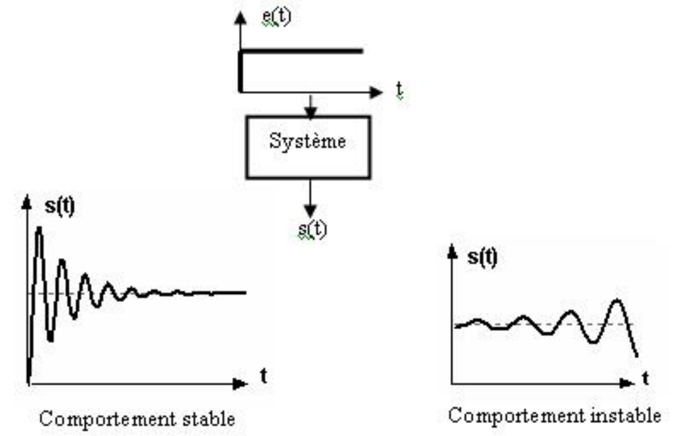
Chapitre III : Stabilité des Systèmes Linéaires

III.1 Conditions de stabilité des Systèmes linéaires

III.1.1 Domaine temporel

Un système est stable si à une entrée bornée (finie) correspond une sortie bornée.

Le comportement d'un système stable est tel que : En lui appliquant une entrée de type échelon par exemple (entrée bornée), la sortie converge vers une valeur bornée. Par contre, un système instable verra sa sortie diverger**.**



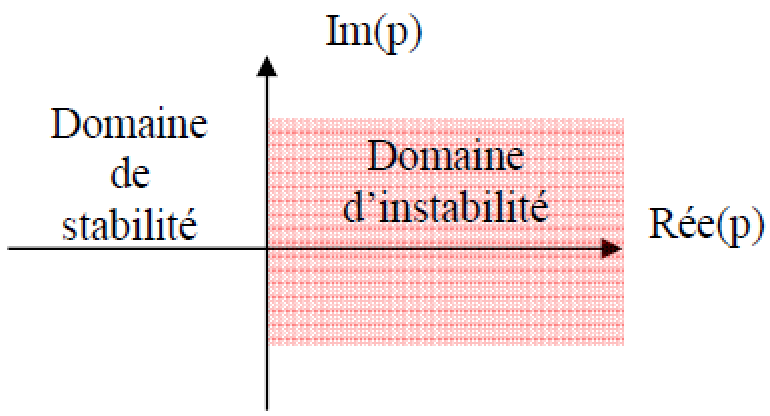
III.1.2 Domaine fréquentiel

Un système asservi linéaire est stable si les parties réelles des pôles (solution de D(p) = 0) sont négatives. c.à.d. tous les pôles de sa fonction de transfert sont strictement à gauche de l'axe imaginaire dans le plan complexe dédié à p.

$$H(p) = \frac{b_m p^m + b_{m-1} p^{m-1} + \cdots + b_1 p + b_0}{a_n p^n + a_n - 1 p^{n-1} + \cdots + a_1 p + a_0} = \frac{N(p)}{D(p)} \qquad \text{avec} \qquad n \geq m$$

$$D(p) = 0$$

$$D(p) = a_n p^n + a_n - 1 p^{n-1} + \cdots + a_1 p + a_0 = 0$$



Exemples :

Exemple 1 :

$$H(p) = \frac{p-2}{(p+1)(p+2)}$$

$Zéro : z_1 = 2$

$Pôles : p_1 = -1 \; et \; p_2 = -2$

Le système est stable

Exemple 2 :

$$H(p) = \frac{p-2}{(p+1)(p^2+2)}$$

$Zéro : z_1 = 2$

$Pôles : p_1 = -1 \, , \; p_2 = j\sqrt{2}$ et $p_3 = -j\sqrt{2}$

Le système est juste oscillant (marginalement stable)

Exemple 3 :

$$H(p) = \frac{p-2}{(p-1)(p+2)}$$

$Zéro : z_1 = -2$

$Pôles : p_1 = 1$ et $p_2 = -2$

Le système est instable

III.2 Stabilité d'un système asservi à partir de sa FTBF : Critère algébrique de Routh-Hurwitz

On appelle critère de Routh un critère algébrique permettant d'évaluer la stabilité d'un système à partir des coefficients du dénominateur D(p) de sa fonction de transfert en boucle fermée (FTBF).

Ce critère est issu d'une méthode qui permet de décompter le nombre de racines à partie réelle positive ou nulle du polynôme D(p).

Construction du tableau des coefficients

Soit $H(p) = \frac{N(p)}{D(p)}$ la fonction de transfert d'un système, les pôles de $H(p)$ sont les racines de l'équation

$$D(p) = a_n p^n + a_n - 1p^{n-1} + \cdots + a_1 p + a_0 = 0$$

Les deux premières lignes de la table de Routh sont écrites à l'aide des coefficients de D(p). Les autres lignes sont formées de termes calculés à partir de ces coefficients.

p^n	a_n	a_{n-2}	a_{n-4}	…	a_2	a_0	…	a_3	a_1
p^{n-1}	a_{n-1}	a_{n-3}	a_{n-5}	…	a_1		…	a_2	a_0
p^{n-2}	b_{n-2}	b_{n-4}	b_{n-6}	…	*si n pair*		…	*si n impair*	
p^{n-3}	c_{n-3}	…	…						
…	…	…							
p^1	…	…							
p^0	…								

Première colonne en rouge, dite des pivots

La première ligne contient les coefficients des termes en p^{n-2k}, dans l'ordre des puissances décroissantes. La deuxième ligne contient les coefficients des termes en p^{n-1-2k}, et se termine suivant la parité de n. Les lignes suivantes sont remplies en suivant les lois de formation suivantes :

$$b_{n-2} = \frac{-1}{a_{n-1}} \begin{vmatrix} a_n & a_{n-2} \\ a_{n-1} & a_{n-3} \end{vmatrix} \qquad b_{n-i} = \frac{-1}{a_{n-1}} \begin{vmatrix} a_n & a_{n-i} \\ a_{n-1} & a_{n-i-1} \end{vmatrix}$$

$$c_{n-3} = \frac{-1}{b_{n-2}} \begin{vmatrix} a_{n-1} & a_{n-3} \\ b_{n-2} & b_{n-4} \end{vmatrix} \qquad c_{n-j} = \frac{-1}{b_{n-2}} \begin{vmatrix} a_{n-1} & a_{n-j} \\ b_{n-2} & b_{n-j-1} \end{vmatrix}$$

Les cases vides sont remplies par des zéros.

Le calcul des lignes est poursuivi jusqu'à ce que la première colonne soit remplie.

Enoncé du critère :

Le système est stable si et seulement si tous les termes de la première colonne sont strictement positifs.

Propriétés de la méthode :

- Le système est stable si tous les termes de la colonne des pivots sont positifs
- Il y a autant de racines à partie réelle positive que de changements de signe dans la première colonne.
- L'apparition de lignes de zéros indique l'existence de racines imaginaires pures (par paires). Dans ce cas, correspondant à un système oscillant, on continue le tableau en remplaçant la ligne nulle par les coefficients obtenus en dérivant le polynôme reconstitué à partir de la ligne supérieure. (Exemple 3)

Exemples

Exemple1 :

$D(p) = p^4 + p^3 + 3.p^2 + p + 1$

p^4	1	3	1
p^3	1	1	0
p^2	2	1	0
p^1	0,5	0	
p^0	1		

$b_2 = \frac{-1}{1}\begin{vmatrix} 1 & 3 \\ 1 & 1 \end{vmatrix} = 2\;;$ $\quad b_0 = \frac{-1}{1}\begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 0 \end{vmatrix} = 1$

$c_1 = \frac{-1}{2}\begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 2 & 1 \end{vmatrix} = 0{,}5\;;$ $\quad c_{-1} = \frac{-1}{2}\begin{vmatrix} 1 & 0 \\ 2 & 0 \end{vmatrix} = 0$

$d_0 = \frac{-1}{0{,}5}\begin{vmatrix} 2 & 1 \\ 0{,}5 & 0 \end{vmatrix} = 1$

En conclusion : Système stable

Exemple2 :

$D(p) = p^4 + p^3 + 2.p^2 + 2.p + 1$

p^4	1	2	1
p^3	1	2	0
p^2	0	1	

$b_2 = \frac{-1}{1}\begin{vmatrix} 1 & 2 \\ 1 & 2 \end{vmatrix} = 0\;;$ $\quad b_0 = \frac{-1}{1}\begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 0 \end{vmatrix} = 1$

On note ici que le pivot devient nul, ce qui ne permet pas de poursuivre. La méthode consiste alors à remplacer le polynôme de départ par un polynôme « à même stabilité », par exemple en le multipliant par un polynôme dont on connaît les racines, choisies bien évidemment réelles et négatives. La solution la plus simple est donc ici de prendre comme nouveau polynôme Da(p)=(p+a).D(p), avec a réel positif, par exemple a= 1.

$D_1(p) = p^5 + 2.p^4 + 3.p^3 + 4.p^2 + 3.p + 1$

p^5	1	3	3
p^4	2	4	1
p^3	1	2,5	0
p^2	-1	1	0
p^1	3,5	0	
p^0	1		

$b_3 = \frac{-1}{2}\begin{vmatrix} 1 & 3 \\ 2 & 4 \end{vmatrix} = 1\;;$ $\quad b_1 = \frac{-1}{2}\begin{vmatrix} 1 & 3 \\ 2 & 1 \end{vmatrix} = 2{,}5$

$c_2 = \frac{-1}{1}\begin{vmatrix} 2 & 4 \\ 1 & 2{,}5 \end{vmatrix} = -1\;;$ $\quad c_0 = \frac{-1}{1}\begin{vmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 0 \end{vmatrix} = 1$

$d_1 = \frac{-1}{-1}\begin{vmatrix} 1 & 2{,}5 \\ -1 & 1 \end{vmatrix} = 3{,}5\;;$ $\quad d_{-1} = \frac{-1}{1}\begin{vmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 0 \end{vmatrix} = 0$

$e_0 = \frac{-1}{3{,}5}\begin{vmatrix} -1 & 1 \\ 3{,}5 & 0 \end{vmatrix} = 1$

En conclusion : Système instable

Exemple 3 :

$D(p) = p^4 + p^3 + 5.p^2 + 4.p + 4$

p^4	1	5	4
p^3	1	4	0
p^2	1	4	0
p^1	0	0	

p^2	1	4
p^1	2	0
p^0	4	

$$b_2 = \frac{-1}{1}\begin{vmatrix} 1 & 5 \\ 1 & 4 \end{vmatrix} = 1\,; \qquad b_0 = \frac{-1}{1}\begin{vmatrix} 1 & 4 \\ 1 & 0 \end{vmatrix} = 4$$

$$c_1 = \frac{-1}{1}\begin{vmatrix} 1 & 4 \\ 1 & 4 \end{vmatrix} = 0\,; \qquad c_{-1} = \frac{-1}{1}\begin{vmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 0 \end{vmatrix} = 0$$

Le polynôme reconstitué à partir de la ligne 3 est p^2+4, qui admet $\pm 2j$ pour racines et pour polynôme dérivé 2.p. D'où la reconstitution du tableau pour poursuivre l'étude :

$$d_0 = \frac{-1}{2}\begin{vmatrix} 1 & 4 \\ 2 & 0 \end{vmatrix} = 4$$

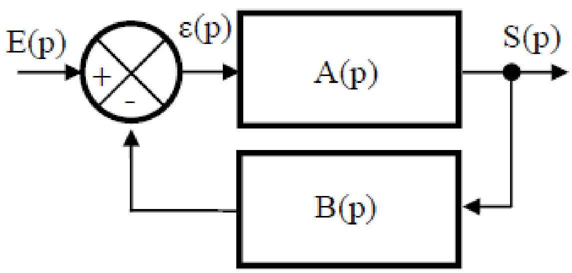
En conclusion : Système stable, mais oscillant

III.3 Stabilité d'un système asservi à partir de sa FTBO : critères graphiques

Dans la pratique, l'étude de la stabilité des systèmes bouclés se fait plutôt graphiquement dans le domaine fréquentiel à partir de la FTBO.

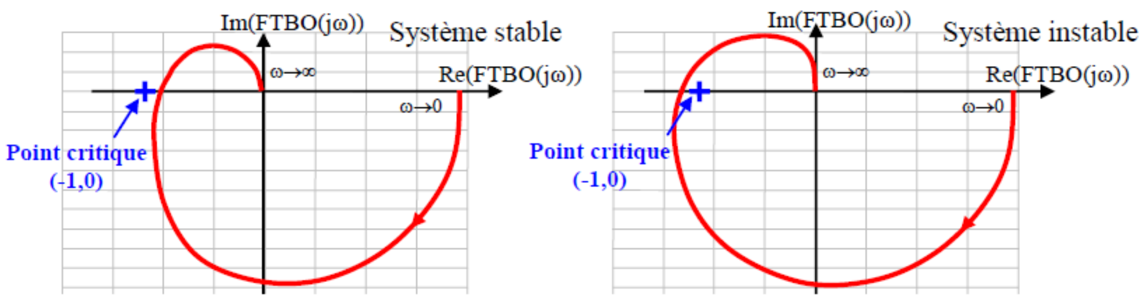
Equation caractéristique et point critique

On appelle équation caractéristique d'un système bouclé ci-contre, l'expression 1 + FTBO(p) = 0. Le système est en limite de stabilité si FTBO(p) = - 1. On appelle point critique le point du plan complexe d'affixe z = -1 (module 1 et argument -180°) et on constate que l'étude du dénominateur des FTBF revient en fait à analyser la FTBO par rapport au point critique.



III.3.1 Critère du revers dans le plan de Nyquist

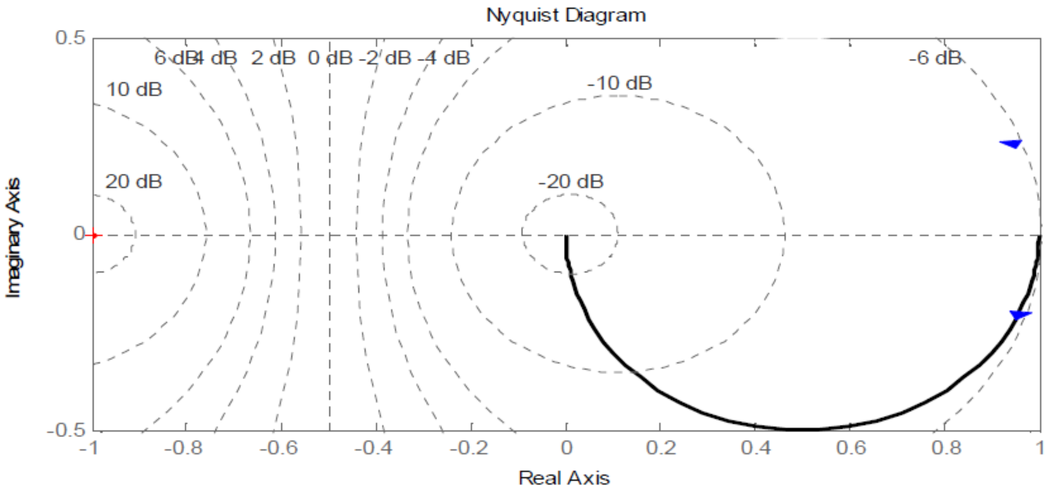
Un système asservi, stable en boucle ouverte, est stable en boucle fermée si et seulement si le point critique (-1,0) est laissé à gauche lorsque l'on parcourt le lieu de Nyquist de sa fonction de transfert en boucle ouverte FTBO(p) dans le sens des pulsations croissantes.



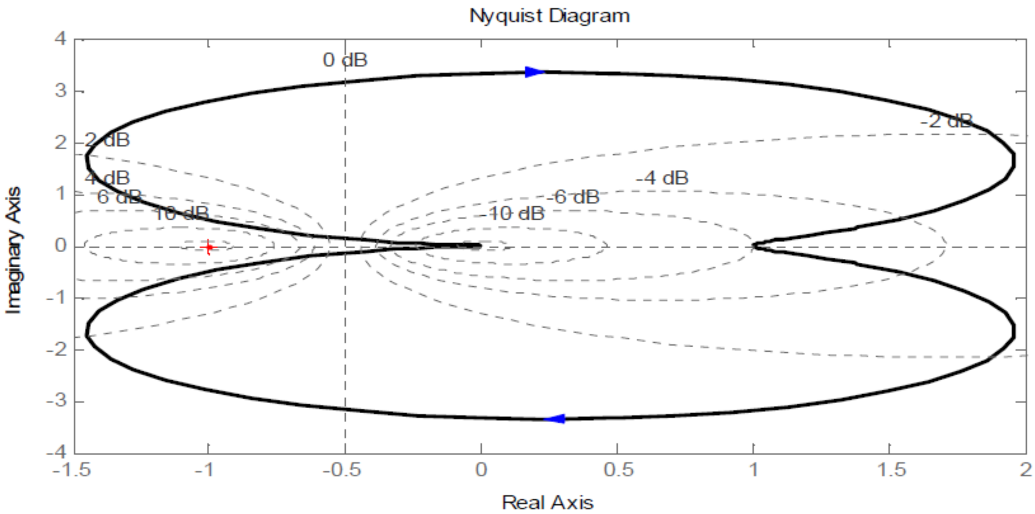
Si le lieu de transfert dans le plan de Nyquist de la FTBO passe sur le point critique alors le système est oscillant.

Exemples :

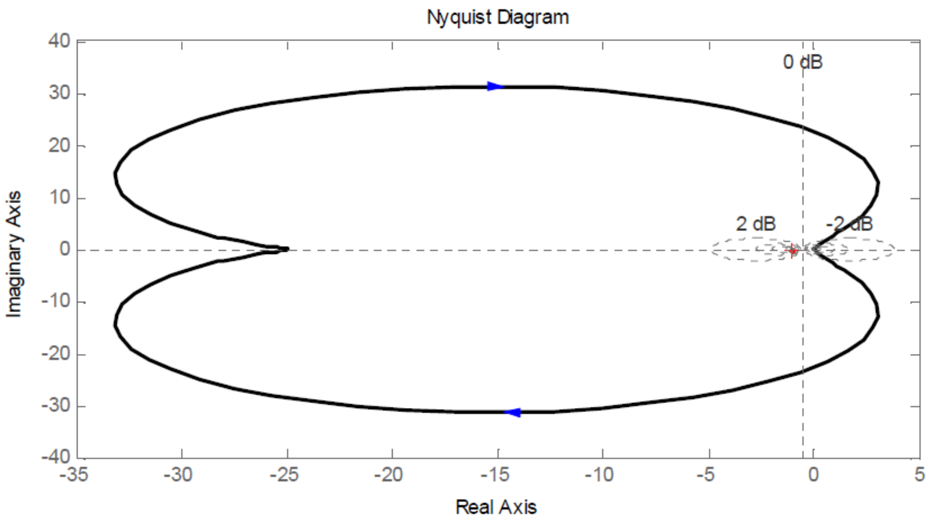
Exemple 1 : Le système est stable.



Exemple 2 : Le système est stable.

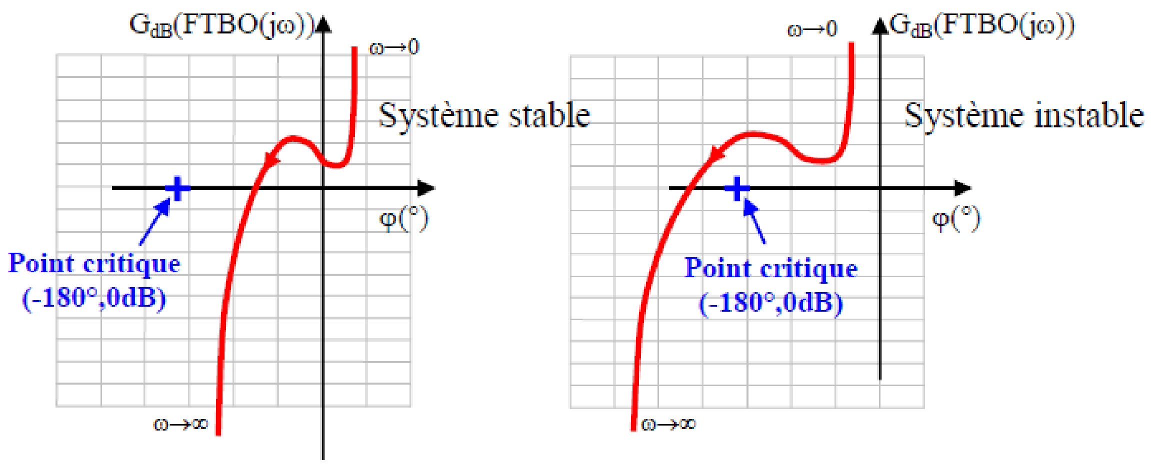


Exemple 3 : Le système n'est pas stable.



III.3.2 Critère du revers dans le plan de Black

Un système asservi, stable en boucle ouverte, est stable en boucle fermée si et seulement si le point critique (-180°,0dB) est laissé à droite lorsque l'on parcourt le lieu de Black de sa fonction de transfert en boucle ouverte FTBO(p) dans le sens des pulsations croissantes.



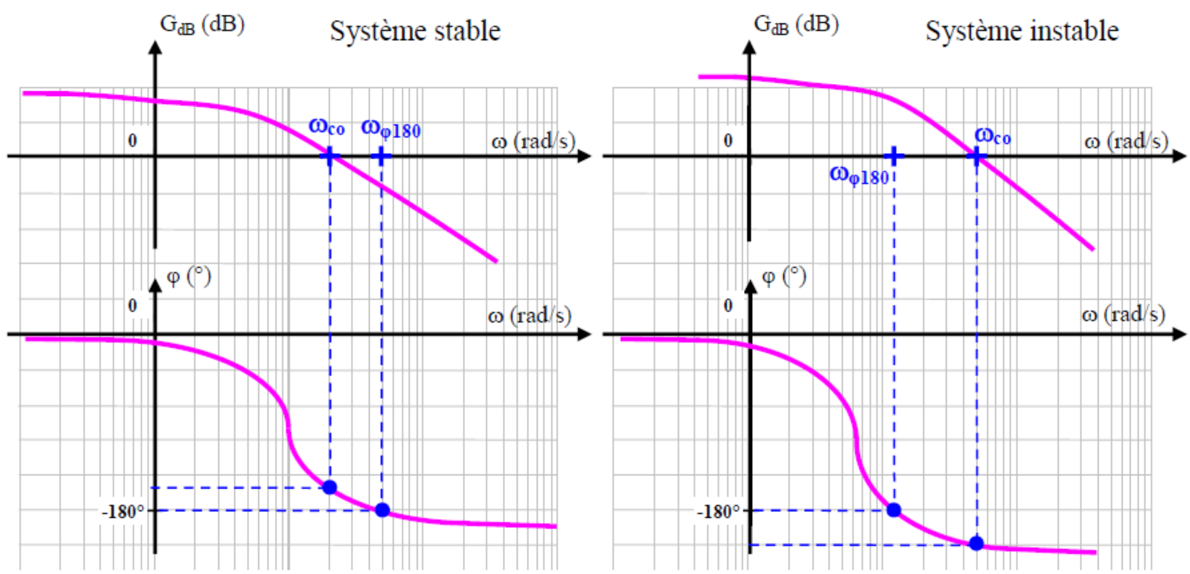
Si le lieu de transfert dans le plan de Black de la FTBO passe sur le point critique alors le système est oscillant.

III.3.3 Critère du revers dans le plan de Bode

Du fait de l'utilisation de deux diagrammes, il n'est plus possible de localiser le point critique, par conséquent l'analyse de la stabilité dans le plan de Bode est plus complexe que dans le plan de Black ou le plan de Nyquist.

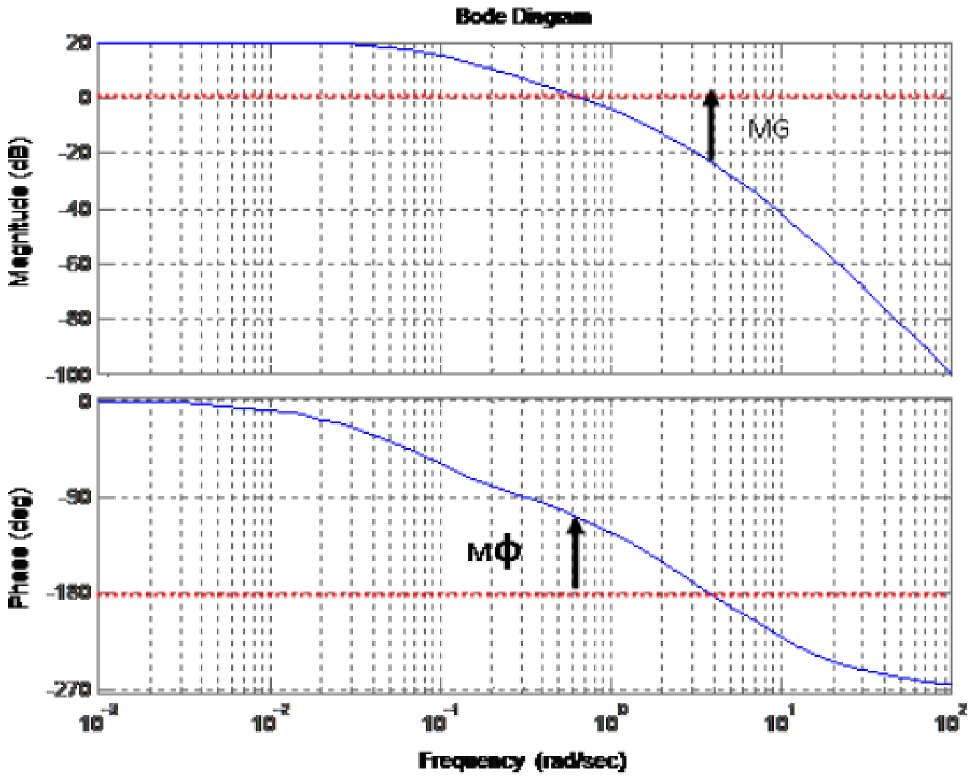
Un système asservi, stable en boucle ouverte, est stable en boucle fermée si et seulement si :

- à la pulsation ω = ωco pour laquelle |FTBO (jωco))|dB = 0dB, on a arg(FTBO (jωco)) > -180° ;
- à la pulsation ω = ω-180° pour laquelle arg(FTBO (jω-180°)) = -180°, on a |FTBO (jω-180°))|dB < 0dB

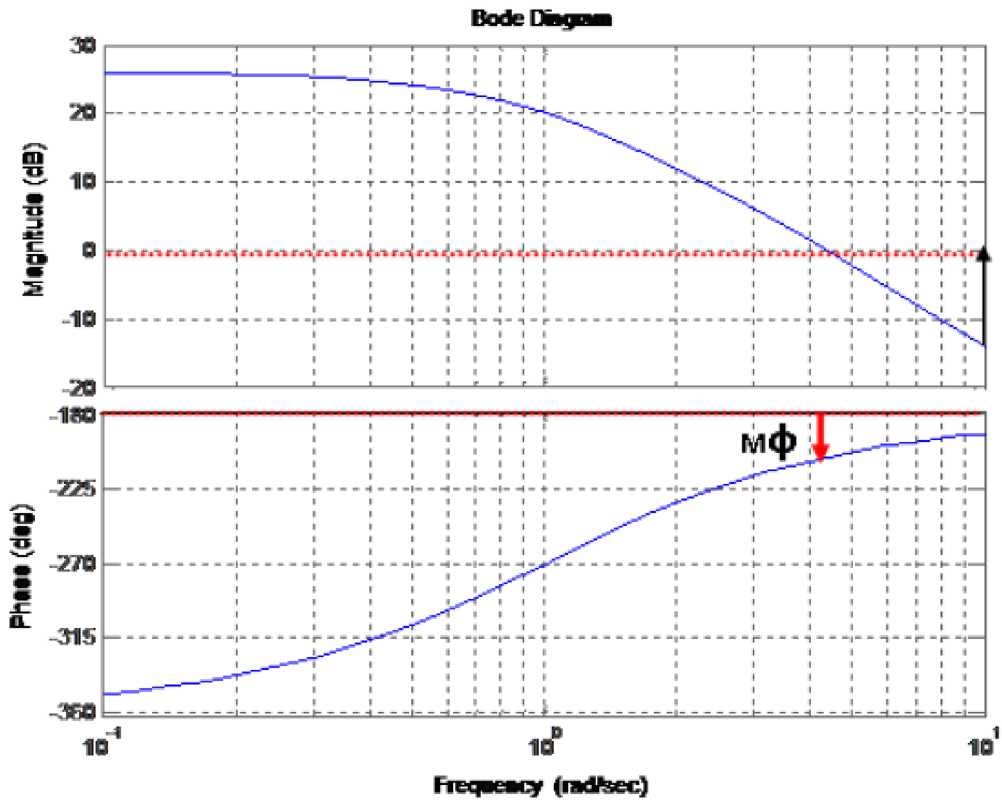


Exemples :

Exemple 1 : Le système est stable



Exemple 2 : Le système est instable en BF car MG>0 et Mφ <0



III.3.4 Marges de stabilité

En pratique, il est nécessaire de faire fonctionner un système suffisamment loin de son point d'instabilité, car l'étude de ce system est menée sur un modèle mathématique, d'un certain ordre, qui est une approximation du système réel et est donc entaché d'erreur. Ainsi, il est nécessaire, comme dans le dimensionnement de systèmes par exemple, de définir des marges de sécurité, appelées Marges de Stabilité.

Marge de Gain et marge de Phase

On définit, par observation dans le diagramme de Bode, deux types de marges de stabilité, la marge de phase et la marge de gain.

- **Marge de phase :** La marge de phase est définie telle que $M\varphi = 180° + \arg(FTBO\ (j\omega co))$ où ωco est la pulsation de coupure pour laquelle $|FTBO\ (j\omega co)| = 0dB$. On cherche généralement à obtenir une marge de phase de 45° (valeur empirique) qui garantit un fonctionnement correct de la plupart des systèmes.
- **Marge de gain :** La marge de gain est définie telle que $MG = -20\log|FTBO\ (j\omega_{-180°})|$ où $\omega_{-180°}$ est la pulsation pour laquelle $\arg(FTBO\ (j\omega_{-180°})) = -180°$. En général une marge de gain de 6dB permet une latitude d'un facteur 2 sur le gain en boucle ouverte. La valeur retenue est généralement comprise entre 10 et 15 dB.

Illustrations des marges de gain et de phase dans le plan de Nyquist, de Black et de Bode