Centre Universitaire Abdelhafid Boussouf Mila
Institut des Sciences et de la Technologie
Département de Mathématiques et Informatique

Année 2021-2022
Master 1 MA+MF

Matière : Systèmes dynamiques en biologie

Série N°2

Exercice 1

Soit l'équation suivante décrivant la variation des effectifs $n(t)$ d'une population exploitée :

$$\frac{dn}{dt} = r\left(1 - \frac{n}{K}\right)n - En,$$

r et K sont respectivement le taux de croissance et la capacité limite de la population.
E S'appelle l'effort de pêche. Tous les paramètres sont positifs.

1) Rechercher les points d'équilibre de cette équation. Étudier leur stabilité locale. Quelle est la condition pour atteindre un équilibre positif noté n^*.
2) Tracer alors l'allure générale des chroniques.
3) Montrer que cette équation peut se mettre sous la forme d'une équation logistique dont on précisera le taux de croissance et la capacité limite. Ces résultats sont-ils cohérents avec ceux du (1)).
4) Soit $Y(E) = En^*$ la capture lorsque cet équilibre est atteint. Montrer qu'il existe un effort de pêche optimal qui maximise la capture. Quel est alors la capture correspondante.

Exercice 2

Soit une population structurée en deux classes d'âge, les juvéniles et les adultes de densités respectives $n_1(t)$ et $n_2(t)$ obéissant aux deux équations suivantes :

$$\begin{cases} \dot{n}_1 = bn_2 - vn_1 \\ \dot{n}_2 = vn_1 - dn_2 \end{cases} \ldots\ldots(1)$$

1) Donner une interprétation biologique du modèle (1), en particulier la signification des paramètres strictement positifs b, d et v.
2) Rechercher le point d'équilibre de ce système d'équations. Donner la condition d'unicité.
3) Déterminez en fonction des valeurs des paramètres la nature du point d'équilibre, noeud, foyer, centre ou point selle. Interprétez biologiquement chacun des cas possibles.

Exercice 3

Le modèle de H. Dekker (1975) a été réalisé pour rendre compte des évolutions de populations de rongeurs tels que les lemmings en Scandinavie. Soit le modèle suivant pour une population de rongeurs subdivisée en deux groupes d'effectifs n_1 et n_2 correspondant à deux génotypes

$$\begin{cases} n^{\cdot}{}_1 = n_1\,(a_1 - b_1 n_2 - c_1 n_1) \\ n^{\cdot}{}_2 = n_2\,(-a_2 + b_2\, n_1) \end{cases}$$

où les a_i , b_i, c_i sont des constantes positives.
Les individus de type 1 se reproduisent rapidement, mais migrent lorsqu'ils sont trop nombreux, ce qui dans le modèle correspond à une disparition. Les individus de type 2 sont moins sensibles aux densités élevées, mais ont une capacité de reproduction plus faible.

1) Rechercher tous les points d'équilibre en donnant la condition d'existence dans le quadrant positif, $n_1, n_2 > 0$.
2) Tracer les isoclines et indiquer l'allure du champ de vecteurs vitesse dans le cas où tous les points d'équilibre existent dans le quadrant positif.
3) Calculer les matrices Jacobiennes en chacun des points d'équilibre. Exprimer les systèmes linéaires valables au voisinage des points d'équilibre.
4) En calculant les valeurs propres ou en utilisant les conditions usuelles (signes de la trace et du déterminant), déterminer s'il y a stabilité locale. Indiquer dans chaque cas, éventuellement en fonction des paramètres, s'il s'agit d'un noeud, d'un foyer stable - instable, d'un point selle ou d'un centre.
5) Étude du cas où l'un des points d'équilibre est un foyer stable. On suppose des conditions initiales au voisinage de ce foyer; Que se passe-t-il ? Donner une interprétation écologique.

Exercice4

On considère le modèle de Lotka-Volterra d'une chaîne trophique composé de trois populations (deux proies, un super-prédateur, conformément au schéma). On suppose qu'en l'absence de super-prédateur la première proie obéit à une loi logistique et la deuxième suive une loi linéaire et qu'en l'absence des deux proies le super-prédateur suive une loi linéaire. On suppose de plus que les termes d'interactions sont de type I (Lotka-Volterra classique)

1) Ecrire le modèle qui décret la dynamique des populations.
2) Démontrer qu'il existe un point d'équilibre non trivial appartenant au cadran positif pour des conditions à déterminer.
3) En utilisant les critères de Routh-Hurwitz, étudier la stabilité du point d'équilibre non trivial.

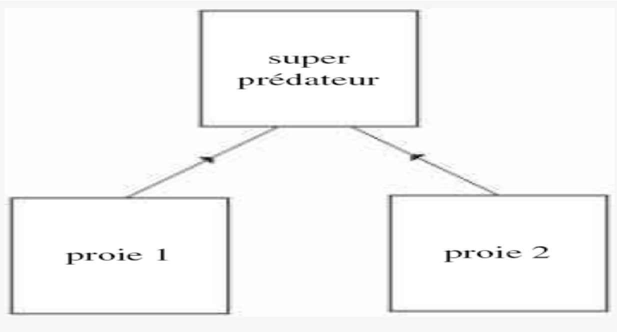

Schéma d'un système avec deux proies et un prédateur.