# Chapitre 3

## LA CONVERGENCE DES DISTRIBUTIONS

## 3.1 La convergence des distributions

Soit $\Omega$ un ouvert de $\mathbb{R}^n$. La notion de convergence des distributions est dite aussi convergence faible au sens suivant :

**Définition $3-1$**

Une suite $\{f_k\}_{k\in\mathbb{N}}$ de distributions converge vers zéro dans $\mathcal{D}'(\Omega)$ si et seulement, pour toute fonction-test $\varphi \in \mathcal{D}(\Omega)$, la suite numérique $\{\langle f_k \ , \ \varphi\rangle\}_{k\in\mathbb{N}}$ converge vers zéro au sens ordinaire.

**Remarque $3-1$**

On dit que $f_k$ converge vers $f$ dans $\mathcal{D}'(\Omega)$ si la suite $\{f_k - f\}$ converge vers zéro au sens de la définition ci-dessus.

*Exemple*

Soit $f_k(x) = e^{ikx}, \ k \in \mathbb{N}$. Alors la suite $\{f_k(x)\} \in \mathcal{D}'(\mathbb{R})$ et qui converge simplement vers 1 si et seulement si $x = 2m\pi, \ m \in \mathbb{Z}$ ; mais elle converge vers zéro dans $\mathcal{D}'(\mathbb{R})$.

En effet pour $\varphi \in \mathcal{D}(\mathbb{R})$, une intégration par parties nous donne

$$\langle f_k \ , \ \varphi \rangle = \int_{-\infty}^{+\infty} e^{ikx}\varphi(x)dx = \frac{-1}{ik}\int_{-\infty}^{+\infty} e^{ikx}\varphi'(x)dx \to 0 \ \text{ lorsque } k \to +\infty. \tag{3.1}$$

**Remarque 3 − 2**

Quand une suite $\{f_k\}_{k\in\mathbb{N}}$ de distributions, qui est définie par des fonctions localement intégrables, il faut bien faire la différence entre la convergence au sens classique (convergence simple) et la convergence au sens des distributions.

Le théorème suivant caratérise les suites de fonctions pour lesquelles les limites simples coïncident avec les limites dans $\mathcal{D}'(\Omega)$.

**Théorème 3 − 1**

Soit $\{f_k\}_{k\in\mathbb{N}}$ une suite de fonctions localement intégrables dans $\Omega$ qui converge vers $f$ presque partout dans $\Omega$, et soit $g \in L^1_{loc}(\Omega)$ telle que $|f_k| \leq g$, alors

$$f_k \ \text{ converge vers } \ f \quad \text{ dans } \ \mathcal{D}'(\Omega).$$

**Preuve**

Soit $\varphi \in \mathcal{D}(\Omega)$, alors

$$\langle f_k \ , \ \varphi \rangle = \int_\Omega f_k(x)\varphi(x)dx \ .$$

Puisque $f_k$ converge vers $f$ presque partout dans $\Omega$ donc $f_k\varphi$ converge vers $f\varphi$ presque partout dans $\Omega$, $\forall \varphi \in \mathcal{D}(\Omega)$. En plus on a $|f_k\varphi| \leq g\,|\varphi|$ alors par application du théorème de la convergence dominée de *Lebesgue* on a

$$\lim_{k\to+\infty} \langle f_k \ , \ \varphi \rangle = \lim_{k\to+\infty} \int_\Omega f_k(x)\varphi(x)dx = \int_\Omega f(x)\varphi(x)dx \ = \langle f \ , \ \varphi \rangle$$

i.e. $f_k$ converge vers $f$ au sens de $\mathcal{D}'(\Omega)$.

*Exemples*

1) Dans l'exemple suivant on va montrer que la convergence presque partout des fonctions localement intégrables n'implique pas toujours la convergence dans $\mathcal{D}'(\Omega)$.

Soit $k \in \mathbb{N}^*$

$$f_k(x) = \begin{cases} k^2 & \text{si} \quad |x| < \dfrac{1}{k} \\ & \\ 0 & \text{si} \quad |x| \geq \dfrac{1}{k} \end{cases} \quad ; \tag{3.2}$$

il est clair que $f_k(x)$ converge vers zéro presque partout. Mais si on prend $\varphi \in \mathcal{D}(\mathbb{R})$ telle que $\varphi(x) = 1$ pour $x \in \left]-1\ ,\ 1\right[$ alors

$$\langle f_k\ ,\ \varphi\rangle = \int_{\frac{-1}{k}}^{\frac{1}{k}} k^2\varphi(x)dx = k^2\int_{\frac{-1}{k}}^{\frac{1}{k}} dx = 2k \to \infty \quad \text{lorsque } k \to +\infty\ , \tag{3.3}$$

i.e. que la suite $\{f_k\}_{k\in\mathbb{N}^*}$ ne converge pas dans $\mathcal{D}'(\mathbb{R})$.

2) L'exemple suivant nous montre qu'une suite de fonctions $\{f_k\}_{k\in\mathbb{N}^*}$ converge presque partout dans $\Omega$ et qui converge dans $\mathcal{D}'(\Omega)$ mais que les deux limites sont différentes.

Soit $k \in \mathbb{N}^*$

$$f_k(x) = \begin{cases} k & \text{si} \quad |x| < \dfrac{1}{2k} \\ & \\ 0 & \text{si} \quad |x| \geq \dfrac{1}{2k} \end{cases} \quad . \tag{3.4}$$

Il est facile de vérifier que $f_k(x)$ converge vers zéro pour tout $x \neq 0$ .

Pour $\varphi \in \mathcal{D}(\mathbb{R})$ on a

$$\langle f_k\ ,\ \varphi\rangle = \int_{\frac{-1}{2k}}^{\frac{1}{2k}} k\varphi(x)dx = \varphi(0) + k\int_{\frac{-1}{2k}}^{\frac{1}{2k}} \left[\varphi(x) - \varphi(0)\right]dx \quad . \tag{3.5}$$

Mais

$$\left| k\int_{\frac{-1}{2k}}^{\frac{1}{2k}} [\varphi(x)-\varphi(0)]\,dx \right| \leq k\int_{\frac{-1}{2k}}^{\frac{1}{2k}} \left|\int_0^x \varphi^{'}(\xi)d\xi\right| \,dx \ \leq 2k \sup_{x\in\mathbb{R}}\left|\varphi^{'}(x)\right| \int_0^{\frac{1}{2k}} x\ dx$$

$$\leq \sup_{x\in\mathbb{R}}\left|\varphi^{'}(x)\right| \frac{1}{4k} \to 0 \ \text{ lorsque } m \to +\infty \ , \tag{3.6}$$

alors

$$\lim_{m\to\infty} \langle f_m \ , \ \varphi\rangle = \varphi(0) = \langle \delta \ , \ \varphi\rangle \ , \tag{3.7}$$

i.e. que la suite $\{f_k\}_{k\in\mathbb{N}^*}$ converge vers $\delta$ dans $\mathcal{D}^{'}(\mathbb{R})$.

D'une façon générale on a le résultat suivant.

**Théorème 3 – 2**

Soit $f$ une fonction positive localement intégrable sur $\mathbb{R}$ telle que

$$\int_{-\infty}^{+\infty} f(x)dx = 1 \ ,$$

et soit $f_\alpha(x) = \dfrac{1}{\alpha} f(\dfrac{x}{\alpha})$ , $\alpha > 0$ , alors

$$f_\alpha \to \delta \quad \text{dans} \quad \mathcal{D}^{'}(\mathbb{R}) \quad \text{quand} \quad \alpha \to 0^+.$$

*Exemples*

1) Puisque $\dfrac{1}{\pi}\displaystyle\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{dx}{1+x^2} = 1$, on définit alors

$$f_\alpha(x) = \frac{1}{\alpha} \frac{1}{\pi\left(1+\left(\dfrac{x}{\alpha}\right)^2\right)} = \frac{\alpha}{\pi\left(\alpha^2+x^2\right)}, \quad \alpha > 0 \ . \tag{3.8}$$

Donc d'après le théorème précédent on a

$$\frac{\alpha}{\pi\left(\alpha^2+x^2\right)} \to \delta \quad \text{dans} \quad \mathcal{D}'(\mathbb{R}) \quad \text{quand} \quad \alpha \to 0^+.$$

2) Montrons que

$$\lim_{\varepsilon\to 0^+} \frac{1}{x \pm i\varepsilon} = VP(\frac{1}{x}) \mp i\pi\delta \quad \text{dans} \ \ \mathcal{D}'(\mathbb{R}).$$

En effet soit $\varphi \in \mathcal{D}(\mathbb{R})$, $\operatorname{supp}\varphi \subset [-M\ ,\ M]$, $M > 0$. Alors en écrivant

$$\varphi(x) = \varphi(0) + x\psi(x)\ ,$$

où $\psi(x)$ est continue en zéro, on aura alors :

$$\int_{-M}^{M} \frac{\varphi(x)}{x+i\varepsilon}\, dx = \int_{-M}^{M} \frac{\varphi(0)+x\psi(x)}{x+i\varepsilon}\, dx = \varphi(0)\int_{-M}^{M} \frac{dx}{x+i\varepsilon} + \int_{-M}^{M} \frac{x\psi(x)}{x+i\varepsilon}\, dx. \tag{3.9}$$

Calculons d'abord les deux termes du second membre de l'équation précédente i.e.

$$I_1 = \varphi(0)\int_{-M}^{M} \frac{dx}{x+i\varepsilon} \qquad \text{et} \qquad I_2 = \int_{-M}^{M} \frac{x\psi(x)}{x+i\varepsilon}\, dx\ , \tag{3.10}$$

alors

$$
\begin{aligned}
I_1 &= \varphi(0)\int\limits_{-M}^{M}\frac{dx}{x+i\varepsilon} = \varphi(0)\int\limits_{-M}^{M}\frac{x-i\varepsilon}{x^2+\varepsilon^2}\ dx \\
&= \varphi(0)\int\limits_{-M}^{M}\frac{x}{x^2+\varepsilon^2}\ dx - i\varphi(0)\varepsilon\int\limits_{-M}^{M}\frac{1}{x^2+\varepsilon^2}\ dx \\
&= -2i\varphi(0)\arctan(\frac{M}{\varepsilon}) \to -i\pi\varphi(0) = -i\pi\left\langle \delta\ ,\ \varphi\right\rangle \quad \text{quand } \varepsilon \to 0^+\ ;
\end{aligned}
\tag{3.11}
$$

en plus

$$
I_2 = \int\limits_{-M}^{M}\frac{x\psi(x)}{x+i\varepsilon}\ dx \ = \ \int\limits_{-M}^{M}\psi(x)\ dx \ - i\varepsilon\int\limits_{-M}^{M}\frac{\psi(x)}{x+i\varepsilon}\ dx\ . \tag{3.12}
$$

Soit $\sup\limits_{|x|\leq M}|\psi(x)| \leq A$, alors

$$
\begin{aligned}
\left|-i\varepsilon\int\limits_{-M}^{M}\frac{\psi(x)}{x+i\varepsilon}\ dx\right| &\leq |\varepsilon|\int\limits_{-M}^{M}\frac{|\psi(x)|}{\sqrt{x^2+\varepsilon^2}}\ dx \leq |\varepsilon|\ \ A\int\limits_{-M}^{M}\frac{dx}{\sqrt{x^2+\varepsilon^2}} \\
&\leq 2\,|\varepsilon|\ \ A\ \ \arg\sinh(\frac{M}{\varepsilon}) \to 0 \qquad \text{quand } \varepsilon \to 0^+\ ,
\end{aligned}
$$

i.e. quand quand $\varepsilon \to 0^+$ on a

$$
I_2 \to \int\limits_{-M}^{M}\psi(x)\ dx = \left\langle VP(\frac{1}{x})\ ,\ \varphi\right\rangle
$$

il en résulte alors

$$
\begin{aligned}
\lim_{\varepsilon\to 0^+}\left\langle\frac{1}{x+i\varepsilon}\ ,\ \varphi(x)\right\rangle &= \lim_{\varepsilon\to 0^+}\int\limits_{-M}^{M}\frac{\varphi(x)}{x+i\varepsilon}\ dx \\
&= \left\langle VP(\frac{1}{x})\ ,\ \varphi\right\rangle - i\pi\left\langle\delta\ ,\ \varphi\right\rangle .
\end{aligned}
\tag{3.13}
$$

De la même manière on démontre que

$$\lim_{\varepsilon\to 0^+} \frac{1}{x-i\varepsilon} = VP(\frac{1}{x}) + i\pi\delta \quad \text{dans} \quad \mathcal{D}'(\mathbb{R}). \tag{3.14}$$

On note souvent

$$\lim_{\varepsilon\to 0^+} \frac{1}{x\pm i\varepsilon} = \frac{1}{x\pm i0} \tag{3.15}$$

d'après ce qui précède on a

$$\frac{1}{x+i0} = VP(\frac{1}{x}) - i\pi\delta \quad \text{et} \quad \frac{1}{x-i0} = VP(\frac{1}{x}) + i\pi\delta \ ; \tag{3.16}$$

d'où

$$VP(\frac{1}{x}) = \frac{1}{2}\left(\frac{1}{x+i0} + \frac{1}{x-i0}\right) = \lim_{\varepsilon\to 0^+} \frac{x}{x^2+\varepsilon^2} \tag{3.17}$$

et on a aussi

$$\delta = \frac{1}{2i\pi}\left(\frac{1}{x-i0} - \frac{1}{x+i0}\right) = \lim_{\varepsilon\to 0^+} \frac{\varepsilon}{\pi(x^2+\varepsilon^2)}. \tag{3.18}$$

**Propriétés**

**P1** Si $\{f_k\}$ est une suite de distributions qui converge vers $f$ dans $\mathcal{D}'(\Omega)$, alors pour tout $\alpha \in \mathbb{N}^n$ la suite $\{D^\alpha f_k\}$ converge vers $D^\alpha f$ . Plus généralement, si $P = \sum_{|\alpha|\leq \ell} a_\alpha(x) D^\alpha$ est un opérateur différentiel à coefficients $C^\infty(\Omega)$, alors $\{Pf_k\}$ converge vers $Pf$ dans $\mathcal{D}'(\Omega)$.

**P2** Si $\{f_k\}$ est une suite de distributions de $\mathcal{D}'(\Omega)$, on dira que la série $\sum_{k\in\mathbb{N}} f_k$ est convergente dans $\mathcal{D}'(\Omega)$ si la suite des sommes partielles $\{S_k\} = \left\{\sum_{\ell=0}^{k} f_\ell\right\}$ est convergente dans $\mathcal{D}'(\Omega)$. Si la série $\sum_{k\in\mathbb{N}} f_k$ est convergente dans $\mathcal{D}'(\Omega)$, alors pour tout $\alpha \in \mathbb{N}^n$, la série $\sum_{k\in\mathbb{N}} D^\alpha f_k$ est convergente dans $\mathcal{D}'(\Omega)$ et on a

$$D^\alpha \sum_{k\in\mathbb{N}} f_k = \sum_{k\in\mathbb{N}} D^\alpha f_k \ .$$

**Théorème 3 − 3**

Soit $\{f_k\}_{k\in\mathbb{N}}$ est une suite de distributions de $\mathcal{D}'(\Omega)$. Supposons que pour tout $\varphi \in \mathcal{D}(\Omega)$, la suite numérique $\{\langle f_k\ ,\ \varphi\rangle\}_{k\in\mathbb{N}}$ converge dans $\mathbb{C}$. Il existe alors $f \in \mathcal{D}'(\Omega)$ telle que $\{f_k\}_{k\in\mathbb{N}}$ converge vers $f$ dans $\mathcal{D}'(\Omega)$.

**Remarque 3 − 3**

Il faut remarquer que ce résultat est inhabituel classiquement, car si on a une suite $\{f_k\}_{k\in\mathbb{N}}$ de fonctions continues telles que, pour tout $x$, la suite $\{f_k(x)\}_{k\in\mathbb{N}}$ converge (i.e. converge simplement) sa limite n'est pas nécessairement continue.

## 3.2 Exercices

**Exercice 01**

Montrer qu'au sens des distributions on a :

a) $\lim\limits_{\varepsilon\to 0}\left(\dfrac{1}{\varepsilon\sqrt{\pi}}\exp(-\dfrac{x^2}{\varepsilon^2})\right) = \delta.$

b) $\lim\limits_{\varepsilon\to 0^+}\delta_\varepsilon(x) = \delta$ où $\delta_\varepsilon(x) = \begin{cases} \dfrac{1}{\varepsilon} & \text{si } |x| \le \dfrac{\varepsilon}{2} \\ 0 & \text{si } |x| > \dfrac{\varepsilon}{2} \end{cases}.$

c) $\lim\limits_{n\to\infty}\left(\dfrac{1}{\pi}\dfrac{\sin nx}{x}\right) = \delta$ et $\lim\limits_{n\to\infty}\left(\dfrac{1}{\pi}\dfrac{1-\cos nx}{nx^2}\right) = \delta.$

**Exercice 02**

Pour $x \in \mathbb{R}$ et $\varepsilon > 0$ on pose

$$f_\varepsilon(x) = \ln(x + i\varepsilon) = \ln|x + i\varepsilon| + i\arg(x + i\varepsilon).$$

a) Montrer que lorsque $\varepsilon \to 0$, $f_\varepsilon$ converge dans $D'(\mathbb{R})$ vers la distribution $f_0$ donnée par

$$f_0 = \begin{cases} \ln(x) & , \quad x > 0 \\ \ln|x| + i\pi & , \quad x < 0 \end{cases}.$$

b) Calculer $\dfrac{df_0}{dx}$ au sens des distributions.

c) En déduire que dans $D\prime(\mathbb{R})$ on a

$$\frac{1}{x+i0} = \lim_{\varepsilon \to 0^+} \frac{1}{x+i\varepsilon} = VP(\frac{1}{x}) - i\pi\delta.$$

d) Montrer que

$$\frac{1}{x-i0} = \lim_{\varepsilon \to 0^-} \frac{1}{x+i\varepsilon} = VP(\frac{1}{x}) + i\pi\delta$$

et en déduire que

$$\lim_{\varepsilon \to 0^+} \frac{\varepsilon}{\pi(x^2+\varepsilon^2)} = \delta$$

**<u>Exercice 03</u>** :

En utilisant le résultat suivant

$$\frac{1}{x-i0} = VP(\frac{1}{x}) + i\pi\delta\ .$$

Montrer que

$$\lim_{t \to +\infty} \frac{\exp(ixt)}{x-i0} = 2i\pi\delta.$$

Indication : utiliser que

$\displaystyle\int_0^{+\infty} \frac{\sin(x)}{x} dx = \frac{\pi}{2}$ ; $\displaystyle\lim_{t\to+\infty} \int_0^M \exp(ixt)\psi(x)dx = 0$ , $\forall \psi \in C^0(\mathbb{R})$ (Théorème de *Riemann − Lebesgue*).