Centre Universitaire de Mila
Institut des Sciences et de la Technologie
1^{er} **Année master maths**

Série N : 2

Exercise 1.

1. *Soit* $f(x) = x - \exp(-x) + 2$. *Montrer que* f *a au moins un point fixe sur* $[-1, 0]$.
2. *Soit* $g(x) = -\exp(x) + \cos(x+1)$. *Montrer que* g *a au moins un point fixe sur* $[-1, 0]$.

Exercise 2.
Soit le système dynamique défini par l'application

$$f(x) = x^2 - 1.$$

1. *Trouver les points fixes de ce système.*
2. *Trouver les orbites périodiques de période 2 de ce système.*

Exercise 3.
Soit le système dynamique défini par l'application

$$f(x) = x^2.$$

1. *Trouver les points fixes de ce système.*
2. *Donner un point éventuellement fixe de ce système.*

Exercise 4.
Soit le système dynamique défini par l'application

$$f(x) = ax^3 - bx.$$

Étudier la stabilité du point fixe 0

Exercise 5. *Soit le système dynamique défini par l'application*

$$f(x) = 3.2x(1-x).$$

Trouver les orbites périodiques de période 2 de ce système et étudié leur stabilités.

Exercise 6.
Soit le système dynamique discret défini par la fonction $f : [0,1] \longrightarrow [0,1]$ *tel que*

$$f(x) = \begin{cases} \mu x \ si \ 0 < x < 0.5 \\ \mu(1-x) \ si \ 0.5 \leq x \leq 1 \end{cases}.$$

avec $0 < \mu \leq 2$ *est le paramètre de bifurcation.*

1. *Trouver les points fixes de ce système pour* $\mu = 1$.
2. *Trouver les points fixes de ce système et étudier leurs stabilités pour* $\mu \neq 1$.
3. *Posons* $\mu = 2$. *Trouver les orbites* $2-$*priodiques et étudier leurs stabilités.*

Exercise 7.
Soit le système dynamique défini par

$$\begin{cases} x_{n+1} = 1 - a|x_n| - b|y_n| \\ y_{n+1} = x_n \end{cases}$$

a et b sont les paramètres de bifurcations.

1. *Trouvez les points fixes de ce système.*
2. *Donnez la stabilité du point fixe avec coordonnés positifs pour $a = 1$ et $b = 0.5$.*
3. *Supposons que $a = 0$ et $0 < b < 2$. Étudiez la stabilité du point fixe avec coordonnés positifs.*
4. *Que peut-on dire exactement pour la valeur $b = 1$.*

Exercise 8.
Soient les fonctions réelles $f_1(x) = 2x + 1$, $f_2(x) = -2x + 4$. On définit le système à temps discret par

$$x_{n+1} = f(x_n), \tag{1}$$

avec $f = min(f_1, f_2)$.

1. *Déterminer les points fixes du système (1).*
2. *Montrer que pour $x \in I = [-\frac{1}{8}, \frac{5}{16}]$, on a $f^3(x) = 8x$, en notant f^3la fonction composée $f \circ f \circ f$.*
3. *En déduire un point fixe du système défini par $x_{n+1} = f^3(x_n)$, puis pour le système (1) l'existence d'un 3-cycle que l'on déterminera.*
4. *Montrer que le $3 - cycle$ identifié en question précédente est instable et répulsif.*