Centre Universitaire de Mila
Département de Mathématiques et Informatique
3ème année Licence Mathématiques
Module : Transformations intégrales dans les espaces Lp

Série de TD N°1

2021-2022

Exercice 1 :

1. Montrer l'inégalité de Holder pour $p, q \in]1, +\infty[$.
2. Cette inégalité est-elle vraie pour $p = 1$ et $q = +\infty$?
3. Montrer l'inégalité de Minkouvski.

Exercice 2 :

1. Montrer que si $f \in L^p$, $g \in L^q$ avec $\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = \frac{1}{r}$, alors $fg \in L^r$ et
$$\|fg\|_r \leq \|f\|_p \|g\|_q.$$
2. Soient p et q dans $[1, +\infty]$ avec $q < p$ (pas nécessairement conjugués). Montrer que si $f \in L^p \cap L^q$, alors $f \in L^r$ pour tout $r \in [q, p]$, et on a :
$$\|f\|_r \leq \|f\|_q^\alpha \|f\|_p^{1-\alpha},$$
ou $\alpha \in [0, 1]$ est définit par $\frac{1}{r} = \frac{\alpha}{q} + \frac{1-\alpha}{p}$.
3. Montrer que si μ est une mesure finie alors
$$L^\infty \subset \bigcap_{p \geq 1} L^p,$$
et pour tout f
$$\lim_{p \to \infty} \|f\|_p = \|f\|_\infty.$$

Exercice 3 : Considérons l'espace mesuré $(\mathbb{R}, \mathcal{B}(\mathbb{R}), \lambda)$.

1. Soit $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ une fonction définie par
$$f(x) = \begin{cases} \frac{1}{x+1}, & si\ x \in [0, +\infty[, \\ \\ 0, & sinon. \end{cases}$$
Montrer que $f \in L^p$ pour $p > 1$ et que $f \notin L^1$.

2. Soit

$$\begin{array}{rcl} f:\mathbb{R} & \to & \mathbb{R} \\ x & \mapsto & f(x) = \mathbb{I}_{[-1,1]} * \mid x \mid^{-\alpha} = \begin{cases} \mid x \mid^{-\alpha} & si\ x \in [-1,1] \\ 0 & sinon. \end{cases} \end{array}$$

Montrer que $f \in L^p$ ssi $\alpha p < 1$.

<u>Exercice 4 :</u> Soit f la fonction définie sur $]0,+\infty[$ par

$$f(x) = \frac{1}{x(1+|\ln x|)^2}$$

1. Montrer que $f \in L^1(]0,1])$.
2. Soit $p \in]1,+\infty]$. Montrer que $f \notin L^p(]0,1])$.
3. Soit $p \in [1,+\infty]$. Montrer que $f \in L^p([1,+\infty[)$.

<u>Exercice 5 :</u>(Produit $L^p - L^q$)

Soit $(E,\sum,\mu)$ un espace mesuré, $p \in [1,+\infty[$ et q le conjugué de p. Soient

$$(f_n)_{n\in\mathbb{N}} \subset L^p,\ (g_n)_{n\in\mathbb{N}} \subset L^q,\ f \in L^p\, et\, g \in L^q$$

tels que

$$f_n \to f\ dans\ L^p\ et\ g_n \to g\, dans\ L^q.$$

Montrer que

$$\int f_n\, g_n\, d\mu \to \int f\, g\, d\mu.$$