# Chapitre 1

## LES DISTRIBUTIONS

Les distributions sont des objets qui généralisent les fonctions localement intégrables et les mesures de Radon sur $\mathbb{R}^n$. L'un des intérêts principaux de la théorie des distributions est de permettre la construction d'un calcul différentiel qui prolonge le calcul différentiel ordinaire et pour lequel toute distribution est indéfiniment dérivable. Cette théorie est devenue un outil essentiel, notamment dans l'étude des équations aux dérivées partielles. Elle a aussi permis une modernisation mathématique pour de nombreux phénomènes physiques. L'idée de base de la théorie des distributions est de définir les distributions par leur action sur un espace de fonctions appelées " fonctions-test". On peut noter que cette idée apparait déjà dans la définition de mesures et en particulier dans la définition des mesures de Radon.

Avant d'aborder les distributions donnons quelques espaces fonctionnels sur lesquels on définit des structures topologiques qui nous permettrons de mieux comprendre les notions de limite, de continuité...etc, pour les distributions.

## 1.1 Les espaces $C^m(\Omega)$, $0 \leq m \leq +\infty$

Dans tout ce qui suit $\Omega$ désigne toujours un ouvert de $\mathbb{R}^n$. On note par $C(\Omega)$ ou $C^0(\Omega)$ (resp. $C^1(\Omega)$) l'espace des fonctions continues (resp. continûment différentiables) sur $\Omega$ à valeurs numériques (i.e réelles ou complexes).

Pour $m \in \mathbb{N}$, $m \geq 2$, on pose

$$C^m(\Omega) = \left\{ u \in C^{m-1}(\Omega) : \quad \frac{\partial u}{\partial x_i} \in C^{m-1}(\Omega), \quad i = 1, ..., n \right\}$$

c'est l'espace des fonctions $m$ fois continûment différentiables sur $\Omega$.

Enfin on notera

$$C^\infty(\Omega) = \bigcap_{m \in \mathbb{N}} C^m(\Omega) \ ,$$

c'est l'espace des fonctions indéfiniment différentiables sur $\Omega$.

Avant de définir la topologie "*naturelle*" sur les espaces fonctionnels $C^m(\Omega)$, donnons d'abord un lemme qui nous permet d'écrire tout ouvert $\Omega$ de $\mathbb{R}^n$ comme réunion croissante de compacts.

**Lemme $1-1$**

Pour $i \in \mathbb{N}^*$ , soit

$$\mathbf{K}_i = \{x \in \mathbb{R}^n \ : \ \ |x| \leq i\} \cap \left\{ x \in \Omega \ : \ d(x \ , \ C\Omega) \geq \frac{1}{i} \right\}.$$

Alors

1) $\{\mathbf{K}_i\}_{i \in \mathbb{N}^*}$ est une suite croissante de compacts tels que $\mathbf{K}_i \subset \mathring{\mathbf{K}}_{i+1}$ ,

2) $\Omega = \bigcup_{i \in \mathbb{N}^*} \mathbf{K}_i = \bigcup_{i \geq 2} \mathring{\mathbf{K}}_i$ ,

3) Pour tout compact $\mathbf{K}$ de $\Omega$ il existe un $i_0 \in \mathbb{N}^*$ tel que $\mathbf{K} \subset \mathbf{K}_{i_0}$ .

Définissons maintenant pour chaque $i \in \mathbb{N}^*$, les semi-normes suivantes :

$$p_i(u) = \sum_{|\alpha| \leq m} \sup_{x \in \mathbf{K}_i} |D^\alpha u(x)| \ , \quad \text{si} \ \ u \in C^m(\Omega), \ m \in \mathbb{N} \ ,$$

$$p_i(u) = \sum_{|\alpha| \leq i} \sup_{x \in \mathbf{K}_i} |D^\alpha u(x)| \ , \quad \text{si} \ \ u \in C^\infty(\Omega).$$

Les $(p_i)$ sont des semi-normes puisque elles possèdent les propriétés suivantes

$$p_i(0) = 0 \ , \quad p_i(\lambda u) = |\lambda| \, p_i(u) \ \text{ si } \lambda \in \mathbb{C} \ , \quad p_i(u+v) \leq p_i(u) + p_i(v)$$

i.e elles vérifient les axiomes des normes sauf que $p_i(u) = 0 \ \nRightarrow u = 0$ mais seulement $u = 0$ sur $\mathbf{K}_i$.

On va définir une topologie sur ces espaces, en définissant une base de voisinages.

Pour $u \in C^m(\Omega), \ m \in \mathbb{N} \ \cup \{+\infty\}$, $\varepsilon > 0$ et $i \in \mathbb{N}^*$ on pose

$$V_i^\varepsilon(u) = \{v \in C^m(\Omega) \ : \ p_i(v-u) < \varepsilon \ \} \ .$$

Un voisinage de $u$ sera alors un sous-ensemble de $C^m(\Omega)$ qui contient un voisinage $V_i^\varepsilon(u)$ pour un certain couple $(i \ , \varepsilon)$. Donc si on définit un ouvert comme étant un sous-ensemble de $C^m(\Omega)$ qui est voisinage de chacun de ses points, on vérifie bien que l'on obtient une topologie $\tau$ sur $C^m(\Omega)$.

**Proposition $\mathbf{1-1}$** (Caractérisation de la topologie $\tau$ de $C^m(\Omega)$)

Soit $\{u_k\}_{k\in\mathbb{N}}$ une suite de $C^m(\Omega)$ et $u \in C^m(\Omega)$. Les propositions suivantes sont équivalentes :

1) La suite $\{u_k\}_{k\in\mathbb{N}}$ converge vers $u$ pour la topologie $\tau$.

2) Pour tout multi-indice $\alpha \in \mathbb{N}^n$, $|\alpha| \leq m$ , (tout $\alpha$ si $m = +\infty$) et pour tout compact $\mathbf{K}$ de $\Omega$,

la suite $\{D^\alpha u_k\}_{k\in\mathbb{N}}$ converge uniformément vers $D^\alpha u$ sur $\mathbf{K}$.

**Proposition $1-2$**

La topologie $\tau$ ainsi définie sur $C^m(\Omega)$ est métrisable. Plus précisément, si on prend pour $u,\ v\ \in C^m(\Omega)$ :

$$d(u\ ,\ v)=\sum_{i=1}^{+\infty}\frac{1}{2^i}\frac{p_i(u-v)}{1+p_i(u-v)}\ . \tag{1.1}$$

Alors

1) $d$ est une métrique sur $C^m(\Omega)$ qui définit la même topologie que $\tau$.

2) $C^m(\Omega)$ muni de cette métrique est un espace complet.

**Remarque $1-1$**

La topologie $\tau$ de l'espace $C^m(\Omega)$, définie précédemment, n'est pas normable (i.e n'est pas induite par une norme).

## 1.2 Les espaces $C_0^m(\Omega),\ 0\leq m\leq+\infty$

**Définition $1-1$** (*Théorème*)

Soit $u\in C(\Omega)$. Le support de $u$ est le sous-ensemble fermé de $\Omega$ défini par l'une des assertions équivalentes suivantes :

1) $\operatorname{supp} u\ =\overline{\{x\in\Omega\ \ :\ \ u(x)\neq 0\}}$ ;

2) $x_0\notin\operatorname{supp} u\ \Leftrightarrow\ \exists\, V_{x_0}$ (voisinage de $x_0$ ) : $u(x)=0\ ,\ \forall x\in V_{x_0}$ ;

3) $C(\operatorname{supp}\ u)$ est le plus grand ouvert où $u$ est nulle.

On peut facilement vérifier les propriétés suivantes :

$a)$ $\operatorname{supp}\ u\ =\varnothing\ \ \Leftrightarrow\ \ u\equiv 0$ dans $\Omega$ ,

$b)$ $\operatorname{supp}\ (u.v)\ \subset\ \operatorname{supp}\ u\cap\operatorname{supp}\ v$ ,

$c)$ $\operatorname{supp}\ \dfrac{\partial u}{\partial x_i}\ \subset\operatorname{supp}\ u$ , $i=1,...,n$ si $u\in C^1(\Omega)$.

**Définition 1 − 2**

Pour $m \in \mathbb{N} \cup \{+\infty\}$ , $C_0^m(\Omega)$ désigne l'ensemble des $u \in C^m(\Omega)$ tels que supp $u$ est un compact contenu dans $\Omega$.

**Remarque 1 − 2**

a) Si $u \in C_0^m(\Omega)$, son prolongement par zéro à l'extérieur de $\Omega$ appartient à $C_0^m(\mathbb{R}^n)$, i.e la fonction définie sur $\mathbb{R}^n$ par,

$$\tilde{u}(x) = \begin{cases} u(x) & \text{si } x \in \Omega \\ 0 & \text{si } x \notin \Omega \end{cases} \in C_0^m(\mathbb{R}^n) \tag{1.2}$$

b) L'espace $C_0^m(\Omega) \neq \varnothing$ ( n'est pas vide) . En effet, si on prend un $x_0 \in \Omega$ et $a > 0$ tel que $\{x_0\} \neq \{x \in \Omega \ : \ |x - x_0| < a\} \subset \Omega$. La fonction $\varphi$ définie sur $\Omega$ par

$$\varphi(x) = \begin{cases} \exp(\dfrac{1}{|x - x_0|^2 - a^2}) & \text{si} \quad |x - x_0| < a \\ \\ 0 & \text{si} \quad |x - x_0| \geq a \ , \quad x \in \Omega \end{cases} \quad , \tag{1.3}$$

appartient à $C_0^m(\Omega)$ (elle est même dans $C_0^\infty(\Omega)$) et son support est la boule fermée de centre $x_0$ et de rayon $a$.

## 1.3 Les fonctions-test

**Définition 1 − 3**

L'ensemble de toutes les fonctions indéfiniment dérivables définies de $\Omega$ dans $\mathbb{C}$ et à support compact est noté $\mathcal{D}(\Omega)$ ou $C_0^\infty(\Omega)$. Qui est un espace vectoriel et tout élément de cet espace s'appelle une fonction-test.

**Définition 1 − 4**

Si $\mathbf{K}$ est un compact de $\Omega$ on note par $\mathcal{D}_{\mathbf{K}}(\Omega)$ l'espace de toutes les fonctions-test $\varphi \in \mathcal{D}(\Omega)$ telles que supp $\varphi \subset \mathbf{K}$.

*Exemple*

$$\rho(x) = \begin{cases} \exp(\dfrac{1}{|x|^2 - 1}) & \text{si} \quad |x| < 1 \\ \\ 0 & \text{si} \quad |x| \geq 1 \ , \end{cases} \tag{1.4}$$

est une fonction-test sur $\mathbb{R}^n$ i.e. $\rho \in \mathcal{D}(\mathbb{R}^n)$.

En utilisant cette fonction $\rho(x)$ on peut construire une infinité de fonctions-test, pour $\varepsilon > 0$ on définit

$$\psi_\varepsilon(x) = \frac{\rho(\frac{x}{\varepsilon})}{\int\limits_{\mathbb{R}^n} \rho(\frac{x}{\varepsilon})dx} \in \mathcal{D}(\mathbb{R}^n) \text{ , supp } \psi_\varepsilon = \{x \ : \ |x| \leq \varepsilon\} \quad \text{et} \quad \int\limits_{\mathbb{R}^n} \psi_\varepsilon(x)dx = 1. \tag{1.5}$$

Donnons d'abord quelques résultats qu'on utilisera par la suite.

**Lemme 1 − 2** (La régularisation)

Soit $\psi \in \mathcal{D}(\mathbb{R}^n)$ telle que $\psi \geq 0$ , $\int\limits_{\mathbb{R}^n} \psi(x)dx = 1$ et soit $\psi_\varepsilon(x) = \varepsilon^{-n}\psi(\frac{x}{\varepsilon}),\ \varepsilon > 0.$

Si pour $f \in L^p(\mathbb{R}^n),\ 1 \leq p < \infty$ , on se donne

$$f_\varepsilon(x) = f * \psi_\varepsilon(x) = \int\limits_{\mathbb{R}^n} f(y)\psi_\varepsilon(x-y)dy. \tag{1.6}$$

alors

$$f_\varepsilon \in C^\infty(\mathbb{R}^n) \quad , \quad f_\varepsilon \rightarrow f \ \text{ dans } L^p(\mathbb{R}^n),\ \varepsilon \rightarrow 0 \ \text{ et on a } \|f_\varepsilon\|_p \leq \|f\|_p \ .$$

**Théorème 1 − 1** (*La densité*)

$\mathcal{D}(\mathbb{R}^n)$ est dense dans $L^p(\mathbb{R}^n)$ pour $1 \leq p < \infty$.

**Théorème 1 − 2** (*La partition de l'unité*)

Soit $\mathbf{K}$ est un compact de $\Omega$ et soient $\Omega_i$ , $i = 1, 2, ..k$, un recouvrement fini de $\mathbf{K}$ i.e. $\mathbf{K} \subset \bigcup_{i=1}^{k} \Omega_i$, alors il existe des fonctions $\varphi_i \in \mathcal{D}(\Omega_i)$ telles que $0 \leq \varphi_i \leq 1$ , $i = 1, 2, ..k$ et $\sum_{i=1}^{k} \varphi_i = 1$ au voisinage de $\mathbf{K}$.

## 1.4 La convergence dans $\mathcal{D}(\Omega)$

**Définition 1 − 5**

Soit $\Omega$ un ouvert de $\mathbb{R}^n$. Une suite de fonctions-test $\{\varphi_k\}_{k \in \mathbb{N}}$ converge vers zéro dans $\mathcal{D}(\Omega)$ si

$(i)$ Il existe un compact $\mathbf{K}$ de $\Omega$ tel que supp $\varphi_k \subset \mathbf{K}$ , $\forall k \in \mathbb{N}$.

$(ii)$ Pour tout multi-indice $\alpha$ la suite $\{D^\alpha \varphi_k\}_{k \in \mathbb{N}}$ converge uniformément vers zéro dans $\Omega$.

*Exemple*

La suite $\phi_p(x) = \frac{1}{p}\rho(x)$, $\rho(x)$ est la fonction donnée dans l'exemple précédent appartient à $\mathcal{D}(\mathbb{R}^n)$ et converge vers zéro dans $\mathcal{D}(\mathbb{R}^n)$.

Alors que la suite $\phi_p(x) = \rho(\frac{x}{p}) \in \mathcal{D}(\mathbb{R}^n)$ ne converge pas dans $\mathcal{D}(\mathbb{R}^n)$ lorsque $p \to \infty$ parce qu'il ne peut exister un compact $\mathbf{K}$ en dehors duquel toutes les $\phi_p(x)$ s'annulent.

## 1.5 Les distributions

**Définition 1 – 6**

Une application $f$ de $\mathcal{D}(\Omega)$ dans $\mathbb{C}$ est appelée une fonctionnelle et on note sa valeur par

$$\langle f \ , \ \varphi \rangle \quad , \ \forall \varphi \in \mathcal{D}(\Omega).$$

**Définition 1 – 7**

Une fonctionnelle linéaire $f$ définie sur $\mathcal{D}(\Omega)$ est dite continue si pour toute suite de fonctions-test $\{\varphi_k\}_{k\in\mathbb{N}}$ qui converge vers zéro dans $\mathcal{D}(\Omega)$ la suite numérique $\{\langle f \ , \ \varphi_k \rangle\}_{k\in\mathbb{N}}$ converge vers zéro.

**Définition 1 – 8**

On appelle distribution définie dans $\Omega$ toute fonctionnelle linéaire continue sur $\mathcal{D}(\Omega)$.

L'espace de toutes les distributions définies sur $\Omega$ est noté $\mathcal{D}'(\Omega)$ ou simplement $\mathcal{D}'$, c'est l'espace dual de $\mathcal{D}(\Omega)$.

Donnons maintenant quelques exemples de distributions :

### 1.5.1 Les Fonctions localement intégrables

Soit $f$ une fonction localement intégrable sur $\mathbb{R}$, i.e. absolument intégrable sur tout intervalle fermé borné de $\mathbb{R}$, alors $f$ définit une distribution par :

$$\langle f \ , \ \varphi \rangle = \int_{-\infty}^{+\infty} f(x)\varphi(x)dx \ , \ \forall \varphi \in \mathcal{D}(\mathbb{R}). \tag{1.7}$$

La distribution définie par $f$ est notée aussi $f$. Il est assez clair que $f$ est linéaire sur $\mathcal{D}(\mathbb{R})$. Montrons la continuité de $f$, soit $\{\varphi_k\}_{k\in\mathbb{N}}$ une suite de $\mathcal{D}(\mathbb{R})$ qui converge vers zéro dans $\mathcal{D}(\mathbb{R})$ tel que supp $\varphi_k \subset [a \ , \ b]$ alors :

$$|\langle f \ , \ \varphi_k \rangle| \leq \int_a^b |f(x)\varphi_k(x)| \, dx \leq \sup_{[a \ , \ b]} |\varphi_k(x)| \int_a^b |f(x)| \, dx \to 0 \ , \ \text{quand } k \to \infty \tag{1.8}$$

car $\{\varphi_k\}_{k\in\mathbb{N}}$ converge vers zéro dans $\mathcal{D}(\mathbb{R})$.

Les distributions qui sont définies par des fonctions localement intégrables sont appelées distributions régulières.

**Proposition 1 − 3**

Deux fonctions localement intégrables sur $\Omega$ définissent la même distribution si et seulement si elles sont égales presque partout.

*Exemple*

Pour tout nombre complexe $\lambda$, $\operatorname{Re}\lambda > -1$ , les fonctions

$$x_+^\lambda = \begin{cases} x^\lambda & \text{si } x > 0 \\ 0 & \text{si } x \leq 0 \end{cases} \quad ; \quad x_-^\lambda = \begin{cases} |x|^\lambda & \text{si } x < 0 \\ 0 & \text{si } x \geq 0 \end{cases} . \tag{1.9}$$

définissent des distributions régulières dans $\mathbb{R}$ car elles sont localement intégrables.

### 1.5.2 La distribution delta de Dirac

Elle est définie par

$$\langle \delta \ , \ \varphi \rangle = \varphi(0) \quad , \ \forall \varphi \in \mathcal{D}(\mathbb{R}) \ ; \tag{1.10}$$

de cette définition on peut voir facilement que $\delta$ est linéaire sur $\mathcal{D}(\mathbb{R})$, i.e.

$$\langle \delta \ , \ \alpha\varphi_1 + \beta\varphi_2 \rangle = \alpha \langle \delta \ , \ \varphi_1 \rangle + \ \beta \langle \delta \ , \ \varphi_2 \rangle \ \ , \ \forall \varphi_1, \ \varphi_2 \in \mathcal{D}(\mathbb{R}) \text{ et } \forall \ \alpha, \ \beta \in \mathbb{C}.$$

Montrons la continuité de $\delta$ et soit $\{\varphi_k\}_{k\in\mathbb{N}}$ une suite de $\mathcal{D}(\mathbb{R})$ qui converge vers zéro dans $\mathcal{D}(\mathbb{R})$. Alors

$$\langle \delta \ , \ \varphi_k \rangle = \varphi_k(0) \ \rightarrow 0 \quad \text{quand } k \rightarrow +\infty$$

donc $\delta$ est une fonctionnelle linéaire continue sur $\mathcal{D}(\mathbb{R})$ i.e c'est une distribution sur $\mathbb{R}$.

Remarquons que $\delta$ n'est pas une distribution régulière, en effet supposons le contraire i.e qu'elle est définie par une fonction localement intégrable alors on aura

$$\varphi(0) = \langle \delta \ , \ \varphi \rangle = \int_{-\infty}^{+\infty} \delta(x)\varphi(x)dx \quad , \ \forall \varphi \in \mathcal{D}(\mathbb{R}).$$

Soit $\varphi(x) = \rho(\frac{x}{a}), \ a > 0$ , où $\rho$ est la fonction donnée plus haut.

Alors

$$e^{-1} = \int_{-a}^{+a} \delta(x) \exp(\frac{-a^2}{a^2 - x^2})dx \tag{1.11}$$

$$\text{i.e.} \qquad e^{-1} \leq e^{-1} \int_{-a}^{+a} |\delta(x)| \, dx \to 0 \quad , \quad \text{quand } a \to 0^+ \quad ; \tag{1.12}$$

ce qui est impossible d'où la contradiction i.e. $\delta$ ne peut être une distribution régulière.

De la définition de la distribution delta de Dirac il est possible de vérifier les propriétés suivantes :

$(i)$ $\delta(x) = \delta(-x)$ ;

$(ii)$ $\delta(ax) = \frac{1}{|a|}\delta(x)$ , $a \neq 0$ ;

$(iii)$ $\delta(x^2 - a^2) = \frac{1}{2\,|a|}\left(\delta(x-a) + \delta(x+a)\right)$ ;

$(iv)$ $\delta(f(x)) = \sum_k \frac{1}{|f'(x_k)|}\delta(x - x_k)$ , $f(x_k) = 0$.

**Remarque 1 − 3**

Toute distribution qui n'est pas régulière est appelée distribution singulière.

### 1.5.3 La distribution " Valeur principale "

Considérons la fonction $x \mapsto \frac{1}{x}$ de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$. Cette fonction n'est pas localement intégrable sur $\mathbb{R}$, mais elle l'est sur $\mathbb{R}^*$. Nous allons voir comment prolonger à $\mathbb{R}$ la distribution que cette fonction définit sur $\mathbb{R}^*$.

**<u>Proposition 1 − 4</u>**

Pour toute fonction-test $\varphi \in \mathcal{D}(\mathbb{R})$, la limite

$$VP\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{\varphi(x)}{x}dx = \lim_{\varepsilon\to 0^+} \int_{|x|>\varepsilon} \frac{\varphi(x)}{x}dx \tag{1.13}$$

existe. La fonctionnelle linéaire ainsi définie est une distribution sur $\mathbb{R}$, appelée " valeur principale" de $\dfrac{1}{x}$ et notée $VP(\dfrac{1}{x})$.

En effet, soit $\varphi \in \mathcal{D}(\mathbb{R})$ et soit $a > 0$ tel que supp$\varphi \subset [-a\ ,\ a]$.En utlisant le développement de $Taylor$ on peut écrire :

$$\varphi(x) = \varphi(0) + x\psi(x) \tag{1.14}$$

où $\psi(x)$ est une fonction continue sur $\mathbb{R}$.

Alors si $\varepsilon < a$

$$\int_{\varepsilon}^{a} \frac{\varphi(x)}{x}dx = \varphi(0)\int_{\varepsilon}^{a} \frac{dx}{x} + \int_{\varepsilon}^{a}\psi(x)dx \quad \text{et} \quad \int_{-a}^{-\varepsilon} \frac{\varphi(x)}{x}dx = -\varphi(0)\int_{\varepsilon}^{a} \frac{dx}{x} + \int_{-a}^{-\varepsilon}\psi(x)dx$$

d’où

$$\int_{|x|>\varepsilon} \frac{\varphi(x)}{x}dx = \int_{-a}^{-\varepsilon}\psi(x)dx + \int_{\varepsilon}^{a}\psi(x)dx \tag{1.15}$$

et puisque $\psi(x)$ est continue en $x = 0$ alors

$$VP\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{\varphi(x)}{x}dx = \lim_{\varepsilon\to 0^+} \int_{|x|>\varepsilon} \frac{\varphi(x)}{x}dx = \int_{-a}^{a}\psi(x)dx \tag{1.16}$$

$$\text{i.e.} \qquad \left\langle VP(\frac{1}{x})\ ,\ \varphi \right\rangle = \int_{-a}^{a}\psi(x)dx\ , \tag{1.17}$$

il est assez clair que $VP(\dfrac{1}{x})$ est linéaire sur $\mathcal{D}(\mathbb{R})$.

Montrons que $VP(\frac{1}{x})$ est continue sur $\mathcal{D}(\mathbb{R})$. Soit $\{\varphi_k\}_{k\in\mathbb{N}}$ une suite de $\mathcal{D}(\mathbb{R})$ qui converge vers zéro dans $\mathcal{D}(\mathbb{R})$ et $a > 0$ tel que supp $\varphi_k \subset [-a\ ,\ a]\quad \forall k \in \mathbb{N}$, alors on peut écrire :

$$\left|\left\langle VP(\frac{1}{x})\ ,\ \varphi_k \right\rangle\right| = \left|\int_{-a}^{a} \psi_k(x)dx\right| = \left|\int_{-a}^{a} \frac{\varphi_k(x) - \varphi_k(0)}{x}dx\right| \leq \int_{-a}^{a} \frac{1}{|x|}\left|\int_{0}^{x} \varphi_k^{'}(t)dt\right| dx$$

$$\leq \int_{-a}^{a} \frac{1}{|x|}\left|\int_{0}^{x} \left|\varphi_k^{'}(t)\right| dt\right| dx \leq 2a \sup_{[-a\ ,\ a]} \left|\varphi_k^{'}(x)\right| \to 0\ ,\ \text{quand } k \to \infty \tag{1.18}$$

d'où $VP(\frac{1}{x})\ \in \mathcal{D}^{'}(\mathbb{R})$.

Le théorème suivant donne une caractérisation très utile de $\mathcal{D}^{'}(\Omega)$.

**Théorème $1-3$**

Une fonctionnelle linéaire $f$ est une distribution sur $\Omega$ si et seulement si, pour tout compact $\mathbf{K}$ de $\Omega$ il existe $C_{\mathbf{K}} > 0$ et $k \in \mathbb{N}$ tels que

$$|\langle f\ \ ,\ \varphi\rangle| \leq C_{\mathbf{K}} \sum_{|\alpha|\leq k} \sup_{x\in\mathbf{K}} |D^{\alpha}\varphi(x)| \quad ,\quad \forall \varphi \in \mathcal{D}_{\mathbf{K}}(\Omega). \tag{1.19}$$

## 1.6 L'ordre d'une distribution

L'entier $k \in \mathbb{N}$ intervenant dans la relation (1.19) du théorème précédent peut dépendre du compact $\mathbf{K}$. Si par contre un même $k$ est valable pour tous les compacts on dit que la distribution $f$ est d'ordre inférieur ou égal à $k$.

**Définition $1-9$**

Le plus petit $k$ pour lequel la relation (1.19) est vérifiée pour tous les compacts $\mathbf{K}$ est appelé l'ordre de la distribution $f \in \mathcal{D}'(\Omega)$. L'ensemble de ces distributions est noté $\mathcal{D}'^{\ (k)}(\Omega)$.

On note aussi $\mathcal{D}'^{\,F}(\Omega) = \bigcup_{k\in\mathbb{N}} \mathcal{D}'^{\,(k)}(\Omega)$ , l'espace des distributions d'ordre fini.

**Remarque 1 − 4**

On peut dire alors qu'une distribution $f$ est d'ordre $k$ si $f$ appartient $\mathcal{D}'^{\,(k)}(\Omega)$ mais pas à $\mathcal{D}'^{\,(k-1)}(\Omega)$.

*Exemples*

$a)$ Toute distribution régulière est d'ordre zéro.

$b)$ La distribution delta de Dirac est d'ordre zéro.

$c)$ La distribution $VP(\frac{1}{x})$ est d'ordre 1.

## 1.7 Le support d'une distribution

Nous allons introduire maintenant la notion de support pour une distribution qui généralise celle donnée plus haut pour les fonctions continues.

**Définition 1 − 10**

Soit $f \in \mathcal{D}'(\Omega)$ et $\omega$ un ouvert contenu dans $\Omega$. On dit que $f$ est nulle dans $\omega$ si

$$\langle f\ ,\ \varphi\rangle = 0 \quad , \quad \forall\varphi \in \mathcal{D}(\omega).$$

**Lemme 1 − 3**

Soit $(\omega_i)_{i\in I}$ une famille d'ouverts de $\Omega$ et $\omega = \bigcup_{i\in I}\omega_i$. Si $f \in \mathcal{D}'(\Omega)$ est nulle dans chaque $\omega_i$ alors $f$ est nulle dans $\omega$.

*Preuve*

Soit $\varphi \in \mathcal{D}(\omega)$, posons $\mathbf{K}$ le compact de $\Omega$ tel que supp $\varphi = \mathbf{K}$.On a évidemment $\mathbf{K} \subset \bigcup_{i\in I}\omega_i$ alors il existe un ensemble fini d'indices $J \subset I$ tel que $\mathbf{K} \subset \bigcup_{i\in J}\omega_i$. Soit $(\chi_i)_{i\in J}$ une partition de l'unité relative au recouvrement $(\omega_i)_{i\in J}$ de $\mathbf{K}$ i.e

$$\chi_i \in \mathcal{D}(\omega_i),\ \forall i \in J \qquad \text{et} \qquad \sum_{i\in J}\chi_i\,(x) = 1 \ \text{ pour } x \in \bigcup_{i\in J}\omega_i.$$

Comme supp $\varphi = \mathbf{K}$ on a alors

$$\varphi(x) = \sum_{i \in J} \chi_i\,(x)\varphi(x)$$

et donc

$$\langle f\ ,\ \varphi\rangle = \sum_{i \in J} \langle f\ ,\ \chi_i\,\varphi\rangle$$

or $\chi_i\,\varphi \in \mathcal{D}(\omega_i)$, $f$ est nulle dans $\omega_i$ donc $\langle f\ ,\ \chi_i\,\varphi\rangle = 0$ et par suite $\langle f\ ,\ \varphi\rangle = 0$ i.e $f = 0$ dans $\omega$.

**Remarque $1-5$**

Ce lemme montre que pour toute distribution $f \in \mathcal{D}'(\Omega)$ il existe un plus grand ouvert où $f$ est nulle : c'est la réunion de tous les ouverts où $f = 0$. On introduit alors la définition suivante.

**Définition $1-11$**

Pour $f \in \mathcal{D}'(\Omega)$, le support de $f$ , que l'on note supp $f$ , est le complémentaire du plus grand ouvert où $f$ est nulle.

Donnons quelques propriétés du support d'une distribution qui sont facile à obtenir directement de la définition du support.

**Propriété 1** $x_0 \notin$supp $f \Leftrightarrow \exists V_{x_0}$ voisinage de $x_0$ tel que $\langle f\ ,\ \varphi\rangle = 0$ , $\forall \varphi \in \mathcal{D}(V_{x_0})$.

**Propriété 2** $x_0 \in$supp $f \Leftrightarrow \forall V_{x_0}$ voisinage de $x_0$ $\exists \varphi \in \mathcal{D}(V_{x_0})$ tel que $\langle f\ ,\ \varphi\rangle \neq 0$.

**Propriété 3** supp $f \subset F \Leftrightarrow f = 0$ dans $CF$ .

*Exemples*

1) Si $f$ est une fonction continue alors le support de $f$ autant que fonction et le support de $f$ autant que distribution coïncident i.e. si on note la distribution associée à $f$ par $T_f$ alors supp $f$ =supp $T_f$ . En effet si $x_0 \notin$supp $f$ il existe $V_{x_0}$ tel que $f\ (x) = 0$ , $\forall x \in V_{x_0}$. Alors si $\varphi \in \mathcal{D}(V_{x_0})$ $f\ (x)\varphi(x) = 0$ dans $\Omega$ et donc $\langle T_f\ ,\ \varphi\rangle = 0$ i.e. $x_0 \notin$supp $T_f$ .

Inversement si $x_0 \notin$supp $T_f$ il existe $V_{x_0}$ tel que

$$\langle T_f \ , \ \varphi\rangle = \int f\ (x)\varphi(x)dx \ = 0\ ,\ \forall\varphi \in \mathcal{D}(V_{x_0}),$$

ce qui implique que $f\ (x) = 0$ dans $V_{x_0}$ et donc $x_0 \notin$supp $f$.

2) Si $\langle f\ ,\ \varphi\rangle = D^\alpha\varphi(x_0)$ alors supp $f = \{x_0\}$. En effet si $\varphi \in \mathcal{D}(\Omega - \{x_0\})$ on a $\langle f\ ,\ \varphi\rangle = 0$ et donc supp $f \subset \{x_0\}$.

Inversement $x_0 \in$ supp $f$. En effet soit $V_{x_0}$ un voisinage ouvert de $x_0$ et $\chi \in \mathcal{D}(V_{x_0})$, $\chi = 1$ au voisinage de $x_0$. Prenons $\varphi(x) = \dfrac{(x-x_0)^\alpha}{\alpha!}\chi(x)$, alors par application de la formule de *Leibniz*, il est facile de voir que $D^\alpha\varphi(x_0) = 1$.

**<u>Théorème 1 − 4</u>**

Soit $f \in \mathcal{D}'(\Omega)$ et $\varphi \in \mathcal{D}(\Omega)$ tels que

$$\text{supp } f \cap \text{supp } \varphi = \varnothing \ \ , \text{ alors } \ \ \langle f\ ,\ \varphi\rangle = 0\ .$$

*<u>Preuve</u>*

Si supp $f\cap$ supp $\varphi = \varnothing$ alors supp $\varphi$ est contenu dans le complémentaire du support de $f$, donc pour tout $x \in$ supp $\varphi$ il existe un voisinage $V_x$ tel que

$$\langle f\ ,\ \psi\rangle = 0 \text{ pour tout } \psi \in \mathcal{D}(V_x).$$

Alors supp $\varphi \subset \bigcup\limits_{x\in \text{supp } \varphi} V_x$ ; comme supp $\varphi$ est un compact donc il existe un nombre fini de points $x_1, x_2, ..., x_n$ du support de $\varphi$ tel que supp $\varphi \subset \bigcup\limits_{i=1}^{n} V_{x_i}$. Soit $(\chi_i)_{i=1}^n$ une partition de l'unité relative au recouvrement $(V_{x_i})_{i=1}^n$ i.e

$$\chi_i \in \mathcal{D}(V_{x_i}),\ \ \forall i = 1, 2, .., n \qquad \text{et} \qquad \sum_{i=1}^{n}\chi_i\ (x) = 1 \ \text{ pour } x \in \bigcup_{i=1}^{n} V_{x_i}.$$

Comme supp $\varphi \subset \bigcup_{i=1}^{n} V_{x_i}$ on a alors

$$\varphi(x) = \sum_{i=1}^{n} \chi_i\,(x)\varphi(x)\ , \quad \text{pour } x \in \text{supp } \varphi$$

et donc

$$\langle f\ ,\ \varphi\rangle = \sum_{i=1}^{n} \langle f\ ,\ \chi_i\,\varphi\rangle = 0 \quad , \quad \text{car } \ \chi_i\,\varphi \in \mathcal{D}(V_{x_i})\ .$$

## 1.8 Les opérations sur les distributions

Plusieurs opérations définies pour les fonctions peuvent être prolongées de la même manière pour les distributions i.e. dans $\mathcal{D}'$.

### 1.8.1 Addition

La somme de deux distributions de $f$ et $g$ $\mathcal{D}'(\Omega)$ est définie par

$$\langle f\ + g\ ,\ \varphi\rangle = \langle f\ ,\ \varphi\rangle + \langle g\ ,\ \varphi\rangle \quad , \ \forall\varphi \in \mathcal{D}(\Omega).$$

$f + g$ est bien une distribution car elle définit une fonctionnelle linéaire et continue sur $\mathcal{D}(\Omega)$.

### 1.8.2 La multiplication par une constante

La multiplication d'une distribution par une constante $\lambda \in \mathbb{C}$ est définie par

$$\langle \lambda f\ ,\ \varphi\rangle = \langle f\ ,\ \lambda\varphi\rangle \quad , \quad \forall\varphi \in \mathcal{D}(\Omega).$$

Il est évident que c'est une distribution de $\mathcal{D}'(\Omega)$.

**Remarque $1-6$**

Il est clair que, d'après ce qui précède, on vient de munir l'espace $\mathcal{D}^{'}(\Omega)$ d'une structure d'espace vectoriel sur $\mathbb{C}$.

### 1.8.3 La translatée d'une distribution

Notons d'abord que pour une fonction $f$ localement intégrable dans $\mathbb{R}^n$ et $a \in \mathbb{R}^n$, par le changement de variable on a

$$\int_{\mathbb{R}^n} f(x-a)\varphi(x)dx = \int_{\mathbb{R}^n} f(x)\varphi(x+a)dx \quad , \quad \forall\varphi \in \mathcal{D}(\mathbb{R}^n) \tag{1.20}$$

ce qui peut être étendu facilement et de la même manière pour une distribution $f \in \mathcal{D}'(\mathbb{R}^n)$ et $a \in \mathbb{R}^n$, i.e. on définit la translatée de la distribution $f \in \mathcal{D}'(\mathbb{R}^n)$ par

$$\langle f(x-a) \ , \ \varphi(x)\rangle = \langle f(x) \ , \ \varphi(x+a)\rangle \quad , \quad \forall\varphi \in \mathcal{D}(\mathbb{R}^n). \tag{1.21}$$

$f(x-a)$ est bien une distribution dans $\mathcal{D}'(\mathbb{R}^n)$.

De là on a $\langle \delta(x-a) \ , \ \varphi(x)\rangle = \langle \delta(x) \ , \ \varphi(x+a)\rangle = \varphi(a) \ , \ \forall\varphi \in \mathcal{D}(\mathbb{R}^n)$.

### 1.8.4 La multiplication par une fonction $\mathbf{C}^{\infty}$

La multiplication ou la division de deux distributions est une opération qui n'est pas toujours valable et qui peut engendrer des problèmes, elle n'est pas en général définie, comme on peut le voir sur cet exemple pour $f(x) = g(x) = \dfrac{1}{\sqrt{|x|}} \in \mathcal{D}'(\mathbb{R})$ car elles sont localement intégrables mais $f(x)g(x) = \dfrac{1}{|x|} \notin \mathcal{D}'(\mathbb{R})$. Par contre si $f(x) \in \mathcal{D}'(\Omega)$ et $\psi(x) \in C^{\infty}(\Omega)$ le produit $\psi(x)f(x)$ peut avoir un sens et définit une distribution sur $\Omega$, comme on peut le voir d'après ce qui suit.

**Définition 1 − 12** (*Théorème*)

Soit $f(x) \in \mathcal{D}'(\Omega)$ et $\psi(x) \in C^\infty(\Omega)$. La fonctionnelle linéaire $\psi f$ sur $\mathcal{D}(\Omega)$ définie par

$$\langle \psi f \ , \ \varphi \rangle = \langle f \ , \ \psi\varphi \rangle \quad , \quad \forall \varphi \in \mathcal{D}(\Omega) \ ; \tag{1.22}$$

est une distribution sur $\Omega$.

Il est assez facile de vérifier les propriétés suivantes :

**Propriété 4** Pour $f_1, \ f_2 \in \mathcal{D}'(\Omega)$ et $\psi_1, \ \psi_2 \in C^\infty(\Omega)$ on a

$$(\psi_1 + \psi_2) \ f_1 = \psi_1 \ f_1 + \psi_2 \ f_1 \quad , \quad \psi_1\psi_2 \ f_1 = \psi_1 \ (\psi_2 \ f_1) \ , \ \psi_1 \ (f_1 + f_2) = \psi_1 \ f_1 + \psi_1 \ f_2 \ .$$

**Propriété 5** Pour $f \in \mathcal{D}'(\Omega)$ et $\psi \in C^\infty(\Omega)$ on a

$$\text{supp} \ ( \psi f) \subset \text{supp} \ ( \psi) \cap \text{supp} \ ( f) \, .$$

*Exemples*

1) Si $\psi \in C^\infty(\Omega)$ et $x_0 \in \Omega$ on a : $\psi\delta(x - x_0) = \psi(x_0)\delta(x - x_0)$ ; en particulier sur $\mathbb{R}$ on a $x^m\delta = 0$ , $\forall m \geq 1$.

2) Le produit $\cos x \ \delta$ est une distribution définie sur $\mathcal{D}(\mathbb{R})$ par

$$\langle \cos x \ . \ \delta \ , \ \varphi \rangle = \langle \delta \ , \ \cos x \ \varphi \rangle = \varphi(0) \ , \quad \forall \varphi \in \mathcal{D}(\mathbb{R}).$$

De même

$$\langle \sin x \ . \ \delta \ , \ \varphi \rangle = \langle \delta \ , \ \sin x \ \varphi \rangle = 0 \ , \quad \forall \varphi \in \mathcal{D}(\mathbb{R}).$$

**Proposition $1-5$**

Si $f \in \mathcal{D}'(\mathbb{R})$. On a équivalence entre les deux propositions suivantes :

$a)$ $xf = 0$ au sens de $\mathcal{D}'(\mathbb{R})$.

$b)$ $f = c\delta$ , où $c \in \mathbb{C}$ et $\delta$ est la distribution delta de Dirac à l'origine.

*Preuve*

$b) \Rightarrow a)$ c'est évident.

Montrons la réciproque. Pour toute fonction $\varphi \in \mathcal{D}(\mathbb{R})$ on a

$$\langle xf \ , \ \varphi \rangle = \langle f \ , \ x\varphi \rangle = 0 \ . \tag{1.23}$$

Donc $f$ s'annule sur toutes les fonctions de la forme $x\varphi$ où $\varphi \in \mathcal{D}(\mathbb{R})$. Or on a l'équivalence

$$\psi = x\varphi \ , \ \varphi \in \mathcal{D}(\mathbb{R}) \Leftrightarrow \psi \in \mathcal{D}(\mathbb{R}) \ \text{ et } \psi(0) = 0. \tag{1.24}$$

L'implication $\Rightarrow$ est évidente. Inversement si $\psi \in \mathcal{D}(\mathbb{R})$, supp $\psi \subset [-a \ , \ a]$ , $a > 0$, et $\psi(0) = 0$, la formule de Taylor permet d'écrire

$$\psi(x) = \psi(0) + x \int_0^1 \psi'(tx)dt = x\varphi(x).$$

La fonction $\varphi$ est de classe $C^\infty$ et si $|x| > a$ on a $\psi(x) = 0$ d'où $\varphi(x) = 0$, i.e. $\varphi \in \mathcal{D}(\mathbb{R})$.

On déduit alors de (1.24) que $f$ s'annule sur toutes les fonctions $\psi \in \mathcal{D}(\mathbb{R})$ et $\psi(0) = 0$. Fixons $\chi \in \mathcal{D}(\mathbb{R})$, $\chi = 1$ pour $|x| \leq 1$. Soit $\varphi \in \mathcal{D}(\mathbb{R})$ quelconque. Posons $\psi = \varphi - \varphi(0)\chi$ alors

$$\langle f \ , \ \psi \rangle = 0 \qquad \text{d'où} \qquad \langle f \ , \ \varphi \rangle = \varphi(0) \langle f \ , \ \chi \rangle$$

$$\text{i.e} \quad \langle f \ , \ \varphi \rangle = c \langle \delta \ , \ \varphi \rangle \qquad \text{où} \qquad c = \langle f \ , \ \chi \rangle$$

ce qui prouve $b)$.

## 1.9 Les distributions à support compact

**Définition 1 – 13**

On note $\mathcal{E}'(\Omega)$ l'espace vectoriel sur $\mathbb{C}$ des distributions à support compact.

**Définition 1 – 14**

On dit qu'une suite $\{\varphi_k\}_{k\in\mathbb{N}}$ de $C^\infty(\Omega)$ converge vers zéro dans $C^\infty(\Omega)$ si pour tout multi-indice $\alpha$, $D^\alpha\varphi_k$ converge vers zéro uniformément dans tout compact de $\Omega$.

**Théorème 1 – 5**

Soit $\Omega$ un ouvert de $\mathbb{R}^n$. Alors $\mathcal{D}(\Omega)$ est dense dans $C^\infty(\Omega)$.

**Remarque 1 – 7**

On définit la continuité et la linéarité d'une fonctionnelle sur $C^\infty(\Omega)$ de la même manière que dans $\mathcal{D}(\Omega)$, le dual topologique de $C^\infty(\Omega)$ est noté $(C^\infty(\Omega))'$, qui est l'espace des fonctionnelles linéaires continues définies sur $C^\infty(\Omega)$.

On a le résultat principal suivant :

**Théorème 1 – 6**

Il existe une application linéaire bijective $\Phi$ de $\mathcal{E}'(\Omega)$ dans le dual de $C^\infty(\Omega)$ qui permet d'identifier $\mathcal{E}'(\Omega)$ à $(C^\infty(\Omega))'$.

On peut caractériser cette application par :

**Proposition 1 – 6**

Soit $f \in \mathcal{E}'(\Omega)$ et $\mathbf{K}_0$ =supp $f$. Il existe une application linéaire $\tilde{f}$ de $C^\infty(\Omega)$ dans $\mathbb{C}$ telle que

$(i)$ $\left\langle \tilde{f}\ ,\ \varphi \right\rangle = \langle f\ ,\ \varphi\rangle$ si $\varphi \in \mathcal{D}(\Omega)$.

$(ii)$ $\left\langle \tilde{f}\ ,\ \varphi \right\rangle = 0$ si $\varphi \in C^\infty(\Omega)$, supp $\varphi \cap \mathbf{K}_0 = \varnothing$.

$(iii)$ Il existe $k \in \mathbb{N}$, un compact $\mathbf{K} \subset \mathbf{\Omega}$ (voisinage de $\mathbf{K}_0$) et $c > 0$ tels que

$$\left|\left\langle \tilde{f}\ ,\ \varphi \right\rangle\right| \leq c \sum_{|\alpha|\leq k} \sup_{\mathbf{K}} |D^\alpha\varphi(x)| \quad , \quad \forall\, \varphi \in C^\infty(\Omega).$$

On note par $\Phi$ l'application $f \mapsto \tilde{f}$ définie de $\mathcal{E}'(\Omega)$ dans $(C^\infty(\Omega))'$.

**Proposition 1 − 7**

Soit $\tilde{f} \in (C^{\infty}(\Omega))'$. La restriction de $\tilde{f}$ à $\mathcal{D}(\Omega)$ est une distribution à support compact.

L'application $\mathcal{R}$ $\tilde{f} \mapsto \tilde{f}_{/\mathcal{D}(\Omega)}$ de $(C^{\infty}(\Omega))'$ dans $\mathcal{E}'(\Omega)$ est un inverse à droite de l'application $\Phi$ définie ci-dessus.

## 1.10 Exercices

**Exercice 01** :

Soient $\varphi \in D(\mathbb{R}^n)$, $h \in \mathbb{R}^n \backslash \{0\}$. pour $t \in \mathbb{R} \backslash \{0\}$ on pose

$$\varphi_t(x) = \frac{\varphi(x+th) - \varphi(x)}{t}.$$

a) Montrer que $\varphi_t \in D(\mathbb{R}^n)$ pour $t \neq 0$.

b) Montrer que lorsque $t$ tend vers 0, $\varphi_t$ converge dans $D(\mathbb{R}^n)$ vers une fonction de $D(\mathbb{R}^n)$ et calculer cette fonction.

**Exercice 02** :

a) Soit $\varphi \in D(\mathbb{R})$ telle que $supp\ \varphi \subset ]1\ ,\ 2[$ , $0 \leq \varphi(x) \leq 1$ et $\varphi(x) = 1$ pour $a \leq x \leq b$ où $1 < a < b < 2$. Pour $k \in \mathbb{N}^*$ posons

$$\varphi_k(x) = e^{-k} \varphi(kx).$$

Montrer que $\{\varphi_k\}_{k \in \mathbb{N}^*}$ converge vers zéro dans $D(\mathbb{R})$.

b) Montrer qu'il n'existe pas de distribution $f \in D\prime(\mathbb{R})$ telle que

$$\langle f\ ,\ \varphi \rangle = \int_{\mathbb{R}} \exp(\frac{1}{x^2})\ \varphi(x) dx\ .$$

**Exercice 03** :

a) Montrer que pour $\lambda \in \mathbb{C}$ avec $\mathrm{Re}\,\lambda > -1$ les fonctions

$$x_+^\lambda = \begin{cases} x^\lambda & , \quad x > 0 \\ 0 & , \quad x \leq 0 \end{cases} \qquad ; \qquad x_-^\lambda = \begin{cases} |x|^\lambda & , \quad x < 0 \\ 0 & , \quad x \geq 0 \end{cases}$$

définissent des distributions sur $\mathbb{R}$.

b) En remarquant que pour $\mathrm{Re}\,\lambda > -1$ on a

$$\int_0^{+\infty} x^\lambda \varphi(x) dx = \int_0^1 x^\lambda \left[\varphi(x) - \varphi(0)\right] dx + \int_1^{+\infty} x^\lambda \varphi(x) dx + \frac{\varphi(0)}{\lambda + 1} \ ;$$

montrer que l'on peut définir une distribution $x_+^\lambda$ pour $\mathrm{Re}\,\lambda > -2$ et $\lambda \neq -1$.

Définir la même chose pour $x_-^\lambda$ et pour les mêmes valeurs de $\lambda$.

c) Généraliser ce procédé au cas où $\mathrm{Re}\,\lambda > -m-1$ , $\lambda \neq -1, \ -2, \ ..., -m$.

d) Soient $x_+^\lambda$ , $x_-^\lambda$ les distributions définies pour $\mathrm{Re}\,\lambda > -m-1$ , $\lambda \neq -1, \ -2, \ ..., -m$.

Calculer : $x.x_+^\lambda$ , $x.\ x_-^\lambda$ .

**Exercice 04 :**

Montrer que les applications suivantes définissent des distributions :

$a)$ $D(\mathbb{R}) \ni \varphi \mapsto \langle Pf \dfrac{1}{x^2} \ , \ \varphi \rangle = \lim\limits_{\epsilon \to 0} \left[ \displaystyle\int_{|x| \geq \epsilon} \frac{\varphi(x)}{x^2} dx - 2\frac{\varphi(0)}{\epsilon} \right]$ ;

$b)$ $D(\mathbb{R}) \ni \varphi \mapsto \langle Pf \dfrac{H}{x^2} \ , \ \varphi \rangle = \lim\limits_{\epsilon \to 0} \left[ \displaystyle\int_\epsilon^{+\infty} \frac{\varphi(x)}{x^2} dx - \frac{\varphi(0)}{\epsilon} + \varphi'(0) \ln \epsilon \right]$ ;

($Pf$ := partie finie ; $H$ := la fonction de Heaviside)

$c)$ Définir $Pf \dfrac{1}{x^m}$ , $Pf \dfrac{H}{x^m}$ pour $m$ entier $m \geq 3$.