Centre Universitaire Abdelhafid Boussouf de Mila
Institut des Sciences et de la Technologie
Département de Mathématiques et Informatiques

Systèmes dynamiques discrets

Exercice 1 : (............. Pts)
Soit le système dynamique discret défini par la fonction $f : [0,1] \longrightarrow [0,1]$ tel que

$$f(x) = \begin{cases} \mu x \text{ si } 0 < x < 0.5 \\ \mu(1-x) \text{ si } 0.5 \leq x \leq 1 \end{cases}.$$

avec $0 < \mu \leq 2$ est le paramètre de bifurcation.

1. Trouver les points fixes de ce système pour $\mu = 1$.
2. Trouver les points fixes de ce système et étudier leurs stabilités pour $\mu \neq 1$.
3. Posons $\mu = 2$. Trouver les orbites $2-$*priodiques* et étudier leurs stabilités.

Exercice 2 :(........... Pts)
Soient les fonctions réelles $f_1(x) = 2x + 1$, $f_2(x) = -2x + 4$. On définit le système à temps discret par

$$x_{n+1} = f(x_n), \tag{1}$$

avec $f = min(f_1, f_2)$.

1. Déterminer les points fixes du système (1).
2. Montrer que pour $x \in I = [-\frac{1}{8}, \frac{5}{16}]$, on a $f^3(x) = 8x$, en notant f^3la fonction composée $f \circ f \circ f$.
3. En déduire un point fixe du système défini par $x_{n+1} = f^3(x_n)$, puis pour le système (1) l'existence d'un 3-cycle que l'on déterminera.
4. Montrer que le $3-$*cycle* identifié en question précédente est instable et répulsif.

Exercice 3 :(................ Pts)
Soit $I = [-1, 1]$ et $f, g : I \longrightarrow I$ deux applications définies par $f(x) = 2|x|-1$, $g(x) = 2x^2-1$.

1. Trouver les points fixes de g est étudier leurs stabilités.
2. Montrer que f et g sont topologiquement conjugués. (Utiliser l'application ϕ : $I \longrightarrow I$ telle que $\phi(x) = \frac{2}{\pi} arcsin(x)$).
3. Déduire les points fixes de f et leurs stabilités à partir des points fixes de g.
4. Trouver deux orbites $3-$*priodique* de f.
5. Que peut-on dire sur l'existence des orbites périodiques d'ordre $1, 2, 4, 5...$ de f et g ?.
6. Que peut-on dire sur la dynamique de f et g.

Indication : La dérivé de la fonction $h(x) = 2arcsin(x) - arcsin(x^2 - 1)$ égal 0 pour tous $x \in]0, 1[$.

Solution de l'exercice 1 :(.......... Pts)

1. $\mu = 1$. Les points fixes sont les solutions de l'équation $f(x) = x$. Donc chaque point de l'intervalle $[0, \frac{1}{2}$ est un point fixe.

2. Si $x \neq 1$ on a les points fixes de ce système sont $x_1^* = 0$ et $x_2^* = \dfrac{\mu}{\mu+1}$.

$$f'(x) = \begin{cases} \mu \text{ si } 0 < x < 0.5 \\ -\mu \text{ si } 0.5 \leq x \leq 1 \end{cases}.$$

   (a) Le multiplicateur de x_1^* est $f'(x_1^*) = \mu$. donc x_1^* est attractif si $0 < \mu < 1$ et répulsif si $1 < \mu \leq 2$.

   (b) Le multiplicateur de x_2^* est $f'(x_2^*) = -\mu$. donc x_2^* est attractif si $0 < \mu < 1$ et répulsif si $1 < \mu \leq 2$.

3. Si $\mu = 2$ on a

   (a) Les orbites $2 - \textit{priodique}$ sont les solutions du système.

$$\begin{cases} f(f(x)) = x \\ f(x) \neq x \end{cases}.$$

$$f(f(x)) = \begin{cases} 4x \text{ si } 0 < x \leq \frac{1}{4} \\ 2 - 4x \text{ si } \frac{1}{4} < x \leq \frac{1}{2} \\ 4x - 2 \text{ si } \frac{1}{2} < x \leq \frac{3}{4} \\ 4 - 4x \text{ si } \frac{3}{4} < x \leq 1 \end{cases}$$

   $\begin{cases} f(f(x)) = x \\ f(x) \neq x \end{cases}$ implique $x_1 = \frac{2}{5}$ et $x_2 = \frac{4}{5}$. D'où l'orbite 2-périodique est

$$(x_1, x_2) = (\frac{2}{5}, \frac{4}{5}).$$

   (b) Le multiplicateur de l'orbite (x_1, x_2) est $S = f'(x_1)f'(x_2) = 2 \times (-2) = -4$, donc l'orbite (x_1, x_2) est répulsive.

Solution de l'exercice 2 :(5 Pts)

1. $f(x)$ vaut $f_1(x)$ pour $x \leqslant \dfrac{3}{4}$, et $f_2(x)$ pour $x \geqslant \dfrac{3}{4}$. Un équilibre x satisfait nécessairement :
   - $f_1\{x) = x$ d'où $x = -1$, que l'on retient car $-1 < 3/4$
   - ou $f_2\{x) = x$, d'où $x = \frac{4}{3}$, que l'on retient aussi car $4/3 \geq 3/4$.

   Donc, le système (1) possède deux équilibres, -1 et $\frac{4}{3}$.

2. Pour tout $x \in I$, $x \leqslant 3/4$ d'où $f\{x) = f_1(x) = 2x + 1$. Alors, $f_1(x) \in \left[\frac{3}{4}, \frac{13}{8}\right]$.
   Comme $f(x) \geq 3/4$, on a $f^2(x) = (f_2 \circ f_1)(x) = -4x + 2$, d'où $f^2(x) \in [\frac{3}{4}, \frac{5}{2}]$.
   Comme $f^2(x) \geq 3/4$, on a $f^3(x) = (f_2 \circ f_2 \circ f_1)(x) = -2(-4x + 2) + 4 = 8x$ On a donc bien $x \in I \Longrightarrow f^3(x) = -8x$.

3. $0 \in I \Longrightarrow f^3\{0) = 0$, ce qui montre que 0 est un équilibre de sysème f^3.
   0 est donc aussi l'un des éléments d'un 3-cycle du système (1).
   Ce dernier s'obtient par $f(0) = f_1\{0) = 1$ et $f^2(0) = f\{1) = f_2\{1) = 2$.
   On vérifie que $f(2) = f_2(2) = 0$ Donc, $(0, 1, 2)$ est un 3-cycle de système.

4. Pour $x \in I$, $f^3(x) = -8x$, d'où $(f^3)'(0) = -8$. Ce nombre étant de module supérieur à 1, le cycle $(0, 1, 2)$ est instable et répulsif.

Solution de l'exercice 3 :(5 Pts)

1. Les points fixes sont les solutions de l'équation $g(x) = x$. Donc g a deux point fixes répulsifs $x_1 = 1$ et $x_2 = \frac{-1}{2}$.

2. Observons d'abord que ϕ est strictement croissante sur $[-1, 1]$ car $\phi'(x) = \frac{2}{\pi\sqrt{1-x^2}} > 0$; donc ϕ est injective. De plus ϕ est continue, $\phi(-1) = -1$ et $\phi(1) = 1$ alors ϕ est surjective et $\phi([-1, 1]) = [-1, 1]$. Il reste à vérifier que $f(\phi(x)) = \phi(g(x))$ pour tous $x \in [-1, 1]$. f et g sont des fonctions paires et ϕ est une fonction impaire, donc $f(\phi)$ et $\phi(g)$ sont des fonctions paires. Par conséquent, il suffit de prouver l'égalité lorsque $x \in [0, 1]$.
   $f(\phi(x)) = \phi(g(x))$ si et seulement si $\frac{4}{\pi} arcsin(x) - 1 = \frac{2}{\pi} arcsin(2x^2 - 1)$. L'égalité est vraie si et seulement si $2arcsin(x) - arcsin(2x^2 - 1) = \frac{\pi}{2}$ pour tous $x \in [0, 1]$. Ceci est vrai lorsque $x = 0$. Pour s'assurer qu'elle est vraie pour tout $x \in [0, 1]$, il suffit de montrer que la dérivée de la fonction $h(x) = 2arcsin jc - arcsin(2x^2 - l)$ vaut 0 pour $x \in]0, 1[$ (C'est donné dans l'exercice).

3. f a deux points fixes sont $x_1' = \phi(1) = 1$ et $x_2' = \phi(\frac{-1}{2}) = \frac{-1}{3}$.

4. Les orbites 3-périodique $((x_1, (x_2, (x_3)$ sont des solutions du système

$$\begin{cases} x_2 = 2\,|x_1| - 1 \\ x_3 = 2\,|x_2| - 1 \\ x_1 = 2\,|x_3| - 1 \end{cases}$$

   On trouve deux solutions $(\frac{5}{9}, \frac{1}{9}, \frac{-7}{9})$ et $(\frac{-1}{7}, \frac{-5}{7}, \frac{3}{7})$.

5. Comme f a des orbites 3-périodique alors elle a des orbites p-périodique pour tous $p = 1, 2, 3, 4, ...$ Même raisonnement pour g.

6. D'après le théorème de Charkovski f est chaotique (Période 3 implique chaos).