Centre Universitaire Abdelhafid Boussouf - Mila
Institut des Sciences et de la Technologie
Département de Mathématiques et Informatique

$1^{ère}$ Année Master
Mathématiques Appliquées
Théorie des Distributions

Série de T.D N° 1

Exercice 01 :

Soient $\varphi \in D(\mathbb{R}^n)$, $h \in \mathbb{R}^n \backslash \{0\}$. pour $t \in \mathbb{R} \backslash \{0\}$ on pose

$$\varphi_t(x) = \frac{\varphi(x+th) - \varphi(x)}{t}.$$

a) Montrer que $\varphi_t \in D(\mathbb{R}^n)$ pour $t \neq 0$.

b) Montrer que lorsque t tend vers 0, φ_t converge dans $D(\mathbb{R}^n)$ vers une fonction de $D(\mathbb{R}^n)$ et calculer cette fonction.

Exercice 02 :

a) Soit $\varphi \in D(\mathbb{R})$ telle que $supp\ \varphi \subset]1\ ,\ 2[$, $0 \leq \varphi(x) \leq 1$ et $\varphi(x) = 1$ pour $a \leq x \leq b$ où $1 < a < b < 2$. Pour $n \in \mathbb{N}^*$ posons

$$\varphi_n(x) = e^{-n}\varphi(nx).$$

Montrer que $\{\varphi_n\}_{n\in\mathbb{N}^*}$ converge vers zéro dans $D(\mathbb{R})$.

b) Montrer qu'il n'existe pas de distribution $f \in D\prime(\mathbb{R})$ telle que

$$\langle f\ ,\ \varphi\rangle = \int_{\mathbb{R}} \exp(\frac{1}{x^2})\ \varphi(x)dx\ .$$

Exercice 03 :

Montrer que les applications suivantes définissent des distributions :

$a)$ $D(\mathbb{R}) \ni \varphi \mapsto \langle Pf\frac{1}{x^2}\ ,\ \varphi\rangle = \lim\limits_{\epsilon\to 0}\left[\int_{|x|\geq\epsilon} \frac{\varphi(x)}{x^2}dx - 2\frac{\varphi(0)}{\epsilon}\right]$;

$b)$ $D(\mathbb{R}) \ni \varphi \mapsto \langle Pf\frac{H}{x^2}\ ,\ \varphi\rangle = \lim\limits_{\epsilon\to 0}\left[\int_{\epsilon}^{+\infty} \frac{\varphi(x)}{x^2}dx - \frac{\varphi(0)}{\epsilon} + \varphi\prime(0)\ln\epsilon\right]$;

(Pf := partie finie ; H := la fonction de Heaviside)

$c)$ Définir $Pf\frac{1}{x^m}$, $Pf\frac{H}{x^m}$ pour m entier $m \geq 3$.

Exercice 04 :

a) Montrer que pour $\lambda \in \mathbb{C}$ avec $\operatorname{Re}\lambda > -1$ les fonctions

$$x_+^\lambda = \begin{cases} x^\lambda & , \quad x > 0 \\ 0 & , \quad x \leq 0 \end{cases} \qquad ; \qquad x_-^\lambda = \begin{cases} |x|^\lambda & , \quad x < 0 \\ 0 & , \quad x \geq 0 \end{cases}$$

définissent des distributions sur $\mathbb{R}$.

b) En remarquant que pour $\operatorname{Re}\lambda > -1$ on a

$$\int_0^{+\infty} x^\lambda \varphi(x)dx = \int_0^1 x^\lambda \left[\varphi(x) - \varphi(0)\right] dx + \int_1^{+\infty} x^\lambda \varphi(x)dx + \frac{\varphi(0)}{\lambda+1} \ ;$$

montrer que l'on peut définir une distribution x_+^λ pour $\operatorname{Re}\lambda > -2$ et $\lambda \neq -1$.

Définir la même chose pour x_-^λ et pour les mêmes valeurs de λ.

c) Généraliser ce procédé au cas où $\operatorname{Re}\lambda > -n-1$, $\lambda \neq -1,\ -2,\ ..., -n$.

d) Soient x_+^λ , x_-^λ les distributions définies pour $\operatorname{Re}\lambda > -n-1$, $\lambda \neq -1,\ -2,\ ..., -n$.

Calculer : $x.x_+^\lambda$, $x.\ x_-^\lambda$.

Exercice 05 :

a) Soient $p,\ q \in \mathbb{N}$, calculer : $f = x^p \delta^{(q)}$ où $\delta^{(k)}$ est la dérivée $k^{ème}$ de la distribution de Dirac sur $\mathbb{R}$.

b) Soient $\alpha \in \mathbb{C}$ et $k \in \mathbb{N}$, calculer $f = e^{\alpha x}\ \delta^{(k)}$.

Exercice 06 :

On considère l'application linéaire $f \in D(\mathbb{R}^2)$ dans $\mathbb{C}$ définie par

$$\begin{array}{ccccc} f & : & D(\mathbb{R}^2) & \rightarrow & \mathbb{C} \\ \varphi & \mapsto & \langle f\ ,\ \varphi\rangle = & \displaystyle\int_{\mathbb{R}} \varphi(x\ ,\ -x)dx & . \end{array}$$

a) Montrer que $f \in D\prime(\mathbb{R}^2)$ et qu'elle est d'ordre zéro.

b) Calculer au sens des distributions

$$\left(\frac{\partial}{\partial x} - \frac{\partial}{\partial y}\right) f \quad .$$

Exercice 07 :

On considère l'opérateur différentiel sur $\mathbb{R}$

$$P = \frac{d^2}{dx^2} + a\frac{d}{dx} + b \quad ; \quad a,\ b\ \in \mathbb{C}.$$

Soient f et g deux fonctions de classe C^2 sur $\mathbb{R}$ telles que

(i) $Pf(x) = Pg(x) = 0 \quad , \quad x \in \mathbb{R} \quad ;$

(ii) $f(0) = g(0) \quad ;$

(iii) $f\prime(0) - g\prime(0) = 1 \quad .$

On pose

$$h(x) = \begin{cases} f(x) & , \quad x \leq 0 \\ g(x) & , \quad x > 0 \end{cases} ;$$

et on considère la distribution f_1 définie par

$$\langle f_1\ ,\ \varphi \rangle = -\int_{\mathbb{R}} h(x)\varphi(x)dx \quad , \quad \varphi \in D(\mathbb{R}).$$

Calculer Pf_1 au sens des distributions.

Centre Universitaire Abdelhafid Boussouf - Mila
Institut des Sciences et de laTechnologie
Département de Mathématiques et Informatique

$1^{ère}$ Année Master
Mathématiques Appliquées
Distributions

Série de T.D N° 2

Exercice 01 :

Pour $\varepsilon > 0$ on pose $f_\varepsilon(x) = \frac{\varepsilon}{2}|x|^{\varepsilon-1}$. Calculer $f = \lim\limits_{\varepsilon \to 0} f_\varepsilon$ dans $D'(\mathbb{R})$.

Exercice 02 :

Déterminer une suite $(f_n)_{n\geq 1}$ de distributions à support à l'origine telle que la suite de distributions $(g_n)_{n\geq 1}$ définie, pour tout $\varphi \in D(\mathbb{R})$, par :

$$\langle g_n \ , \ \varphi \rangle = \langle f_n \ , \ \varphi \rangle - \sum_{k=1}^{n} \varphi(\frac{1}{k})$$

converge dans $D'(\mathbb{R})$.

Exercice 03 :

Pour $x \in \mathbb{R}$ et $\varepsilon > 0$ on pose

$$f_\varepsilon(x) = \ln(x + i\varepsilon) = \ln|x + i\varepsilon| + i\arg(x + i\varepsilon).$$

a) Montrer que lorsque $\varepsilon \to 0$, f_ε converge dans $D'(\mathbb{R})$ vers la distribution f_0 donnée par

$$f_0(x) = \begin{cases} \ln(x) & , \quad x > 0 \\ \ln|x| + i\pi & , \quad x < 0 \end{cases} .$$

b) Calculer $\dfrac{df_0}{dx}$ au sens des distributions.

c) En déduire que dans $D\prime(\mathbb{R})$ on a

$$\frac{1}{x + i0} = \lim_{\varepsilon \to 0^+} \frac{1}{x + i\varepsilon} = VP(\frac{1}{x}) - i\pi\delta.$$

Exercice 04 :

En utilisant le résultat suivant

$$\frac{1}{x - i0} = VP(\frac{1}{x}) + i\pi\delta \ .$$

Montrer que

$$\lim_{t \to +\infty} \frac{\exp(ixt)}{x - i0} = 2i\pi\delta.$$

Indication : utiliser ce qui suit

$$\int_0^{+\infty} \frac{\sin(x)}{x} dx = \frac{\pi}{2} \quad ; \quad \lim_{t \to +\infty} \int_0^{M} \exp(ixt)\psi(x)dx = 0 \ , \ \forall \psi \in C^0(\mathbb{R}) \ (\mathit{Théo\ de\ Riemann - Lebesgue}).$$

Centre Universitaire Abdelhafid Boussouf - Mila
Institut des Sciences et de laTechnologie
Département de Mathématiques et Informatique

$1^{ère}$ Année Master
Mathématiques Appliquées
Distributions

Série de T.D N° 3

Exercice 01 :

Soit $a(x)$ $C^{\infty}(\mathbb{R}^m)$. Montrer que

$$a(x)\left[f(x)\otimes g(y)\right]=\left[a(x)f(x)\otimes g(y)\right]$$

où $f(x)\in D'(\mathbb{R}^m)$, $g(y)\in D'(\mathbb{R}^n)$.

Exercice 02 :

Montrer que pour $f(x)\in D'(\mathbb{R}^m)$, $g(y)\in D'(\mathbb{R}^n)$ on a :

$$(f\otimes g)(x+h\ ,\ y)=\left[f(x+h)\otimes g(y)\right]\quad .$$

Exercice 03 :

Soit $f(x)\in E'(\mathbb{R})$ et $g(y)\in D'(\mathbb{R})$. Montrer que pour tout $k\in\mathbb{N}$ on a :

$$x^k(f*g)=\sum_{j=0}^{k}\begin{pmatrix} k \\ j \end{pmatrix}(x^j f)*(x^{k-j}g)\quad .$$

Exercice 04 :

Soit $f(x)\in E'(\mathbb{R}^n)$ et $g(y)\in D'(\mathbb{R}^n)$. Montrer que pour tout $a\in\mathbb{R}^n$ on a :

$$e^{a.x}(f*g)=(e^{a.x}f)*(e^{a.x}g)\quad .$$

Exercice 05 :

On rappelle qu'une distribution $f\in D'(\mathbb{R}^n)$ est dite homogène de degré $\lambda\in\mathbb{R}$ si

$$\langle f\ ,\ \varphi_t\rangle=t^{-(n+\lambda)}\langle f\ ,\ \varphi\rangle\quad ,\quad \forall\varphi\in D(\mathbb{R}^n)\ \ ,\ \forall t>0\ .$$

où $\varphi_t(x)=\varphi(tx)$.

Montrer que la transformée de *Fourier* d'une distribution tempérée homogène de degré λ est homogène de degré $-n-\lambda$.

Exercice 06 :

Une distribution tempérée $f \in \mathcal{S}'(\mathbb{R})$ est dite paire (resp. impaire) si

$$\langle f \; , \; \check{\varphi} \rangle = \langle f \; , \; \varphi \rangle \quad (\; resp. \; - \langle f \; , \; \varphi \rangle \;) \quad , \quad \forall \varphi \in \mathcal{S}(\mathbb{R}) \text{ où } \; \check{\varphi}(x) = \varphi(-x).$$

Montrer que si $f \in \mathcal{S}'(\mathbb{R})$ est paire (resp. impaire) alors sa transformée de *Fourier* est paire (resp. impaire).

Exercice 07 :

1) Calculer la transformée de *Fourier* de la distribution $f = VP(\frac{1}{x})$ et en déduire la transformée de *Fourier* de la distribution $H(x)$, *i.e* $\mathcal{F} \; H(x)$, et sa transformée de *Fourier* inverse, $\mathcal{F}^{-1}H(x)$, où $H(x)$ est la fonction de *Heaviside* :

$$H(x) = \begin{cases} 1 & si \quad x > 0 \\ \\ 0 & si \quad x < 0 \end{cases} \quad .$$

2) En utilisant l'identité

$$|x| = xH(x) - xH(-x) \; .$$

Calculer la transformée de *Fourier* de $|x|$, *i.e* $\mathcal{F} \;\; |x|$ et en déduire $\mathcal{F} \left(Pf \dfrac{1}{x^2} \right)$.

Exercice 08 :

Soit la fonction signe sur $\mathbb{R}$ définie par :

$$\mathrm{Si}\,gn\;(x) = \begin{cases} 1 & si \quad x > 0 \\ 0 & si \quad x = 0 \\ -1 & si \quad x < 0 \end{cases} \quad .$$

Montrer que :

$$\begin{aligned} (i) \;\; \frac{d}{dx}\mathrm{Si}\,gn\;(x) &= 2\delta \;\; ; \\ (ii) \;\; \mathcal{F}(\mathrm{Si}\,gn\;(x)\;) &= -2i\;VP(\frac{1}{x}). \end{aligned}$$