Centre Universitaire de Mila
Institut des Science et de la Technologie Année 2021-2022
Département de Mathématiques et Informatique Master 1 (MF+MA)
Systèmes dynamiques en biologie
Série de TD N °1 (Rappel sur les systèmes dynamiques continus)

Exercice. 1

Pour les quatre équations suivantes :

1. $\frac{dx}{dt} = x^4 - x^3 - 2x^2$
2. $\frac{dx}{dt} = x(1-x)(2-x)$
3. $\frac{dx}{dt} = \cos x$
4. $\frac{dx}{dt} = x(x-5)(x+2)^2(x+8)$

Donner les points d'équilibre, leur nature et l'allure des chroniques.

Pour (2), on montrera que les courbes solutions présentent des points d'inflexion en $x = 1 \pm \frac{\sqrt{3}}{3}$ (on considérera pour cela la fonction $\dot{x} = f(x)$).

Exercice. 2

On considère l'équation différentielle suivante dépendant du paramètre λ :

$$\dot{x} = (x - \lambda)\left(x^2 - \lambda\right)$$

Trouver tous les portraits de phase possibles ainsi que le domaine de variation de λ pour lesquels ils apparaissent.

Exercice. 3

Soit le système différentiel non linéaire : $\begin{cases} \dfrac{dx}{dt} = x^2y - x + b \\ \dfrac{dy}{dt} = -x^2y + 1 \end{cases}$ où $b \in \mathbb{R}$.

Déterminer les points d'équilibre de ce système et donner, quand c'est possible, leur nature dans les cas suivants : $b = 1$, $b = -\dfrac{1}{2}$, $b = 0$.

Exercice. 4

On donne le système différentiel dans $\mathbb{R}^2$: $\begin{cases} \dfrac{dx}{dt} = x(2 - x - y) \\ \dfrac{dy}{dt} = y(-3 + 4x - x^2) \end{cases}$

Déterminer les points fixes du système et donner leur nature. Sur un graphique, tracer les nullclines et les points fixes avec leurs directions stable(s) et instable(s) quand elles existent. Préciser la direction approximative du vecteur tangent aux trajectoires (i.e., $\dfrac{dx}{dt} > 0, \dfrac{dy}{dt} < 0$, etc.) et le représenter sur le graphique. Sens de parcours sur les trajectoires qui s'enroulent autour de l'unique foyer situé dans le premier quadrant ?