$Df(x) = \frac{d}{dx}f + \sum_{i=1}^{+\infty} \left[f(a_i^+) - f(a_i^-)\right] \delta(x - a_i).$$

Exemple

Soit f la fonction définie sur $\mathbb{R}$ telle que

$$f(x) = \frac{1}{2}(1 - \frac{x}{\pi}) \quad , \quad x \in [0 \ , \ 2\pi]$$

périodique de période 2π. Le saut aux points de discontinuité $x = \pm 2m\pi, \ m \in \mathbb{N}$, est 1. Alors en appliquant la formule des sauts on obtient

$$Df(x) = -\frac{1}{2\pi} + \sum_{m=-\infty}^{+\infty} \delta(x - 2m\pi).$$

2.4 Les distributions homogènes

Définition 2 − 2

Soit $f \in D'(\mathbb{R}^n)$ et $\alpha \in \mathbb{R}$. On dit que f est homogène de degré α si pour tout $\lambda > 0$ et $\forall \varphi \in D(\mathbb{R}^n)$ on a

$$\langle f \ , \ \varphi_\lambda \rangle = \lambda^{-n-\alpha} \langle f \ , \ \varphi \rangle \tag{2.29}$$

où φ_λ est la fonction $x \mapsto \varphi(\lambda x)$.

Exemples et remarques

1) Si f est donnée par une fonction continue cette définition coïncide avec la notion classique de fonction homogène de degré $\alpha \in \mathbb{R}$ i.e. $f(\lambda x) = \lambda^\alpha f(x)$ pour $x \in \mathbb{R}^n$ et $\lambda > 0$. En effet si f est homogène en ce dernier sens, alors $\forall \varphi \in D(\mathbb{R}^n)$ on a

$$\langle f \ , \ \varphi_\lambda \rangle = \int_{\mathbb{R}^n} f(x)\varphi(\lambda x)dx = \lambda^{-n} \int_{\mathbb{R}^n} f(\frac{x}{\lambda})\varphi(x)dx = \lambda^{-n-\alpha} \int_{\mathbb{R}^n} f(x)\varphi(x)dx = \lambda^{-n-\alpha} \langle f \ , \ \varphi \rangle \tag{2.30}$$

d'où (2.29) et réciproquement.

2) Si f est une distribution homogène de degré $\alpha \in \mathbb{R}$, alors $\dfrac{\partial}{\partial x_i} f$ est homogène de degré $\alpha - 1$.

3) Si ψ est une fonction C^∞ homogène de degré α_1 et f une distribution homogène de degré α_2 alors ψf est homogène de degré $\alpha_1 + \alpha_2$.

4) La distribution $f = D^\alpha \delta$ est homogène de degré $-n - |\alpha|$. En effet

$$\begin{aligned} \langle D^\alpha \delta \ , \ \varphi_\lambda \rangle &= (-1)^{|\alpha|} \langle \delta \ , \ D^\alpha \varphi_\lambda \rangle = (-1)^{|\alpha|} \left\langle \delta \ , \ \lambda^{|\alpha|} (D^\alpha \varphi)_\lambda \right\rangle \\ &= (-1)^{|\alpha|} \ \lambda^{|\alpha|} D^\alpha \varphi(0) = (-1)^{|\alpha|} \ \lambda^{|\alpha|} \langle \delta \ , \ D^\alpha \varphi \rangle \\ &= \lambda^{|\alpha|} \langle D^\alpha \delta \ , \ \varphi \rangle == \lambda^{-n-(-n-|\alpha|)} \langle D^\alpha \delta \ , \ \varphi \rangle \quad \forall \varphi \in \ D(\mathbb{R}^n). \end{aligned} \tag{2.31}$$

Le théorème suivant donne une caractérisation des distributions homogènes.

Théorème 2 − 3

Une distribution $f \in D^{'}(\mathbb{R}^n)$ est homogène de degré $\alpha \in \mathbb{R}$ si et seulement si

$$\sum_{i=1}^{n} x_i \frac{\partial}{\partial x_i} f = \alpha f \quad . \tag{2.32}$$

2.4.1 Les distributions indépendantes d'une variable

Si $f \in D^{'}(\mathbb{R}^n)$, $h \in \mathbb{R}$ et si e_k est le k-ième vecteur de la base canonique de $\mathbb{R}^n$, la distribution $\tau_{he_k} f$ (la translatée suivant la direction k) est définie par

$$\langle \tau_{he_k} f \ , \ \varphi \rangle = \langle f \ , \ \tau_{-he_k} \varphi \rangle \quad , \quad \forall \varphi \in D(\mathbb{R}^n) \ ; \tag{2.33}$$

où $(\tau_{-he_k} \varphi)(x) = \varphi(x - he_k)$.

Définition 2 − 3

Soit $f \in D^{'}(\mathbb{R}^n)$ et $k \in \{1, \ 2, \ ..., n\}$. on dit que f est indépendante de x_k si

$$\tau_{he_k} f = f \quad , \quad \forall h \in \mathbb{R}. \tag{2.34}$$

Remarque 2 − 4

Notons que si f est donnée par une fonction continue alors la définition ci-dessus signifie que

$$f(x) = \tilde{f}(x_1, .., x_{k-1}, x_{k+1}, .., x_n).$$

Théorème 2 − 4

Soit $f \in D^{'}(\mathbb{R}^n)$. Les propositions suivantes sont équivalentes.

(i) f est indépendante de x_k .

(ii) $\dfrac{\partial f}{\partial x_k} = 0$ dans $D^{'}(\mathbb{R}^n)$.

(iii) $\forall \varphi \in D(\mathbb{R}^n)$ de la forme $\varphi(x) = \varphi_0(x_k) \tilde{\varphi}(x_1, .., x_{k-1}, x_{k+1}, .., x_n)$

où $\varphi_0 \in D(\mathbb{R})$, $\tilde{\varphi} \in D(\mathbb{R}^{n-1})$ et on a

$$\langle f \ , \ \varphi\rangle = \langle f \ , \ \chi\tilde{\varphi}\rangle \int_{-\infty}^{+\infty} \varphi_0(t)dt \ ; \tag{2.35}$$

où $\chi \in D(\mathbb{R})$ telle que $\displaystyle\int_{-\infty}^{+\infty} \chi(t)dt = 1.$

Remarque 2 − 5

Si f est donnée par une fonction continue et si $\dfrac{\partial f}{\partial x_k} = 0$ dans $D'(\mathbb{R}^n)$, le résultat précédent montre que

$$f(x) = \tilde{f}(x_1, .., x_{k-1}, x_{k+1}, .., x_n). \tag{2.36}$$

Corollaire 2 − 1

Soit $f \in D'(\mathbb{R}^n)$ telle que $\dfrac{\partial f}{\partial x_k} = 0$ dans $D'(\mathbb{R}^n)$ pour $k = 1, 2, ...n$. Alors il existe une constante $C \in \mathbb{R}$ telle que

$$\langle f \ , \ \varphi\rangle = C \int_{\mathbb{R}^n} \varphi(x)dx \ , \quad \forall\varphi \in D(\mathbb{R}^n). \tag{2.37}$$

i.e. f est constante.

Corollaire 2 − 2

Soit $f \in D'(\mathbb{R}^n)$. Les propositions suivantes sont équivalentes.

(i) $f \in C^0(\mathbb{R}^n)$, $\dfrac{\partial f}{\partial x_k} \in C^0(\mathbb{R}^n)$ pour $k = 1, 2, ...n$ (au sens de $D'(\mathbb{R}^n)$).

(ii) $f \in C^1(\mathbb{R}^n)$.

Corollaire 2 − 3

Soit $f \in D'(\mathbb{R}^n)$ et $k \in \mathbb{N}$. Les propositions suivantes sont équivalentes.

(i) $f \in C^0(\mathbb{R}^n)$, $D^\alpha f \in C^0(\mathbb{R}^n)$ pour $|\alpha| \leq k$ (au sens de $D'(\mathbb{R}^n)$).

(ii) $f \in C^k(\mathbb{R}^n)$.

Corollaire 2 – 4

L'énoncé du corollaire 2-3 est encore valable lorsqu'on remplace $\mathbb{R}^n$ par un ouvert Ω de $\mathbb{R}^n$.

2.5 Les Solutions élémentaires

Définitions 2 – 4

Soit P un opérateur différentiel à coefficients constants sur $\mathbb{R}^n$. Une solution élémentaire de P est une distributions G sur $\mathbb{R}^n$ telle que

$$P\ [G(x)] = \delta(x). \tag{2.38}$$

Exemple

La fonction localement intégrable

$$G(t,x) = \frac{H(t)}{(4\pi t)^{\frac{n}{2}}} \exp(-\frac{|x|^2}{4t}) \tag{2.39}$$

est une solution élémentaire de l'opérateur de la chaleur $P = \dfrac{\partial}{\partial t} - \Delta_x$ sur $\mathbb{R}_t \times \mathbb{R}^n_x$.

2.6 Exercices

Exercice 01 :

a) Soient $p,\ q \in \mathbb{N}$, calculer : $f = x^p \delta^{(q)}$ où $\delta^{(k)}$ est la dérivée $k^{ème}$ de la distribution de Dirac sur $\mathbb{R}$.

b) Soient $\alpha \in \mathbb{C}$ et $k \in \mathbb{N}$, calculer $f = e^{\alpha x}\ \delta^{(k)}$.

Exercice 02 :

On considère l'application linéaire f de $D(\mathbb{R}^2)$ dans $\mathbb{C}$ définie par

$$\begin{aligned} f \ : \ D(\mathbb{R}^2) &\rightarrow \quad \mathbb{C} \\ \varphi \mapsto \langle f \ , \ \varphi \rangle &= \int_{\mathbb{R}} \varphi(x \ , -x) dx \ . \end{aligned}$$

Montrer que $f \in D\prime(\mathbb{R}^2)$ et calculer au sens des distributions $\left(\frac{\partial}{\partial x} - \frac{\partial}{\partial y} \right) f$.

Exercice 03 :

On considère l'opérateur différentiel sur $\mathbb{R}$

$$P = \frac{d^2}{dx^2} + a \frac{d}{dx} + b \quad ; \quad a, \ b \ \in \mathbb{C}.$$

Soient f et g deux fonctions de classe C^2 sur $\mathbb{R}$ telles que

(i) $Pf(x) = Pg(x) = 0 \, , \quad x \in \mathbb{R} \, ;$

(ii) $f(0) = g(0) \, ;$

(iii) $f\prime(0) - g\prime(0) \ = 1.$

On pose

$$h(x) = \begin{cases} f(x) & , \quad x \leq 0 \\ g(x) & , \quad x > 0 \end{cases} ;$$

et on considère la distribution f_1 définie par

$$\langle f_1 \ , \ \varphi \rangle = - \int_{\mathbb{R}} h(x) \varphi(x) dx \ , \quad \varphi \in D(\mathbb{R}).$$

Calculer Pf_1 au sens des distributions.

Exercice 04 :

I) Soit H la fonction de $Heaviside$

$$H\ (x) = \begin{cases} 1 & \text{si} \quad x > 0 \\ 0 & \text{si} \quad x \leq 0 \end{cases} .$$

Calculer $\frac{d}{dx}H$ au sens des distributions et en déduire une solution élémentaire de $\frac{d}{dx}$.

II) Soit, pour $k \geq 2$

$$E_k = \frac{x^{k-1}}{(k-1)!} H\ (x)\ ,$$

1) Montrer que E_k est une solution de

$$\left(\frac{d}{dx}\right)^{k-1} E = H\ (x)\ .$$

2) Déduire une solution élémentaire de $\left(\frac{d}{dx}\right)^k$.

III) Soit, $k \geq 1$.

1) Donner une solution particulière de

$$\left(\frac{d}{dx}\right)^k U = f \qquad (\bigstar)$$

où $f \in \mathcal{E}'(\mathbb{R})$ i.e f est une distribution à support compact.

2) Déduire ensuite la solution générale de l'équation $(\bigstar)$.

(**Ind :** $x^p \delta^{(q)} = 0$ si $p > q$).

Chapitre 3

LA CONVERGENCE DES DISTRIBUTIONS

3.1 La convergence des distributions

Soit Ω un ouvert de $\mathbb{R}^n$. La notion de convergence des distributions est dite aussi convergence faible au sens suivant :

Définition 3 − 1

Une suite $\{f_k\}_{k\in\mathbb{N}}$ de distributions converge vers zéro dans $\mathcal{D}'(\Omega)$ si et seulement, pour toute fonction-test $\varphi \in \mathcal{D}(\Omega)$, la suite numérique $\{\langle f_k \ , \ \varphi\rangle\}_{k\in\mathbb{N}}$ converge vers zéro au sens ordinaire.

Remarque 3 − 1

On dit que f_k converge vers f dans $\mathcal{D}'(\Omega)$ si la suite $\{f_k - f\}$ converge vers zéro au sens de la définition ci-dessus.

Exemple

Soit $f_k(x) = e^{ikx}, \ k \in \mathbb{N}$. Alors la suite $\{f_k(x)\} \in \mathcal{D}'(\mathbb{R})$ et qui converge simplement vers 1 si et seulement si $x = 2m\pi, \ m \in \mathbb{Z}$; mais elle converge vers zéro dans $\mathcal{D}'(\mathbb{R})$.

En effet pour $\varphi \in \mathcal{D}(\mathbb{R})$, une intégration par parties nous donne

$$\langle f_k \ , \ \varphi \rangle = \int_{-\infty}^{+\infty} e^{ikx}\varphi(x)dx = \frac{-1}{ik}\int_{-\infty}^{+\infty} e^{ikx}\varphi^{'}(x)dx \to 0 \ \text{ lorsque } k \to +\infty. \qquad (3.1)$$

Remarque 3 − 2

Quand une suite $\{f_k\}_{k\in\mathbb{N}}$ de distributions, qui est définie par des fonctions localement intégrables, il faut bien faire la différence entre la convergence au sens classique (convergence simple) et la convergence au sens des distributions.

Le théorème suivant caratérise les suites de fonctions pour lesquelles les limites simples coïncident avec les limites dans $\mathcal{D}^{'}(\Omega)$.

Théorème 3 − 1

Soit $\{f_k\}_{k\in\mathbb{N}}$ une suite de fonctions localement intégrables dans Ω qui converge vers f presque partout dans Ω, et soit $g \in L^1_{loc}(\Omega)$ telle que $|f_k| \leq g$, alors

$$f_k \text{ converge vers } \quad f \quad \text{ dans } \ \mathcal{D}^{'}(\Omega).$$

Preuve

Soit $\varphi \in \mathcal{D}(\Omega)$, alors

$$\langle f_k \ , \ \varphi \rangle = \int_{\Omega} f_k(x)\varphi(x)dx \ .$$

Puisque f_k converge vers f presque partout dans Ω donc $f_k\varphi$ converge vers $f\varphi$ presque partout dans Ω, $\forall \varphi \in \mathcal{D}(\Omega)$. En plus on a $|f_k\varphi| \leq g\,|\varphi|$ alors par application du théorème de la convergence dominée de *Lebesgue* on a

$$\lim_{k\to+\infty} \langle f_k \ , \ \varphi \rangle = \lim_{k\to+\infty} \int_{\Omega} f_k(x)\varphi(x)dx = \int_{\Omega} f(x)\varphi(x)dx \ = \langle f \ , \ \varphi \rangle$$

i.e. f_k converge vers f au sens de $\mathcal{D}^{'}(\Omega)$.

Exemples

1) Dans l'exemple suivant on va montrer que la convergence presque partout des fonctions localement intégrables n'implique pas toujours la convergence dans $\mathcal{D}'(\Omega)$.

Soit $k \in \mathbb{N}^*$

$$f_k(x) = \begin{cases} k^2 & \text{si} \quad |x| < \dfrac{1}{k} \\ \\ 0 & \text{si} \quad |x| \geq \dfrac{1}{k} \end{cases} \quad ; \tag{3.2}$$

il est clair que $f_k(x)$ converge vers zéro presque partout. Mais si on prend $\varphi \in \mathcal{D}(\mathbb{R})$ telle que $\varphi(x) = 1$ pour $x \in]-1\ ,\ 1[$ alors

$$\langle f_k\ ,\ \varphi \rangle = \int_{\frac{-1}{k}}^{\frac{1}{k}} k^2 \varphi(x) dx = k^2 \int_{\frac{-1}{k}}^{\frac{1}{k}} dx = 2k \to \infty \quad \text{lorsque } k \to +\infty\ , \tag{3.3}$$

i.e. que la suite $\{f_k\}_{k \in \mathbb{N}^*}$ ne converge pas dans $\mathcal{D}'(\mathbb{R})$.

2) L'exemple suivant nous montre qu'une suite de fonctions $\{f_k\}_{k \in \mathbb{N}^*}$ converge presque partout dans Ω et qui converge dans $\mathcal{D}'(\Omega)$ mais que les deux limites sont différentes.

Soit $k \in \mathbb{N}^*$

$$f_k(x) = \begin{cases} k & \text{si} \quad |x| < \dfrac{1}{2k} \\ \\ 0 & \text{si} \quad |x| \geq \dfrac{1}{2k} \end{cases} \quad . \tag{3.4}$$

Il est facile de vérifier que $f_k(x)$ converge vers zéro pour tout $x \neq 0$.

Pour $\varphi \in \mathcal{D}(\mathbb{R})$ on a

$$\langle f_k\ ,\ \varphi \rangle = \int_{\frac{-1}{2k}}^{\frac{1}{2k}} k \varphi(x) dx = \varphi(0) + k \int_{\frac{-1}{2k}}^{\frac{1}{2k}} [\varphi(x) - \varphi(0)]\, dx \quad . \tag{3.5}$$

Mais

$$\left| k \int_{\frac{-1}{2k}}^{\frac{1}{2k}} [\varphi(x) - \varphi(0)]\, dx \right| \leq k \int_{\frac{-1}{2k}}^{\frac{1}{2k}} \left| \int_0^x \varphi^{'}(\xi) d\xi \right| \, dx \; \leq 2k \sup_{x\in\mathbb{R}} \left| \varphi^{'}(x) \right| \int_0^{\frac{1}{2k}} x \; dx$$

$$\leq \sup_{x\in\mathbb{R}} \left| \varphi^{'}(x) \right| \frac{1}{4k} \to 0 \;\text{ lorsque } m \to +\infty \quad , \tag{3.6}$$

alors

$$\lim_{m\to\infty} \; \langle f_m \; , \; \varphi \rangle = \varphi(0) = \langle \delta \; , \; \varphi \rangle \quad , \tag{3.7}$$

i.e. que la suite $\{f_k\}_{k\in\mathbb{N}^*}$ converge vers δ dans $\mathcal{D}^{'}(\mathbb{R})$.

D'une façon générale on a le résultat suivant.

<u>**Théorème 3 – 2**</u>

Soit f une fonction positive localement intégrable sur $\mathbb{R}$ telle que

$$\int_{-\infty}^{+\infty} f(x) dx = 1 \; ,$$

et soit $f_\alpha(x) = \dfrac{1}{\alpha} f(\dfrac{x}{\alpha}) \quad , \quad \alpha > 0 \; ,$ alors

$$f_\alpha \to \delta \qquad \text{dans} \qquad \mathcal{D}^{'}(\mathbb{R}) \qquad \text{quand} \qquad \alpha \to 0^+.$$

<u>*Exemples*</u>

1) Puisque $\dfrac{1}{\pi} \displaystyle\int_{-\infty}^{+\infty} \dfrac{dx}{1+x^2} = 1$, on définit alors

$$f_\alpha(x) = \frac{1}{\alpha} \frac{1}{\pi \left(1 + \left(\dfrac{x}{\alpha}\right)^2\right)} = \frac{\alpha}{\pi\,(\alpha^2 + x^2)}, \quad \alpha > 0 \; . \tag{3.8}$$

Donc d'après le théorème précédent on a

$$\frac{\alpha}{\pi\left(\alpha^2+x^2\right)} \to \delta \quad \text{dans} \quad \mathcal{D}^{'}(\mathbb{R}) \quad \text{quand} \quad \alpha \to 0^+.$$

2) Montrons que

$$\lim_{\varepsilon\to 0^+} \frac{1}{x \pm i\varepsilon} = VP(\frac{1}{x}) \mp i\pi\delta \quad \text{dans} \;\; \mathcal{D}^{'}(\mathbb{R}).$$

En effet soit $\varphi \in \mathcal{D}(\mathbb{R})$, $\text{supp}\varphi \subset [-M \;,\; M]$, $M > 0$. Alors en écrivant

$$\varphi(x) = \varphi(0) + x\psi(x) \;,$$

où $\psi(x)$ est continue en zéro, on aura alors :

$$\int_{-M}^{M} \frac{\varphi(x)}{x+i\varepsilon}\,dx = \int_{-M}^{M} \frac{\varphi(0)+x\psi(x)}{x+i\varepsilon}\,dx = \varphi(0)\int_{-M}^{M} \frac{dx}{x+i\varepsilon} + \int_{-M}^{M} \frac{x\psi(x)}{x+i\varepsilon}\,dx. \tag{3.9}$$

Calculons d'abord les deux termes du second membre de l'équation précédente i.e.

$$I_1 = \varphi(0)\int_{-M}^{M} \frac{dx}{x+i\varepsilon} \qquad \text{et} \qquad I_2 = \int_{-M}^{M} \frac{x\psi(x)}{x+i\varepsilon}\,dx \;, \tag{3.10}$$

alors

$$
\begin{aligned}
I_1 &= \varphi(0)\int_{-M}^{M}\frac{dx}{x+i\varepsilon} = \varphi(0)\int_{-M}^{M}\frac{x-i\varepsilon}{x^2+\varepsilon^2}\ dx \\
&= \varphi(0)\int_{-M}^{M}\frac{x}{x^2+\varepsilon^2}\ dx - i\varphi(0)\varepsilon\int_{-M}^{M}\frac{1}{x^2+\varepsilon^2}\ dx \\
&= -2i\varphi(0)\arctan(\frac{M}{\varepsilon}) \to -i\pi\varphi(0) = -i\pi\left\langle \delta\ ,\ \varphi\right\rangle \quad \text{quand } \varepsilon \to 0^+ \ ; \qquad (3.11)
\end{aligned}
$$

en plus

$$
I_2 = \int_{-M}^{M}\frac{x\psi(x)}{x+i\varepsilon}\ dx \ = \ \int_{-M}^{M}\psi(x)\ dx\ - i\varepsilon\int_{-M}^{M}\frac{\psi(x)}{x+i\varepsilon}\ dx\ . \qquad (3.12)
$$

Soit $\sup\limits_{|x|\le M}|\psi(x)| \le A$, alors

$$
\begin{aligned}
\left|-i\varepsilon\int_{-M}^{M}\frac{\psi(x)}{x+i\varepsilon}\ dx\right| &\le |\varepsilon|\int_{-M}^{M}\frac{|\psi(x)|}{\sqrt{x^2+\varepsilon^2}}\ dx \le |\varepsilon|\ A\int_{-M}^{M}\frac{dx}{\sqrt{x^2+\varepsilon^2}} \\
&\le 2\,|\varepsilon|\ A\ \operatorname{arg\,sinh}(\frac{M}{\varepsilon}) \to 0 \qquad \text{quand } \varepsilon \to 0^+\ ,
\end{aligned}
$$

i.e. quand quand $\varepsilon \to 0^+$ on a

$$
I_2 \to \int_{-M}^{M}\psi(x)\ dx = \left\langle VP(\frac{1}{x})\ ,\ \varphi\right\rangle
$$

il en résulte alors

$$
\begin{aligned}
\lim_{\varepsilon\to 0^+}\left\langle \frac{1}{x+i\varepsilon}\ ,\ \varphi(x)\right\rangle &= \lim_{\varepsilon\to 0^+}\int_{-M}^{M}\frac{\varphi(x)}{x+i\varepsilon}\ dx \\
&= \left\langle VP(\frac{1}{x})\ ,\ \varphi\right\rangle - i\pi\left\langle \delta\ ,\ \varphi\right\rangle . \qquad (3.13)
\end{aligned}
$$

De la même manière on démontre que

$$\lim_{\varepsilon \to 0^+} \frac{1}{x - i\varepsilon} = VP(\frac{1}{x}) + i\pi\delta \quad \text{dans} \quad \mathcal{D}'(\mathbb{R}). \tag{3.14}$$

On note souvent

$$\lim_{\varepsilon \to 0^+} \frac{1}{x \pm i\varepsilon} = \frac{1}{x \pm i0} \tag{3.15}$$

d'après ce qui précède on a

$$\frac{1}{x + i0} = VP(\frac{1}{x}) - i\pi\delta \quad \text{et} \quad \frac{1}{x - i0} = VP(\frac{1}{x}) + i\pi\delta \ ; \tag{3.16}$$

d'où

$$VP(\frac{1}{x}) = \frac{1}{2}\left(\frac{1}{x + i0} + \frac{1}{x - i0}\right) = \lim_{\varepsilon \to 0^+} \frac{x}{x^2 + \varepsilon^2} \tag{3.17}$$

et on a aussi

$$\delta = \frac{1}{2i\pi}\left(\frac{1}{x - i0} - \frac{1}{x + i0}\right) = \lim_{\varepsilon \to 0^+} \frac{\varepsilon}{\pi(x^2 + \varepsilon^2)}. \tag{3.18}$$

Propriétés

P1 Si $\{f_k\}$ est une suite de distributions qui converge vers f dans $\mathcal{D}'(\Omega)$, alors pour tout $\alpha \in \mathbb{N}^n$ la suite $\{D^\alpha f_k\}$ converge vers $D^\alpha f$. Plus généralement, si $P = \sum_{|\alpha| \leq \ell} a_\alpha(x) D^\alpha$ est un opérateur différentiel à coefficients $C^\infty(\Omega)$, alors $\{Pf_k\}$ converge vers Pf dans $\mathcal{D}'(\Omega)$.

P2 Si $\{f_k\}$ est une suite de distributions de $\mathcal{D}'(\Omega)$, on dira que la série $\sum_{k\in\mathbb{N}} f_k$ est convergente dans $\mathcal{D}'(\Omega)$ si la suite des sommes partielles $\{S_k\} = \left\{\sum_{\ell=0}^{k} f_\ell\right\}$ est convergente dans $\mathcal{D}'(\Omega)$. Si la série $\sum_{k\in\mathbb{N}} f_k$ est convergente dans $\mathcal{D}'(\Omega)$, alors pour tout $\alpha \in \mathbb{N}^n$, la série $\sum_{k\in\mathbb{N}} D^\alpha f_k$ est convergente dans $\mathcal{D}'(\Omega)$ et on a

$$D^\alpha \sum_{k\in\mathbb{N}} f_k = \sum_{k\in\mathbb{N}} D^\alpha f_k \ .$$

Théorème 3 − 3

Soit $\{f_k\}_{k\in\mathbb{N}}$ est une suite de distributions de $\mathcal{D}^{'}(\Omega)$. Supposons que pour tout $\varphi \in \mathcal{D}(\Omega)$, la suite numérique $\{\langle f_k\ ,\ \varphi\rangle\}_{k\in\mathbb{N}}$ converge dans $\mathbb{C}$. Il existe alors $f \in \mathcal{D}^{'}(\Omega)$ telle que $\{f_k\}_{k\in\mathbb{N}}$ converge vers f dans $\mathcal{D}^{'}(\Omega)$.

Remarque 3 − 3

Il faut remarquer que ce résultat est inhabituel classiquement, car si on a une suite $\{f_k\}_{k\in\mathbb{N}}$ de fonctions continues telles que, pour tout x, la suite $\{f_k(x)\}_{k\in\mathbb{N}}$ converge (i.e. converge simplement) sa limite n'est pas nécessairement continue.

3.2 Exercices

Exercice 01

Montrer qu'au sens des distributions on a :

a) $\lim\limits_{\varepsilon\to 0}\left(\dfrac{1}{\varepsilon\sqrt{\pi}}\exp(-\dfrac{x^2}{\varepsilon^2})\right) = \delta.$

b) $\lim\limits_{\varepsilon\to 0^+}\delta_\varepsilon(x) = \delta$ où $\delta_\varepsilon(x) = \begin{cases} \dfrac{1}{\varepsilon} & \text{si } |x| \leq \dfrac{\varepsilon}{2} \\ 0 & \text{si } |x| > \dfrac{\varepsilon}{2} \end{cases}.$

c) $\lim\limits_{n\to\infty}\left(\dfrac{1}{\pi}\dfrac{\sin nx}{x}\right) = \delta$ et $\lim\limits_{n\to\infty}\left(\dfrac{1}{\pi}\dfrac{1-\cos nx}{nx^2}\right) = \delta.$

Exercice 02

Pour $x \in \mathbb{R}$ et $\varepsilon > 0$ on pose

$$f_\varepsilon(x) = \ln(x + i\varepsilon) = \ln|x + i\varepsilon| + i\arg(x + i\varepsilon).$$

a) Montrer que lorsque $\varepsilon \to 0$, f_ε converge dans $D^{'}(\mathbb{R})$ vers la distribution f_0 donnée par

$$f_0 = \begin{cases} \ln(x) & , \quad x > 0 \\ \ln|x| + i\pi & , \quad x < 0 \end{cases}.$$

b) Calculer $\dfrac{df_0}{dx}$ au sens des distributions.

c) En déduire que dans $D\prime(\mathbb{R})$ on a

$$\frac{1}{x+i0} = \lim_{\varepsilon\to 0^+} \frac{1}{x+i\varepsilon} = VP(\frac{1}{x}) - i\pi\delta.$$

d) Montrer que

$$\frac{1}{x-i0} = \lim_{\varepsilon\to 0^-} \frac{1}{x+i\varepsilon} = VP(\frac{1}{x}) + i\pi\delta$$

et en déduire que

$$\lim_{\varepsilon\to 0^+} \frac{\varepsilon}{\pi(x^2+\varepsilon^2)} = \delta$$

Exercice 03 :

En utilisant le résultat suivant

$$\frac{1}{x-i0} = VP(\frac{1}{x}) + i\pi\delta\ .$$

Montrer que

$$\lim_{t\to+\infty} \frac{\exp(ixt)}{x-i0} = 2i\pi\delta.$$

Indication : utiliser que

$\displaystyle\int_0^{+\infty} \frac{\sin(x)}{x}dx = \frac{\pi}{2}$; $\displaystyle\lim_{t\to+\infty}\int_0^{M} \exp(ixt)\psi(x)dx = 0$, $\forall\psi \in C^0(\mathbb{R})$ (Théorème de $Riemann - Lebesgue$).