Chapitre 4 :

Systèmes hyperstatiques

Introduction :

Nous avons vu précédemment qu'un système est hyperstatique si le nombre d'inconnues de liaison est supérieur au nombre d'équations issues de la statique. Cette différence est appelée le degré d'hyperstaticité du système.

Pour étudier et analyser une structure de degré d'hyperstaticité d, il est nécessaire d'établir équations supplémentaires (dites équations de compatibilités). Les méthodes consistent à choisir un système de base à partir duquel on détermine le système isostatique (SI) le plus simple (Figure 4.1).

En raison de l'interdépendance entre les efforts et les déplacements, il en résulte deux manières d'aborder le calcul des structures hyperstatiques, c'est-à-dire :

- soit en s'intéressant aux efforts dans les liaisons surabondantes (méthode des forces),
- soit en s'intéressant aux déplacements (méthode des déplacements).

4.1. Méthode des forces

La méthode des forces s'applique aux structures hyperstatiques lorsque les liaisons sont rigides et parfaites. Elle est basée sur le choix d'un système de base qui permet d'identifier les réactions surabondantes et aussi le principe de superposition du système isostatique simple avec les charges réelles et des systèmes virtuels avec une charge unitaire.

4.2. Principe de la méthode des forces

Le principe de cette méthode consiste à remplacer la structure hyperstatique en une structure isostatique équivalente c'est-à-dire que les liaisons surabondantes sont remplacées par des réactions inconnues qu'il faut calculer.
Pour la même structure il y a plusieurs choix du système de base (Exemple, Figure 4.1).

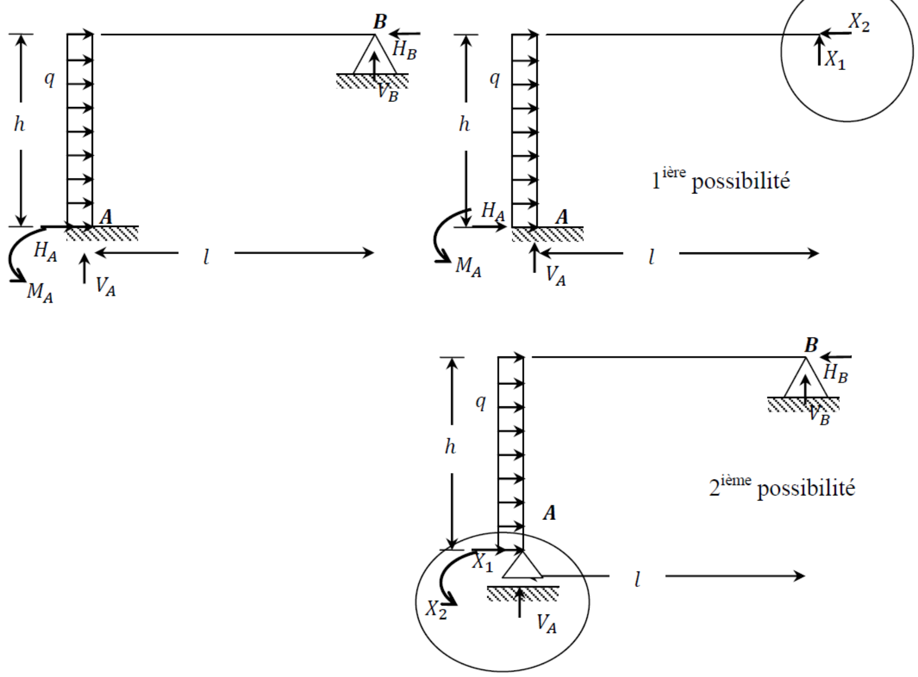


Figure 4.1. : La structure initiale est transformée en une structure isostatique équivalente soumise aux charges extérieures et aux réactions choisies (les inconnues et

Le système isostatique obtenu par suppression des liaisons surabondantes est désigné par :

- Système de base,
- Système fondamental,
- Système principal.

La structure isostatique équivalente est soumise à deux catégories de forces :

- Forces extérieures de départ (les charges réparties, concentrées, …).
- Réactions introduites (les inconnues hyperstatiques).

4.3. Degré d'hyperstaticité :

Le degré d'hyperstaticité représente le nombre d'équations supplémentaires qu'il faut pour calculer toutes les réactions du système.
On peut calculer d à l'aide de la formule des contours :

$$d = 3c - a - 2s \qquad (4.1)$$

4.4. Système de base :

Le système de base est le système isostatique obtenu par suppression des liaisons surabondantes dont les actions sont remplacées par des forces inconnues. D'une façon générale, pour une structure hyperstatique donnée, on peut choisir plusieurs systèmes isostatiques de base.

4.5. Différentes possibilités des systèmes de base

Différentes possibilités de systèmes de bases d'une même structure plane hyperstatique (Figure 3.2.) sont présentées.

$$d = 3c - a - 2s = 3 \times 2 - 2 - 2 \times 0 =$$

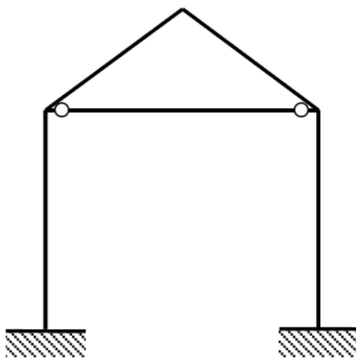


Figure 4.2. : Exemple de structure hyperstatique

1ière possibilité :

- En effet, on peut rendre isostatique la structure de la Figure suivante en libérant totalement l'encastrement au pied du poteau gauche et en sectionnant le tirant (élément entre les 2 rotules) ; les inconnues hyperstatiques sont alors : le moment d'encastrement X_1 , les réactions respectivement verticale X_2et horizontale X_3au pied du poteau gauche et l'effort normal X_4 dans le tirant.

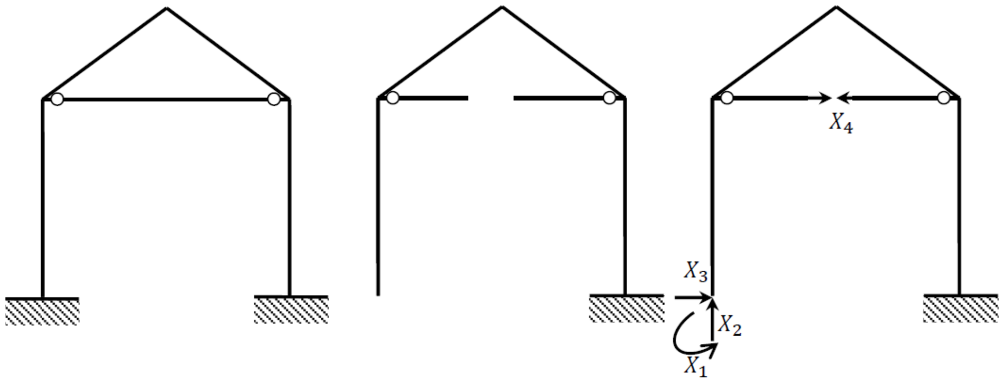


Figure 4.2.a : Type poutre sur appuis simple

2ième possibilité :

- Une deuxième manière est de libérer la rotation et la translation horizontale au niveau de l'encastrement gauche (X_1 (moment) et X_3 (réaction)), aussi de libérer la rotation au niveau de l'encastrement de droite X_2 (moment) et enfin de sectionner le tirant pour faire apparaitre l'inconnu X_4 (l'effort normal).

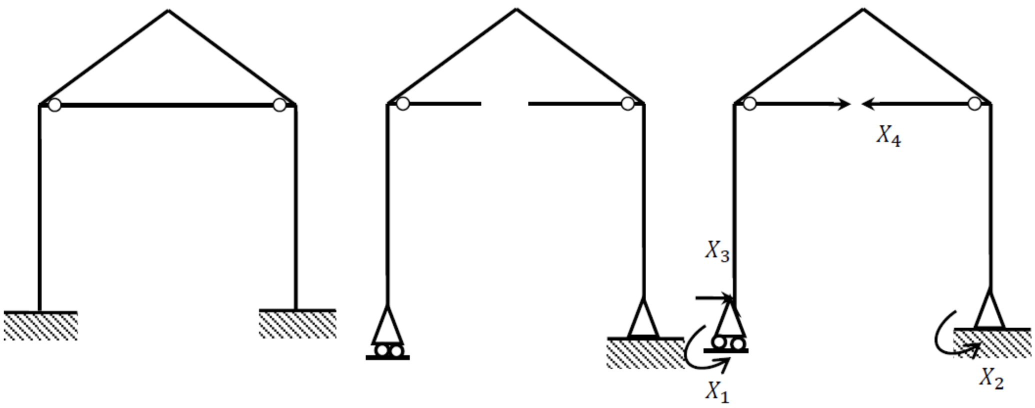
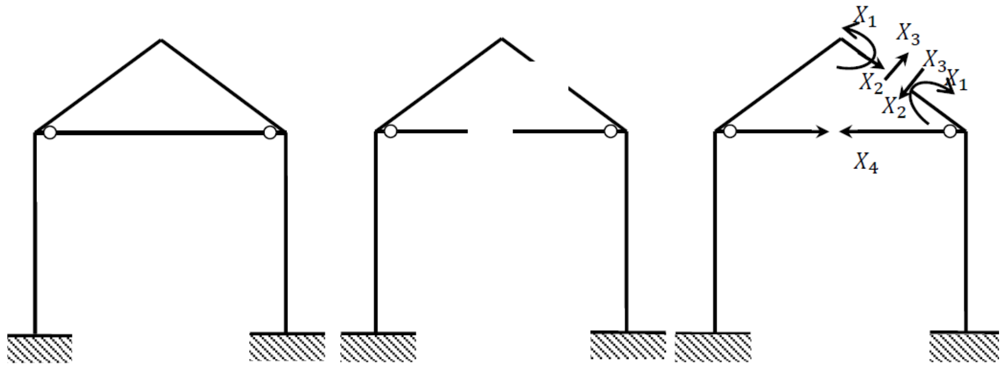


Figure 4.2.b : Type poutre cantilever

3ième possibilité :

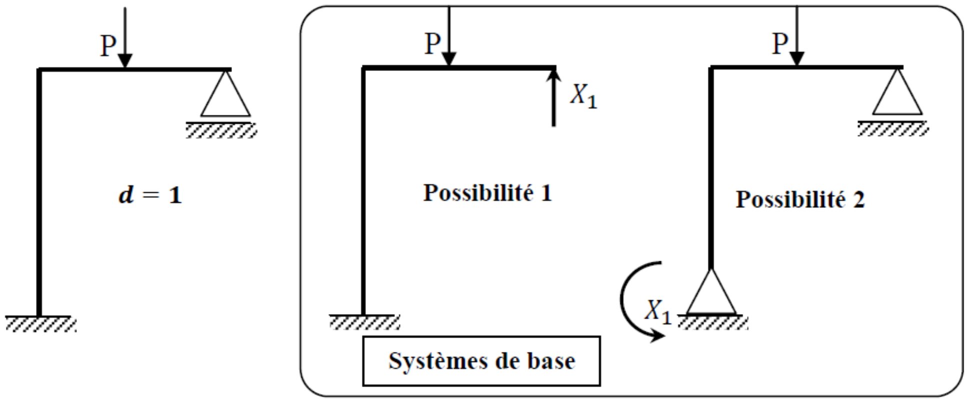
- On pourrait aussi choisir les inconnues $X_1 X_2 et\ \ X_3$respectivement le moment interne, l'effort normal et l'effort tranchant de l'élément indiqué sur la figure ci-dessous et toujours en gardant X_4comme inconnu (l'effort normal de tirant) (Figure 4.2.c).



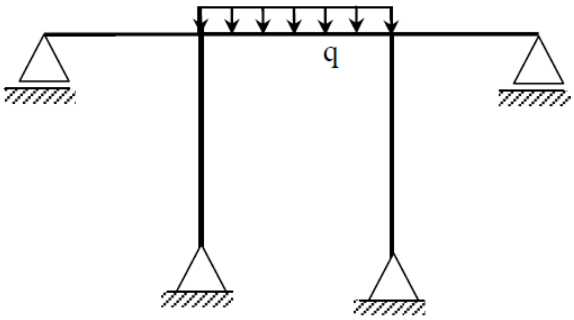
4.6. Exemples :

Calculer le degré d'hyperstaticité et représenter les différents systèmes de base :

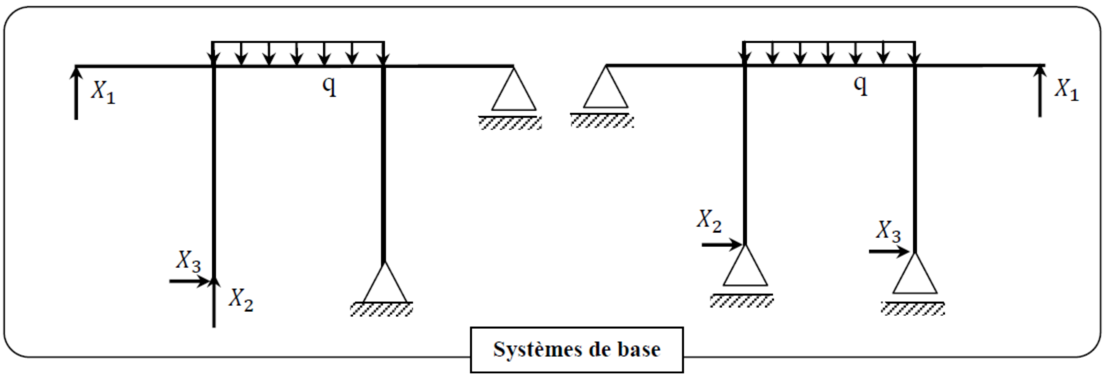
a)



b)



$$d = 3c - a - 2s = 3 * 3 - 2 - 2 * 2 = 3$$



4.7. Equations canoniques :

Dans le paragraphe précédent nous avons noté que pour une structure hyperstatique, il faut utiliser en plus des trois équations d'équilibre, des équations supplémentaires. Dans la méthode des forces, ces équations sont connues sous le nom des équations "canoniques" de la méthode des forces.
Le système d'équations canoniques aux inconnues hyperstatiques constitue l'élément de base de la méthode des forces. Il permet de calculer les inconnues $X_1, X_2, X_3, \dots, X_n$.
Etant donné une structure n fois hyperstatique, soumis à des forces extérieures. Les équations canoniques de la méthode des forces s'écrivent sous la forme matricielle :

$$\sum_{i=1}^{n} X_i \delta_{ji}^{u} + \delta_{jF} = 0, \qquad j = 1, 2, \dots, n \tag{4.2}$$

Ou sous forme la forme analytique suivante :

$$\begin{cases} \delta_{11}^{u} X_1 + \delta_{12}^{u} X_2 + \dots + \delta_{1n}^{u} X_n + \delta_{1F} = 0 \\ \delta_{21}^{u} X_1 + \delta_{22}^{u} X_2 + \dots + \delta_{2n}^{u} X_n + \delta_{2F} = 0 \\ \dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots \\ \delta_{n1}^{u} X_1 + \delta_{n2}^{u} X_2 + \dots + \delta_{nn}^{u} X_n + \delta_{nF} = 0 \end{cases} \tag{4.3}$$

Chacune de ces équations exprime la condition selon laquelle dans un système hyperstatique, le déplacement généralisé correspondant à chacune des forces généralisées superflues inconnues $X_i (i = 1,2, \dots, n)$ est égal à zéro.

- $[\delta_{ji}]$: matrice des coefficients de flexibilité.

- δ_{ji} : représente le coefficient de flexibilité c'est le déplacement produit dans la section (j) selon la direction de la force X_j causée par une force $X_i = 1$.

- δ_{jF} représente le déplacement produit dans la section (j) du système de base sous l'effet des charges appliquées (charges extérieures).

- Pour la détermination des déplacements généralisés, nous devons utiliser des intégrales de Mohr ou Veretchaguine (méthode graphique).

La signification et le calcul des coefficients δ_{ij}^{u} *et* δ_{iF} ont été exposés dans le chapitre 3 (RDM2).
Le coefficient général δ_{iF} représente le déplacement de la section i du système de base (dans la direction i, qui est aussi la direction de l'inconnue hyperstatique Xi) sous l'effet des charges appliquées (données) (F).

4.8. Evaluation des intégrales du type $\int_0^l \mathbf{m_j}\, \mathbf{m_i} \mathbf{dx}$ par l'emploi de tableaux.

En pratique, lorsqu'on analyse des poutres essentiellement fléchies, on néglige habituellement les déformations dues à l'effort tranchant et à l'effort normal sauf pour certaines constructions particulières (arcs par exemple). Toutefois, il importera de ne pas négliger les déformations dues à l'effort normal dans les barres de type treillis (tendeurs, suspentes, tirants ...) que l'on trouve fréquemment incorporés dans des assemblages de poutres. Hormis ces quelques cas particuliers, l'évaluation des coefficients δ_{ji} reposera sur les formules :

$$\begin{cases} \delta_{ij} = \delta_{ji} = \frac{1}{EI}\int_0^l m_j\, m_i dx \\ \delta_{jF} = \frac{1}{EI}\int_0^l M_F\, m_i dx \\ \delta_{jJ} = \frac{1}{EI}\int_0^l m_j\, m_J dx \end{cases} \tag{4.4}$$

Notant que les expressions des moments m_i et m_j sont toujours linaires sauf pour les expressions de M_F . Nous pouvons calculer les coefficients de flexibilité δ_{ji} à l'aide des expressions analytiques données ci-dessous, aussi par la méthode graphique de veretchaguine.
Les tableaux présentés ci-dessous permettre d'évaluer ces intégrales pour certains cas de charges extérieures.

4.9. La procédure de la méthode des forces :

Les différentes étapes de calcul par la méthode des forces sont les suivantes :

- Déterminer le degré d'hyperstaticité $d = n$.
- Ecrire les n équations canoniques.
- Choisir le système de base (système isostatique le plus simple) .
- Tracer le diagramme des moments fléchissants M_F du système isostatique due aux charges extérieures $(X_1 = X_2 = \cdots = X_n = 0)$
- Tracer les diagrammes ou épures unitaires $m_i(i = 1 \dots n)$ correspondant au système isostatique sans charges extérieures et avec $X_1 = 1$ et les autres inconnus nuls.
- On calcul tous les coefficients δ_{ji} et δ_{jF} à l'aide des diagrammes.
- Résolution du système d'équations canoniques

$$\begin{cases} \delta_{11}^u X_1 + \delta_{12}^u X_2 + \ldots + \delta_{1n}^u X_n + \delta_{1F} = 0 \\ \delta_{21}^u X_1 + \delta_{22}^u X_2 + \ldots + \delta_{2n}^u X_n + \delta_{2F} = 0 \\ \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \\ \delta_{n1}^u X_1 + \delta_{n2}^u X_2 + \ldots + \delta_{nn}^u X_n + \delta_{nF} = 0 \end{cases}$$

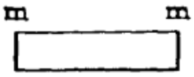
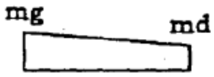
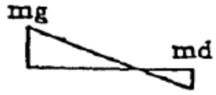
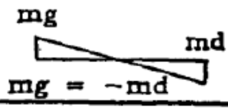
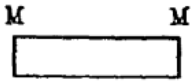
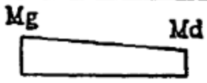
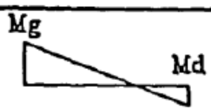
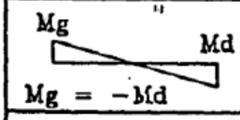
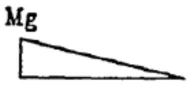
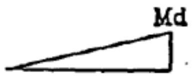
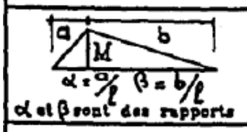
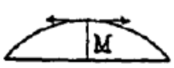
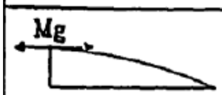
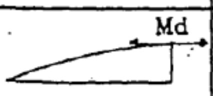
- Correction des épures unitaires $m_i^* = m_i X_i (i = 1 \dots n). m_1^* = m_1 X_1,\ m_2^* = m_2 X_2, \dots, m_n^* = m_n X_n$.
- On fait la somme des épures unitaires corrigées $\sum m_i^* = m_1^* + m_2^* + \cdots + m_n^*$
- En dernier, on obtient le diagramme des moments fléchissants final du système hyperstatique réel en faisant la somme des moments suivants $M_{final} = M_F + \sum m_i^*$

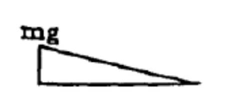
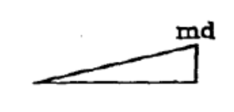
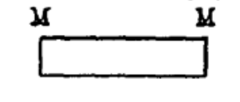
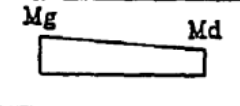
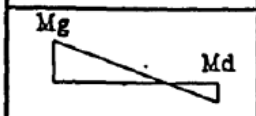
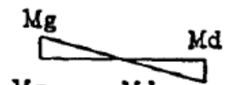
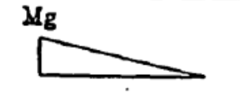
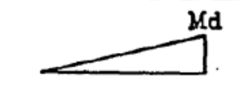
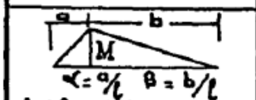
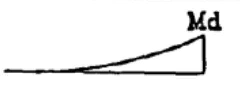
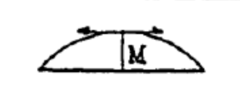
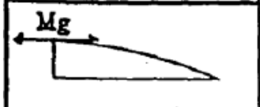
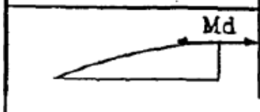
Notant que les expressions des moments m_i et m_j sont toujours linaires sauf pour les expressions de M_F . Nous pouvons calculer les coefficients de flexibilité δ_{ij} à l'aide des expressions analytiques données ci-dessous, aussi par la méthode graphique de veretchaguine.

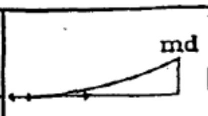
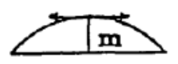
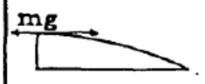
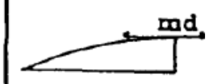
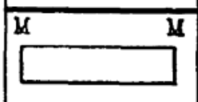
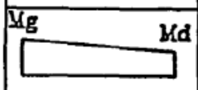
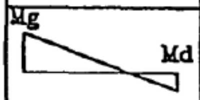
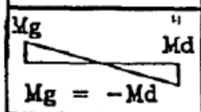
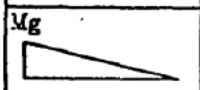
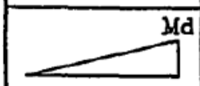
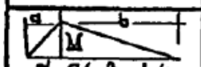
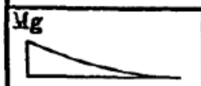
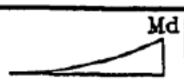
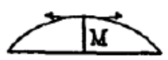
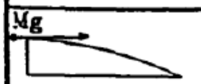
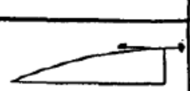
Les tableaux présentés ci-dessous permettre d'évaluer ces intégrales pour certains cas de charges extérieures.

Tableau 4.1. : Valeur de $\frac{1}{l}\int_0^l M_i\, m_j dx$

Remarque : Ne pas oublier de multiplier les résultats par $\frac{l}{EI}$

Introduire M et m avec leur SIGNE				
	M.m	1/2 M(mg+md)	1/2 M(mg+md)	0
	1/2 m(Mg+Md)	1/6(2Mgmg+Mgmd +Mdmg+2Mdmd)	1/6(2Mgmg+Mgmd +Mdmg+2Mdmd)	1/6 mg(Mg−Md)
	1/2 m(Mg+Md)	1/6(2Mgmg+Mgmd +Mdmg+2Mdmd)	1/6(2Mgmg+Mgmd +Mdmg+2Mdmd)	1/6 mg(Mg−Md)
	0	1/6 Mg(mg−md)	1/6 Mg(mg−md)	1/3 Mgmg
	1/2 Mgm	1/6 Mg(2mg+md)	1/6 Mg(2mg+md)	1/6 Mgmg
	1/2 Mdm	1/6 Md(mg+2md)	1/6 Md(mg+2md)	−1/6 Mdmg
	1/2 Mm	1/6 M[mg(1+β) +md(1+α)]	1/6 M[mg(1+β) +md(1+α)]	1/6 Mmg(1−2α)
	1/2 Mm	1/4 M(mg+md)	1/4 M(mg+md)	0
	1/3 Mgm	1/12 Mg(3mg+md)	1/12 Mg(3mg+md)	1/6 Mgmg
	1/3 Mdm	1/12 Md(mg+3md)	1/12 Md(mg+3md)	1/6 Mdmd
	2/3 Mm	1/3 M(mg+md)	1/3 M(mg+md)	0
	2/3 Mgm	1/12 Mg(5mg+3md)		1/6 Mgmg
	2/3 Mdm	1/12 Md(3mg+5md)		−1/6 Mdmg

Introduire M et m . avec leur SIGNE			 α et β sont des rapports	
	1/2 Mmg	1/2 Mmd	1/2 Mm	1/2 Mm
	1/6 mg(2Mg+Md)	1/6 md(Mg+2Md)	1/6 m[Mg(1+β) +Md((1+α)]	1/4 m(Mg+Md)
	1/6 mg(2Mg+Md)	1/6 md(Mg+2Md)	1/6 m[Mg(1+β) +Md((1+α)]	1/4 m(Mg+Md)
 Mg = −Md	1/6 Mgmg	−1/6 Mgmd	1/6 Mgm(1−2α)	0
	1/3 Mgmg	1/6 Mgmd	1/6 Mgm(1+β)	1/4 Mgm
	1/6 Mdmg	1/3 Mdmd	1/6 Mdm(1+α)	1/4 Mdm
 α et β sont des rapports	1/6 Mmg(1+β)	1/6 Mmd(1+α)	1/3 Mm	1/12 Mm(3−4α²)/β valable pour α < β
	1/4 Mmg	1/4 Mmd	1/12 Mm(3−4α²)/β valable pour α < β	1/3 Mm
	1/4 Mgmg	1/12 Mdmd	1/12 Mdm(1+β+β²)	7/48 Mgm
	1/12 Mdmg	1/4 Mdmd	1/12 Mdm(1+α+α²)	7/48 Mdm
	1/3 Mmg	1/3 Mmd	1/3 Mm(1+αβ)	5/12 Mm
	5/12 Mgmg	1/4 Mgmd	1/12 Mgm(5−α−α²)	17/48 Mgm
	1/4 Mdm	5/12 Mdmd	1/12 Mdm(5−β−β²)	17/12 Mdm

Introduire M et m avec leur SIGNE					
	1/3 Mmg	1/3 Mmd	2/3 Mm	2/3 Mmg	2/3 Mmd
	1/12 mg(3Mg+Md)	1/12 md(3Md+Mg)	1/3 m(Mg+Md)	1/12 mg(5Mg+3Md)	1/12 md(3Mg+5Md)
	1/12 mg(3Mg+Md)	1/12 md(3Md+Mg)	1/3 m(Mg+Md)	1/12 mg(5Mg+3Md)	1/12 md(3Mg+5Md)
 Mg = −Md	1/6 Mgmg	1/6 Mdmd	0	1/6 Mgmg	1/6 Mdmd
	1/4 Mgmg	1/12 Mgmd	1/3 Mgm	5/12 Mgmg	1/4 Mgmd
	1/12 Mdmg	1/4 Mdmd	1/3 Mdm	1/4 Mdmg	5/12 Mdmd
 $\alpha = a/\ell$ $\beta = b/\ell$ α et β sont des rapports	1/12 Mmg$(1+\beta+\beta^2)$	1/12 Mmd$(1+\alpha+\alpha^2)$	1/3 Mm$(1+\alpha\beta)$	1/12 Mmg$(5-\alpha-\alpha^2)$	1/12 Mmd$(5-\beta-\beta^2)$
	7/48 Mmg	7/48 Mmd	5/12 Mm	17/48 Mmg	17/48 Mmd
	1/5 Mgm	1/30 Mgmd	1/5 Mgm	3/10 Mgmg	2/15 Mgmd
	1/30 Mdmg	1/5 Mdmd	1/5 Mdm	2/15 Mdmg	3/10 Mdmd
	1/5 Mmg	1/5 Mmd	8/15 Mm	7/15 Mmg	7/15 Mmd
	3/10 Mgm	2/15 Mgmd	7/15 Mgm	8/15 Mgmg	11/30 Mgmd
	2/15 Mdmg	3/10 Mdmd	7/15 Mdm	11/30 Mdmg	8/15 Mdmd

Introduire M et m avec leur SIGNE	$\frac{1}{l}\int M^2.dx$	mg, md, -mt, mo, l/2, l/2: $m_o = m_t + \frac{m_g+m_d}{2}$; mg, md, mt, mo, l/2, l/2: $m_o = m_t - \frac{m_g+m_d}{2}$
M M	M^2	1/6 M(mg+4mt+md)
Mg Md M l/2	$1/3(Mg^2+MgMd+Md^2)$	1/6 (Mgmg+4Mmt+Mdmd)
Mg M Md l/2	$1/3(Mg^2+MgMd+Md^2)$	1/6 (Mgmg+4Mmt+Mdmd)
Mg Md Mg = −Md	$1/3\ Mg^2$	1/6 Mg(mg−md)
Mg	$1/3\ Mg^2$	1/6 Mg(mg+2mt)
Md	$1/3\ Md^2$	1/6 Md(2mt+md)
a b M $\alpha = a/l$ $\beta = b/l$ α et β sont des rapports	$1/3\ M^2$	$\frac{M}{6}\left[-2m_o(1+\alpha+\alpha^2)+(4m_o-m_g+m_d)(1+\alpha)+3m_g\right]$
M	$1/3\ M^2$	1/24 M(mg+10mt+md)
Mg	$1/5\ Mg^2$	1/60 Mg[5(3mg+md)+12mo]
Md	$1/5\ Md^2$	1/60 Md[5(mg+3md)+12mo]
M	$8/15\ M^2$	1/15 M[5(mg+md)+8mo]
Mg	$8/15\ Mg^2$	1/60 Mg[5(5mg+3md)+28mo] ou 1/60 Mg(11mg+md+28mt)

4.10 Exemples d'application

Soit à résoudre le portique de la figure 4.2. Pour les calculs, on considère *h=l=a*.

Les équations canoniques du système s'écrivent :

$$\delta_{11}^{u} X_1 + \delta_{12}^{u} X_2 + \delta_{1F} = 0$$
$$\delta_{21}^{u} X_1 + \delta_{22}^{u} X_2 + \delta_{2F} = 0$$

Les coefficients δ_{11}^{u} et δ_{21}^{u} sont obtenus en appliquant au système de base la sollicitation unitaire $X_1=1$ tandis que δ_{12}^{u} et δ_{22}^{u} s'obtiennent sous l'effet de la seule sollicitation $X_2=1$. Quant aux déplacements δ_{1F} et δ_{2F}, ils se calculent sous l'effet des charges extérieures (ici la force *P*) appliquées au système isostatique de base. Les diagrammes permettant le calcul de

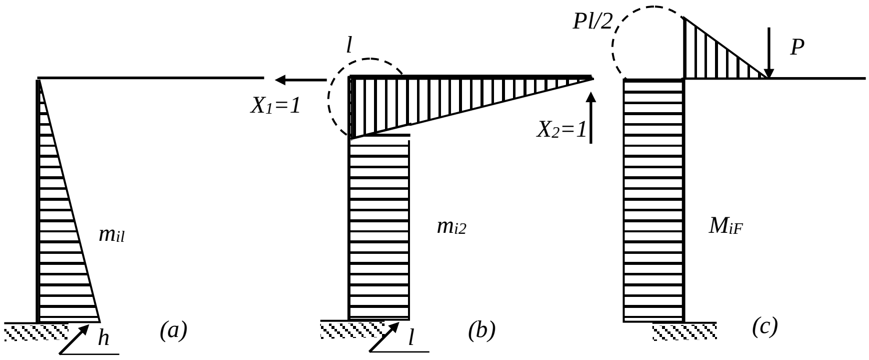


Figure 4.3 : Diagrammes des moments *M* et *m*

ces coefficients (cas où l'influence de *M* est prépondérante) sont montrés à la figure 4.3.

On trouve, avec *h=l=a* :

$$\delta_{11}^{u} = \frac{a^3}{3EI} \qquad \delta_{12}^{u} = \delta_{21}^{u} = \frac{a^3}{2EI} \qquad \delta_{22}^{u} = \frac{4a^3}{3EI} \qquad \delta_{1F} = -\frac{Pa^3}{4EI} \qquad \delta_{2F} = -\frac{29Pa^3}{48EI}$$

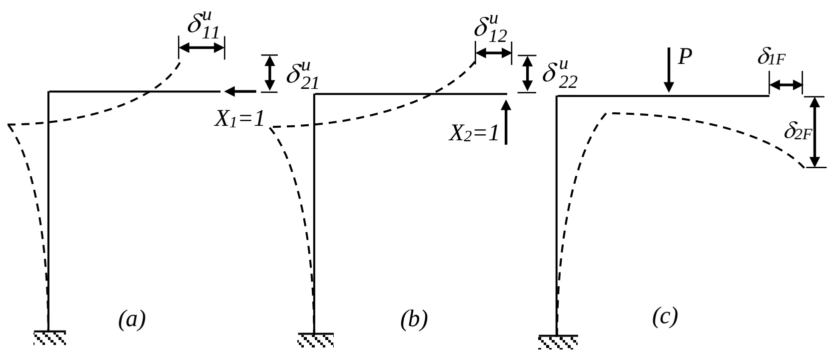


Figure 4.4 : Signification des coefficients δ

La figure 4.4 montre la signification de ces coefficients.

Et à partir des équations du système on tire :

$$X_1 = \frac{9}{56} P \text{ et } X_2 = \frac{22}{56} P$$

Les diagrammes *M*, *N*, *T* peuvent être construits maintenant (Figure 4.5).

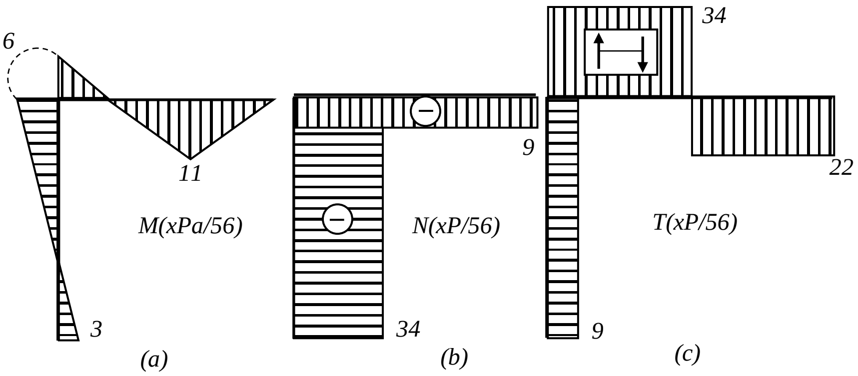


Figure 4.5 : Diagrammes *M, N, T*