Chapitre 4

Fonctions d'une variable réelle

4.1 Limite et continuité

Définition 4.1.1 *Soient A une partie de $\mathbb{R}$ et $f : A \to \mathbb{R}$ une fonction.*

On appelle A le domaine de définition *de la fonction f.*

On dit que f est
- minorée *s'il existe $m \in \mathbb{R}$ tel que pour tout $x \in A$ on a $f(x) \geq m$.*
- majorée *s'il existe $M \in \mathbb{R}$ tel que pour tout $x \in A$ on a $f(x) \leq M$.*
- bornée *si f est majorée et minorée.*

Si f est majorée, on appelle borne supérieure *de f le nombre réel*

$$\sup_A f = \sup\{f(x) \mid x \in A\}.$$

On définit de même la borne inférieure.

On dit que f admet un maximum *en $a \in A$ si $f(a)$ est le maximum de la partie $f(A) = \{f(x) \mid x \in A\}$.*

On dit que f admet un maximum local *en $a \in A$ s'il existe un intervalle ouvert I contenant a tel que $f(a)$ soit le maximum de $f(A \cap I)$.*

On définit de même la notion de minimum *et de* minimum local.

Un extremum *(local) est un maximum (local) ou un minimum (local).*

Ces définitions ne sont que des généralisations des mêmes notions vues dans le cas des suites.

Remarque.

Une fonction bornée possède toujours une borne supérieure et une borne inférieure mais pas forcément un maximum et un minimum.

Exemples.

1. Soit $f :]0,1[\to \mathbb{R}$ définie par $f(x) = x$. Alors f est bornée. On a $\sup_{]0,1[} f = 1$, mais $\max_{]0,1[} f$ n'existe pas.
   On a $\inf_{]0,1[} f = 0$, mais $\min_{]0,1[} f$ n'existe pas.
2. Une fonction peut admettre un maximum en plusieurs points. Ainsi $f(x) = \sin x$ admet un maximum en les points $x = \frac{\pi}{2} + 2k\pi$ avec $k \in \mathbb{Z}$.

Dans la suite on prendra comme domaine de définition A des intervalles de la forme
- $A =]x, y[$, $[x, y[$, $]x, y]$, ou $[x, y]$ avec $x < y$. On notera alors $\overline{A} = [x, y]$.
- $A =]-\infty, x]$ ou $]-\infty, x[$. On notera alors $\overline{A} =]-\infty, x]$.

– $A = [x, +\infty[$ ou $]x, +\infty[$. On notera alors $\overline{A} = [x, +\infty[$.
– $A =]-\infty, +\infty[$ alors $\overline{A} =]-\infty, +\infty[$.
On dit que $\overline{A}$ est l'adhérence de A.

On généralise la notion de limite d'une suite (u_n) quand n tend vers $+\infty$ à la limite d'une fonction $f(x)$ quand x tend vers a.

Définition 4.1.2 (limite d'une fonction) *Soient A un intervalle et $\overline{A}$ son adhérence. Soient $f : A \to \mathbb{R}$ une fonction et $a \in \overline{A}$.*

1. *On dit que f admet ℓ comme limite en a si*
$$\forall \varepsilon > 0 \quad \exists \alpha > 0 \text{ tel que } \forall x \in A, |x - a| < \alpha \Rightarrow |f(x) - \ell| < \varepsilon$$
On note $\lim_{x\to a} f(x) = \ell$.
2. *On dit que $f(x)$ tend vers $+\infty$ quand x tend vers a si*
$$\forall K \in \mathbf{R} \quad \exists \alpha > 0 \text{ tel que } \forall x \in A, |x - a| < \alpha \Rightarrow f(x) > K$$
On note $\lim_{x\to a} f(x) = +\infty$.
3. *On dit que f admet ℓ comme limite quand x tend vers $+\infty$ si*
$$\forall \varepsilon > 0 \quad \exists K \text{ tel que } \forall x \in A, x > K \Rightarrow |f(x) - \ell| < \varepsilon$$
On note $\lim_{x\to+\infty} f(x) = \ell$.
4. *On dit que f tend vers $+\infty$ quand x tend vers $+\infty$ si*
$$\forall K \quad \exists M \text{ tel que } \forall x \in A, x > M \Rightarrow f(x) > K$$
On note $\lim_{x\to+\infty} f(x) = +\infty$

On définit de même $\lim_{x\to\pm\infty} f(x) = -\infty$ et $\lim_{x\to a} f(x) = -\infty$.

Exemples.

1. Soient $A =]0, 1[$, $a = 1 \in \overline{A}$ et $f(x) = x$. Alors $\lim_{x\to 1} f(x) = 1$.
2. Soient $A =]0, 1[$, $a = 0 \in \overline{A}$ et $f(x) = \frac{\sin x}{x}$. Alors $\lim_{x\to 0} f(x) = 1$.
3. Soient $A =]0, 1[$, $a = 0 \in \overline{A}$ et $f(x) = \frac{1}{x}$. Alors $\lim_{x\to 0} f(x) = +\infty$.
4. Soient $A =]-\infty, +\infty[$ et $f(x) = e^{-x}$. Alors $\lim_{x\to+\infty} f(x) = 0$.
5. Soient $A =]-\infty, +\infty[$ et $f(x) = x$. Alors $\lim_{x\to+\infty} f(x) = +\infty$.

Proposition 4.1.1 *Si f admet une limite en a, cette limite est unique.*

Démonstration. La démonstration est identique à celle donnée pour les suites. On procède par l'absurde en supposant que f admet deux limites ℓ et ℓ' avec $\ell < \ell'$ en a. On prend $\varepsilon = \frac{\ell'-\ell}{2}$. Il existe alors $\alpha > 0$ tel que $|x - a| < \alpha$ implique que $|f(x) - \ell| < \varepsilon$ et $\alpha' > 0$ tel que $|x - a| < \alpha'$ implique que $|f(x) - \ell'| < \varepsilon$. On a $\ell' - \ell = |\ell' - f(x) + f(x) - \ell| \leq |\ell' - f(x)| + |f(x) - \ell|$ par l'inégalité triangulaire. Si $|x - a| < \min(\alpha, \alpha')$, on obtient $\ell' - \ell < 2\frac{\ell'-\ell}{2}$, ce qui est absurde. ∎

Définition 4.1.3 (continuité) *Soient $f : A \to \mathbb{R}$ une fonction et $a \in A$. On dit que f est* continue *en a si f admet $f(a)$ comme limite en a. Autrement dit*
$$\forall \varepsilon > 0 \quad \exists \alpha > 0 \text{ tel que } \forall x \in A, |x - a| < \alpha \Rightarrow |f(x) - f(a)| < \varepsilon.$$

On dit que f est continue sur *a si f est continue en tout point de a.*

Exemples.

1. Les fonctions exponentielles et trigonométriques sont continues sur leurs domaines de définition.
2. Soit $E(x)$ le plus grand entier $\leq x$. C'est la partie entière de x. On montre que la fonction $E : \mathbb{R} \to \mathbb{Z} \subset \mathbb{R}$ est continue sur $\mathbb{R} \setminus \mathbb{Z}$.

Définition 4.1.4 (Prolongement par continuité) *Soient $f : A \to \mathbb{R}$ une fonction continue et $g : B \to \mathbb{R}$ avec $A \subset B$. On dit que g est un* prolongement par continuité *de f si*

1. *g est un prolongement de f (c'est-à-dire que $g(x) = f(x)$ pour tout $x \in A$).*
2. *g est continue en tout point de B.*

Exemple.

Prenons $A =]0, 1]$ et $B = [0, 1]$. Soit $f(x) = \frac{\sin x}{x}$. Alors la fonction g définie par :

$$g(x) = \begin{cases} 1 & \text{si } x = 0 \\ \frac{\sin x}{x} & \text{sinon} \end{cases}$$

est un prolongement par continuité de f.

4.2 Propriétés de la limite d'une fonction

Les propriétés des limites de suites se généralisent facilement au cas des fonctions.

Proposition 4.2.1 *Soient $f : A \to \mathbb{R}$ et $g : B \to \mathbb{R}$ deux fonctions.*

1. *Si f admet une limite ℓ en $a \in \mathbb{R}$, alors il existe un intervalle ouvert I contenant a tel que f soit bornée sur $A \cap I$. Si f admet une limite ℓ quand x tend vers $+\infty$ alors il existe un intervalle $I =]b, +\infty[$ tel que f soit bornée sur $A \cap I$.*
2. *Si $\lim_{x\to a} f(x) = 0$ et si g est bornée sur un intervalle ouvert contenant a alors $\lim_{x\to a} f(x)g(x) = 0$.*
3. *Si f et g ont une limite dans $\mathbb{R}$ quand x tend vers a, alors*

$$\lim_{x\to a}(f(x) + g(x)) = \lim_{x\to a} f(x) + \lim_{x\to a} g(x)$$

et

$$\lim_{x\to a}(f(x)g(x)) = (\lim_{x\to a} f(x))(\lim_{x\to a} g(x))$$

4. *Si f ne s'annule pas sur A, et*
   (a) *si $\lim_{x\to a} f(x) = \ell \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$, alors*

$$\lim_{x\to a} \frac{1}{f(x)} = \frac{1}{\ell}$$

   (b) *si $\lim_{x\to a} |f(x)| = +\infty$, alors*

$$\lim_{x\to a} \frac{1}{f(x)} = 0$$

   (c) *si $\lim_{x\to a} f(x) = 0$ et si $f(x) \geq 0$ sur un intervalle ouvert contenant a, alors*

$$\lim_{x\to a} \frac{1}{f(x)} = +\infty.$$

5. *Si* $f(x) \leq g(x)$ *sur un intervalle ouvert contenant* a *alors*
$$\lim_{x\to a} f(x) \leq \lim_{x\to a} g(x).$$
6. **(gendarmes)** *Si* $f(x) \leq g(x) \leq h(x)$ *sur un intervalle ouvert contenant* a *et si* $\lim_{x\to a} f(x) = \lim_{x\to a} h(x) = \ell$ *alors* $\lim_{x\to a} g(x) = \ell$.

Démonstration. Les démonstrations sont les mêmes que dans le cas des suites. Démontrons par exemple le théorème des gendarmes. Fixons $\varepsilon > 0$. Alors il existe $\alpha > 0$ tel que $|x-a| < \alpha$ implique $|f(x) - \ell| < \varepsilon$, d'où $\ell - \varepsilon < f(x)$. De même il existe $\alpha' > 0$ tel que $|x-a| < \alpha'$ implique $|h(x) - \ell| < \varepsilon$, d'où $h(x) < \ell + \varepsilon$. Donc si $|x-a| < \min(\alpha, \alpha')$ alors $\ell - \varepsilon < g(x) < \ell + \varepsilon$. ∎

Proposition 4.2.2 (Composée de deux fonctions continues) *Soient deux fonctions* $f : A \to \mathbb{R}$ *et* $g : B \to \mathbb{R}$ *avec* $f(A) \subset B$. *Si* f *est continue en* $a \in A$ *et si* g *est continue en* $b = f(a) \in B$, *alors la composée* $g \circ f$ *est continue en* a.

Démonstration. Fixons $\varepsilon > 0$. On veut $|g(f(x)) - g(f(a))| < \varepsilon$. Comme g est continue en $b = f(a)$ il existe $\alpha > 0$ tel que $|f(x) - f(a)| < \alpha$ implique $|g(f(x)) - g(b)| < \varepsilon$. Comme f est continue en a il existe $\beta > 0$ tel que $|x - a| < \beta$ implique $|f(x) - f(a)| < \alpha$. ∎

Proposition 4.2.3 (Critère séquentiel de continuité) *Soient une fonction* $f : A \to \mathbb{R}$ *et* $a \in A$. *Alors les propriétés suivantes sont équivalentes.*

1. f *est continue en* a.
2. *pour toute suite* (u_n) *à valeurs dans* A *telle que* $\lim_{n\to+\infty} u_n = a$ *on a* $\lim_{n\to+\infty} f(u_n) = f(a)$.

Démonstration. Supposons f continue en a. Fixons $\varepsilon > 0$. Alors il existe $\alpha > 0$ tel que $|x - a| < \alpha$ implique $|f(x) - f(a)| < \varepsilon$.

Comme (u_n) tend vers a, il existe un entier N tel que si $n \geq N$ alors $|u_n - a| < \alpha$. Mais alors $|f(u_n) - f(a)| < \varepsilon$. Donc la suite $(f(u_n))$ a pour limite $f(a)$.

Pour montrer la réciproque, nous allons prouver la contraposée : en supposant que f n'est pas continue en a il s'agit de trouver une suite (u_n) qui converge vers a et telle que $\lim_{n\to+\infty} f(u_n) \neq f(a)$.

Dire que f n'est pas continue en a est la négation de $\lim_{x\to a} f(x) = f(a)$, c'est-à-dire
$$\text{non}(\forall \varepsilon > 0, \exists \alpha > 0, \forall x \in A \cap]a-\alpha, a+\alpha[\quad |f(x) - f(a)| < \varepsilon)$$
qui équivaut à
$$(*) \qquad \exists \varepsilon > 0, \forall \alpha > 0, \exists x \in A \cap]a-\alpha, a+\alpha[\quad |f(x) - f(a)| \geq \varepsilon.$$

On a le droit de choisir α. Prenons par exemple $\alpha = \frac{1}{2^n}$ avec $n \in \mathbb{N}$. La relation $(*)$ implique alors qu'il existe $u_n \in A \cap]a-\alpha, a+\alpha[$ tel que $|f(u_n) - f(a)| \geq \varepsilon$.

Alors $|u_n - a| < \frac{1}{2^n}$, donc (u_n) tend vers a et comme $|f(u_n) - f(a)| \geq \varepsilon$ la suite $(f(u_n))$ ne tend pas vers $f(a)$. ∎

4.3 Propriétés des fonctions continues

Théorème 4.3.1 (théorème des valeurs intermédiaires)
Soit $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ *une fonction continue telle que* $f(a) \leq f(b)$. *Alors pour tout* $y \in [f(a), f(b)]$ *il existe* $x \in [a, b]$ *tel que*
$$f(x) = y.$$

Démonstration. On va définir par récurrence deux suites (a_n) et (b_n). On commence par $a_0 = a$ et $b_0 = b$. Supposons a_n et b_n construits.

Si $f(\frac{a_n+b_n}{2}) \geq y$, on pose

$$\begin{cases} a_{n+1} &= a_n \\ b_{n+1} &= \frac{a_n+b_n}{2}. \end{cases}$$

Si $f(\frac{a_n+b_n}{2}) < y$, on pose

$$\begin{cases} a_{n+1} &= \frac{a_n+b_n}{2} \\ b_{n+1} &= b_n. \end{cases}$$

On va montrer que pour tout n on a

$$(*) \qquad f(a_n) \leq y \leq f(b_n)$$

Au rang $n = 0$ la relation $(*)$ équivaut à $f(a) \leq y \leq f(b)$, qui est l'hypothèse.

Supposons que $(*)$ est vraie au rang n. On distingue deux cas.

– si $f(\frac{a_n+b_n}{2}) \geq y$ alors

$$f(a_{n+1}) = f(a_n) \leq y \leq f(\frac{a_n+b_n}{2}) = f(b_{n+1})$$

– si $f(\frac{a_n+b_n}{2}) < y$ alors

$$f(a_{n+1}) = f(\frac{a_n+b_n}{2}) < y \leq f(b_n) = f(b_{n+1})$$

D'où $(*)$ au rang $n+1$.

Par définition de a_n et de b_n on voit que $a_n \leq b_n$, que la suite (a_n) est croissante et que la suite (b_n) est décroissante. Enfin on a

$$b_{n+1} - a_{n+1} = \frac{a_n - b_n}{2} = \cdots = \frac{b-a}{2^{n+1}}.$$

Donc la suite $(b_n - a_n)$ tend vers 0.

On a donc deux suites adjacentes. D'après la proposition 3.3.1 elles convergent vers la même limite. Appelons x cette limite.

Vérifions que $x \in [a, b]$. En effet on a $a = a_0 \leq a_n \leq x \leq b_n \leq b_0 = b$.

Vérifions que $f(x) = y$. Comme f est continue sur $[a, b]$, elle est continue en x et donc $\lim_{n\to+\infty} f(a_n) = f(x)$ et $\lim_{n\to+\infty} f(b_n) = f(x)$. Mais par la propriété $(*)$ on a $f(a_n) \leq y \leq f(b_n)$. Finalement par le théorème des gendarmes (proposition 3.2.8) on obtient $f(x) = y$. ∎

Théorème 4.3.2 *Soit $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ une application continue sur un segment*[1]*. Alors f a un maximum et un minimum sur $[a, b]$.*

Démonstration. Il suffit de montrer le résultat pour le maximum (pour le minimum, on prend $-f$ à la place de f).

Montrons d'abord par l'absurde que f est majorée. Supposons que f n'est pas majorée. Cela implique que pour tout entier n il existe un réel $x \in [a, b]$ tel que $f(x) > n$. Appelons x_n cet élément. On a donc une suite (x_n) à valeurs dans le segment $[a, b]$. Par le théorème de Bolzano-Weierstrass (théorème 3.3.1), on peut extraire une sous-suite convergente (y_n) de la suite (x_n). On obtient ainsi une application strictement croissante $\varphi : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ telle que $y_n = x_{\varphi(n)}$. Donc

$$f(y_n) = f(x_{\varphi(n)}) > \varphi(n) \geq n,$$

[1]voir définition 1.2.3

ce qui implique que la suite $(f(y_n))$ tend vers $+\infty$.

Notons $\ell = \lim_{n\to+\infty} y_n$. Comme f est continue on a $\lim_{n\to+\infty} f(y_n) = f(\ell)$, ce qui contredit $\lim_{n\to+\infty} f(y_n) = +\infty$. Donc f est majorée et $\sup_{[a,b]} f$ existe.

Soit M cette borne supérieure. Il suffit alors de montrer qu'il existe $x \in [a, b]$ tel que $f(x) = M$.

Soit n un entier. Par définition de la borne supérieure, $M - \frac{1}{2^n}$ n'est pas un majorant des valeurs de f, donc il existe $x_n \in [a, b]$ tel que

$$M - \frac{1}{2^n} < f(x_n) \leq M.$$

On a donc une suite (x_n) dans $[a, b]$. Par le théorème de Bolzano-Weierstrass (théorème 3.3.1), il existe une sous-suite convergente (y_n) de (x_n) avec $y_n = x_{\varphi(n)}$ où $\varphi : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ est une application strictement croissante. Soit x la limite de la suite (y_n). On a les inégalités

$$M - \frac{1}{2^n} \leq M - \frac{1}{2^{\varphi(n)}} < f(y_n) \leq M.$$

Par le théorème des gendarmes (proposition 3.2.8) on conclut que la suite $(f(y_n))$ tend vers M.

Comme f est continue, on a aussi $\lim_{n\to+\infty} f(y_n) = f(x)$. Finalement on obtient $f(x) = M$. ∎

4.4 Fonctions dérivables

Soient $f : A \to R$ une fonction et $a \in A$.

Définition 4.4.1 *On dit que f est* dérivable *en a si la limite*

$$\lim_{x\to a} \frac{f(x) - f(a)}{x - a}$$

existe (dans $\mathbb{R}$). On note $f'(a)$ cette limite.

Exemples.

1. Soit $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ définie par $f(x) = |x|$. On vérifie facilement que f est continue sur $\mathbb{R}$. On a

$$\lim_{\substack{x\to 0\\ x>0}} \frac{f(x) - f(0)}{x - 0} = \lim_{\substack{x\to 0\\ x>0}} \frac{|x|}{x} = 1$$

et

$$\lim_{\substack{x\to 0\\ x<0}} \frac{f(x) - f(0)}{x - 0} = \lim_{\substack{x\to 0\\ x<0}} \frac{|x|}{x} = -1$$

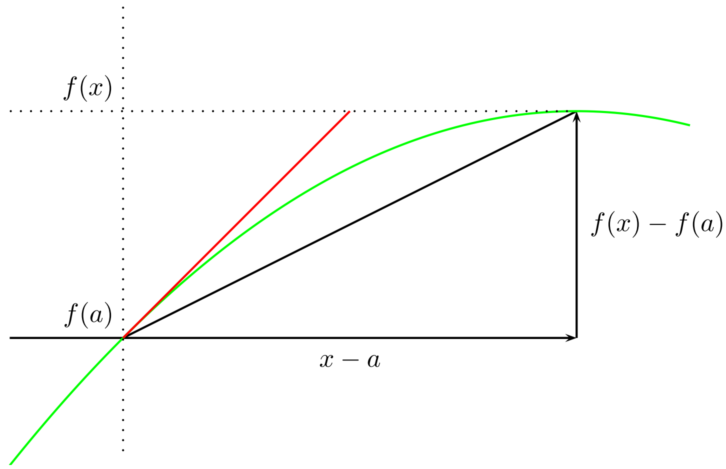
Donc f n'est pas dérivable en 0. Par contre f est dérivable en tout point $a \neq 0$.

2. Les fonctions classiques
   - trigonométriques : $\sin, \cos, \tan, \ldots$
   - polynomiales : $ax^2 + bx + c, \ldots$
   - exponentielles : e^x
   - rationnelles : $\frac{ax+b}{cx+d}, \ldots$

   sont dérivables sur leurs domaines de définition.

Interprétation géométrique.

La dérivée $f'(a)$ de f en a donne la pente de la tangente au point $(a, f(a))$ au graphe de f.



Proposition 4.4.1 *Soient $f : A \to \mathbb{R}$ et $a \in A$. Si f est dérivable en a, alors f est continue en a.*

Démonstration. Soit $\ell = \lim_{x\to a} \frac{f(x)-f(a)}{x-a}$. Comme la fonction x est continue en a, on a $\lim_{x\to a}(x-a) = 0$. D'où en utilisant la propriété des limites par rapport au produit (proposition 4.2.1(3))

$$\begin{aligned} \lim_{x\to a}(f(x) - f(a)) &= \lim_{x\to a}\left[\frac{f(x)-f(a)}{x-a}(x-a)\right] \\ &= \lim_{x\to a}\left[\frac{f(x)-f(a)}{x-a}\right]\lim_{x\to a}(x-a) = \ell.0 = 0 \end{aligned}$$

Donc $\lim_{x\to a} f(x) = f(a)$ et f est bien continue en a. ∎

Remarque.

1. La réciproque n'est pas toujours vraie, comme le prouve l'exemple $f(x) = |x|$ en $x = 0$.
2. Il existe même des fonctions continues qui ne sont dérivables en aucun point de leur domaine de définition.

Proposition 4.4.2 *Soit $f : A \to \mathbb{R}$ une fonction admettant un extremum local en a. Si f est dérivable en a, alors $f'(a) = 0$.*

Démonstration. Supposons que l'extremum est un maximum (le cas du minimum se traite en remplaçant f par $-f$). Alors par définition il existe un intervalle ouvert I contenant a tel que pour tout $x \in I \cap A$ on a $f(x) \le f(a)$.

Si $x > a$, on a $x - a > 0$ et $f(x) - f(a) \le 0$, donc $\frac{f(x)-f(a)}{x-a} \le 0$ et par passage à la limite (proposition 4.2.1(5)) on obtient $f'(a) \le 0$.

Si $x < a$, on a $x - a < 0$ et $f(x) - f(a) \le 0$, donc $\frac{f(x)-f(a)}{x-a} \ge 0$ et par passage à la limite (proposition 4.2.1(5)) on obtient $f'(a) \ge 0$.

En combinant les deux inégalités on obtient $f'(a) = 0$. ∎

Remarque.

La réciproque n'est pas toujours vraie. Si $f(x) = x^3$, on a $f'(0) = 0$, mais 0 n'est pas un extremum local.

Définition 4.4.2 (fonction dérivée) *Si $f : A \to \mathbb{R}$ est dérivable en tout point de A, alors f est dérivable sur A et on définit sa fonction dérivée f' par*

$$\begin{array}{rcl} f' : A & \to & \mathbb{R} \\ x & \mapsto & f'(x). \end{array}$$

Proposition 4.4.3 1. *Si f et g sont deux fonctions dérivables sur A, alors $f+g$ et fg sont dérivables sur A et*

$$(f+g)' = f' + g' \qquad \text{et} \qquad (fg)' = f'g + fg'.$$

2. *Si f ne s'annule pas sur A, alors $\frac{1}{f}$ est dérivable sur A et*

$$\left(\frac{1}{f}\right)' = -\frac{f'}{f^2}.$$

Démonstration. 1. Le cas de l'addition résulte facilement du résultat concernant l'addition des limites.

Pour le produit, on écrit

$$f(x)g(x) - f(a)g(a) = (f(x) - f(a))g(x) + f(a)(g(x) - g(a)).$$

On divise par $(x-a)$ et on passe à la limite quand x tend vers a ce qui donne le résultat grâce aux propriétés des limites de produit et de sommes (proposition 4.2.1). De plus on sait que $g(x)$ tend vers $g(a)$ par la continuité de g.

2. Pour l'inverse, on écrit :

$$\left(\frac{1}{f(x)} - \frac{1}{f(a)}\right)\frac{1}{x-a} = -\frac{f(x) - f(a)}{x-a}\frac{1}{f(x)}\frac{1}{f(a)}$$

qui a un sens pour $|x-a|$ assez petit.

Quand x tend vers a, $f(x)$ tend vers $f(a)$, car f est continue. On obtient alors la formule désirée. ∎

Proposition 4.4.4 (Dérivée de la composée de deux fonctions)
Soient $f : A \to \mathbb{R}$ et $g : B \to \mathbb{R}$ deux fonctions telles que $f(A) \subset B$ (pour tout $x \in A$ on a $f(x) \in B$). Si f est dérivable en $a \in A$ et g est dérivable en $f(a) \in B$, alors la composée $g \circ f : A \to \mathbb{R}$ est dérivable en a et

$$(g \circ f)'(a) = g'(f(a)).f'(a)$$

Démonstration. (simplifiée) Soit $a \in A$. Par définition de la dérivée, on a

$$(g \circ f)'(a) = \lim_{x \to a} \frac{g(f(x)) - g(f(a))}{x-a}$$

On suppose pour simplifier qu'il existe un intervalle ouvert I contenant a tel que $f(x) \neq f(a)$ pour tout $x \in (I \cap A) \setminus \{a\}$. On peut écrire alors :

$$\begin{aligned} \lim_{x \to a} \frac{g(f(x)) - g(f(a))}{x-a} &= \lim_{x \to a} \frac{g(f(x)) - g(f(a))}{f(x) - f(a)} . \frac{f(x) - f(a)}{x-a} \\ &= \lim_{x \to a} \frac{g(f(x)) - g(f(a))}{f(x) - f(a)} \lim_{x \to a} \frac{f(x) - f(a)}{x-a} \end{aligned}$$

Le premier facteur est la composée des fonctions

$$x \mapsto f(x) \text{ et } y \mapsto \frac{g(y) - g(f(a))}{y - f(a)}.$$

Comme f est continue, $f(x)$ tend vers $f(a)$. Comme g est dérivable en $f(a)$, on a

$$\lim_{y \to f(a)} \frac{g(y) - g(f(a))}{y - f(a)} = g'(f(a)).$$

En composant, on trouve

$$\lim_{x \to a} \frac{g(f(x)) - g(f(a))}{f(x) - f(a)} = g'(f(a)).$$

D'où la formule de la proposition. ∎

Proposition 4.4.5 (Dérivée de la fonction réciproque) *Soit $f : A \to B \subset \mathbb{R}$ une fonction continue. On suppose qu'il existe une fonction réciproque $g : B \to A$, c'est-à-dire que*

$$g(f(x)) = x \quad \forall x \in A \qquad \text{et} \qquad f(g(y)) = y \quad \forall y \in B.$$

Si f est dérivable en a et si $f'(a) \neq 0$, alors g est dérivable en $f(a)$ et on a

$$g'(f(a)) = \frac{1}{f'(a)}.$$

Démonstration. On admet l'existence de $g'(f(a))$. On dérive la formule $g(f(x)) = x$. En appliquant la proposition qui donne la dérivée de la composée (proposition 4.4.4) on obtient

$$1 = (g \circ f)'(a) = g'(f(a))f'(a).$$

D'où la formule de la proposition. ∎

4.5 Propriétés des fonctions dérivables

Théorème 4.5.1 (théorème de Rolle) *Soit $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ une fonction continue sur $[a, b]$ et dérivable sur $]a, b[$ telle que $f(a) = f(b)$. Alors il existe $c \in]a, b[$ tel que $f'(c) = 0$.*

Démonstration. Comme f est continue sur un segment, f admet un maximum et un minimum d'après le théorème 4.3.2. Soit $M = \max_{[a,b]} f$ et $m = \min_{[a,b]} f$.

Si $m \neq f(a)$ ou $M \neq f(a)$ il existe un $c \in]a, b[$ tel que f possède un extremum en c. On sait alors que $f'(c) = 0$ d'après la proposition 4.4.2.

Sinon on a $m = f(a) = f(b)$ et $M = f(a) = f(b)$. Donc f est constante sur $[a, b]$ et $f'(c) = 0$ pour tout $c \in]a, b[$. ∎

Théorème 4.5.2 (théorème des accroissements finis)
Soit $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ une fonction continue, dérivable sur $]a, b[$. Alors il existe $c \in]a, b[$ tel que

$$f'(c) = \frac{f(b) - f(a)}{b - a}.$$

Démonstration. On introduit la fonction auxiliaire

$$\varphi(x) = f(x) - f(a) - (x-a)\frac{f(b)-f(a)}{b-a}.$$

On a $\varphi(a) = \varphi(b) = 0$. La fonction φ est continue sur $[a, b]$ et dérivable sur $]a, b[$. D'après le théorème de Rolle (théorème 4.5.1), il existe $c \in]a, b[$ tel que $\varphi'(c) = 0$. Comme

$$\varphi'(x) = f'(x) - \frac{f(b)-f(a)}{b-a},$$

on obtient bien la formule annoncée en posant $x = c$. ∎

Proposition 4.5.1 *Soit $f : A \to \mathbb{R}$ une fonction dérivable sur l'intervalle A. Alors :*

1. *f est constante si et seulement si $f'(x) = 0$ pour tout $x \in A$.*
2. *f est croissante (resp. décroissante) si et seulement si $f'(x) \geq 0$ (resp. $f'(x) \leq 0$) pour tout $x \in A$.*
3. *Si $f'(x) > 0$ (resp. $f'(x) < 0$) pour tout $x \in A$, alors f est strictement croissante (resp. décroissante).*

Démonstration.

1. Si f est constante, sa dérivée est nulle. Réciproquement, soient $a, b \in A$ avec $a < b$. On applique le théorème des accroissements finis (théorème 4.5.2) à la fonction f sur le segment $[a, b]$: il existe un $c \in]a, b[$ tel que

$$f(b) - f(a) = f'(c)(b-a).$$

   Comme f' est nulle, on obtient $f(b) = f(a)$. Par conséquent f est constante.
2. Si f est croissante, on a $f(x) \geq f(a)$ pour $x > a$ et alors $(f(x) - f(a))/(x-a) \geq 0$. De même si $x < a$, on $f(x) \leq f(a)$ et $(f(x) - f(a))/(x-a) \geq 0$. Comme les inégalités passent à la limite, en faisant tendre x vers a on voit que $f'(a) \geq 0$.

   Réciproquement, on procède comme dans la première partie : on obtient $f(b) - f(a) = f'(c)(b-a)$. Donc $f(b) - f(a) \geq 0$ si $b > a$ et $f(b) - f(a) \leq 0$ si $b < a$. Donc f est croissante. On traite le cas f décroissante en remplaçant f par $-f$.
3. pareil que pour 2 sauf qu'on a des inégalités strictes. ∎

Remarque.

La réciproque de 3 n'est pas vraie. En effet, la fonction $f(x) = x^3$ est strictement croissante, mais sa dérivée $f'(x) = 3x^2$ s'annule en $x = 0$.

4.6 Application aux suites réelles

Théorème 4.6.1 (théorème du point fixe) *Soit $f : A \to \mathbb{R}$ une fonction dérivable. Supposons qu'il existe un* point fixe *$\ell \in A$ pour f, c'est-à-dire un point ℓ tel que*

$$f(\ell) = \ell,$$

et qu'il existe un intervalle $I = [\ell - a, \ell + a]$ et un réel $\lambda < 1$ tels que pour tout $x \in I$

$$|f'(x)| \leq \lambda.$$

Alors la suite (u_n) définie par $u_0 \in I$ et la formule de récurrence

$$u_{n+1} = f(u_n)$$

converge vers ℓ.

Démonstration. On pose $v_n = u_n - \ell$. Il suffit de montrer que (v_n) tend vers 0.

Montrons d'abord par récurrence que $u_n \in I$ pour tout n. Par hypothèse $u_0 \in I$. Supposons $u_n \in I$. Alors si l'on applique le théorème des accroissements finis (théorème 4.5.2) à la fonction f et à l'intervalle $[u_n, \ell]$ si $u_n \leq \ell$ (ou bien $[\ell, u_n]$ si $u_n > \ell$) on obtient qu'il existe $c \in]u_n, \ell[$ tel que

$$f'(c) = \frac{f(u_n) - f(\ell)}{u_n - \ell} = \frac{u_{n+1} - \ell}{u_n - \ell}.$$

La dernière égalité résulte de $f(u_n) = u_{n+1}$ et $f(\ell) = \ell$. Comme $]u_n, \ell[\subset I$ on sait que $|f'(c)| \leq \lambda < 1$. D'où

$$\frac{|v_{n+1}|}{|v_n|} \leq \lambda. \qquad (*)$$

Comme $\lambda < 1$, on obtient $|v_{n+1}| < |v_n|$, ce qui implique que $u_{n+1} \in I$.

En itérant l'inégalité $(*)$, on trouve

$$|v_{n+1}| \leq \lambda |v_n| \leq \lambda^2 |v_{n-1}| \leq \cdots \leq \lambda^{n+1} |v_0|.$$

Comme $0 \leq \lambda < 1$, la suite (λ^n) tend vers 0. Par conséquent la suite (v_n) tend aussi vers 0. ∎

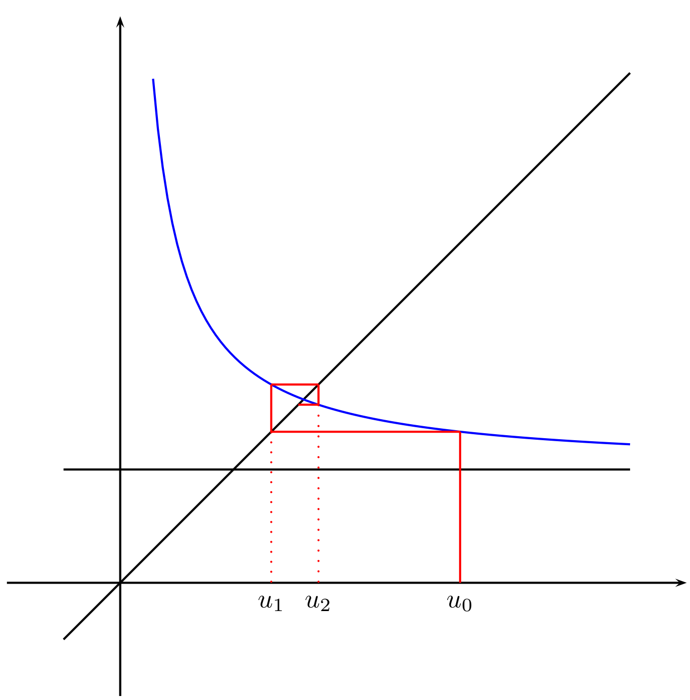
Remarque.

Si de plus la fonction dérivée f' est continue, alors la condition $|f'(\ell)| < 1$ implique l'existence d'un intervalle $I = [\ell - a, \ell + a]$ tel que pour tout $x \in I$ on a $|f'(x)| \leq \lambda < 1$.

Exemple.

Prenons $f(x) = 1 + \frac{1}{x}$. Soit $\ell = \frac{1+\sqrt{5}}{2}$ le nombre d'or, c'est-à-dire le réel positif satisfaisant l'équation $\ell^2 = \ell + 1$, qui est équivalente à $\ell = f(\ell)$. Donc l est un point fixe.

On a $f'(x) = -\frac{1}{x^2}$, donc $|f'(x)| < 1$ pour $x > 1$. Ainsi on peut prendre comme intervalle $I = [\ell - \frac{1}{2}, \ell + \frac{1}{2}]$. Le théorème du point fixe implique alors que la suite définie par $u_0 \in I$ et $u_{n+1} = 1 + \frac{1}{u_n}$ converge vers ℓ.



4.7 Exercices

Exercice 4.1. Les affirmations suivantes sont-elles vraies ? Pour chacune d'elles, écrire une démonstration ou bien trouver un contre-exemple.

1. Si $f\ :]0,+\infty[\to\mathbb{R}$ est une fonction strictement décroissante alors $\lim_{x\to+\infty} f(x)=0$.
2. Si $f:[a,b]\to\mathbb{R}$ est une fonction continue et si $f(x)\neq 0$ pour tout $x\in[a,b]$, alors il existe un réel $m>0$ tel que $f(x)\geq m$ pour tout $x\in[a,b]$ ou bien $f(x)\leq -m$ pour tout $x\in[a,b]$.
3. Il n'existe pas d'application continue bijective de $\mathbb{R}$ sur $]-1,1[$.
4. Il n'existe pas d'application continue surjective de de $\mathbb{R}$ sur $\mathbb{R}\setminus\{0\}$.
5. La fonction
$$x\mapsto \frac{1}{1-x}-\frac{1}{x}$$
définit une bijection de $]0,1[$ sur $\mathbb{R}$.
6. Il existe une application continue bijective de $[0,1[$ sur $]0,1]$.

Exercice 4.2. Soit $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ la fonction définie par $f(x)=x^5-5x+1$. Étudier les variations de f et en déduire que l'équation $x^5-5x+1=0$ a trois solutions réelles.

Exercice 4.3. Montrer que l'équation
$$x^2\cos x+x\sin x+1=0$$
admet au moins une solution dans $\mathbb{R}$.

Exercice 4.4. Soit $f:[0,\pi/2[\to\mathbb{R}$ la fonction définie par $f(x)=\tan x-x$.

1. Étudier les variations de f
2. Montrer que f définit une bijection de $[0,\pi/2[$ sur $[0,+\infty[$.
3. Soit n un entier positif ou nul. Montrer qu'il existe un unique réel $x_n\in[0,\pi/2[$ tel que $\tan x_n=x_n+n$.
4. Calculer la limite de la suite (x_n).

Exercice 4.5. Montrer que la fonction
$$x\mapsto\frac{x}{1+|x|}$$
est une bijection continue et strictement croissante de $\mathbb{R}$ sur $]-1,1[$.

Exercice 4.6. Étudier les extremums de la fonction f définie par
$$f(x)=\left(1+x+\frac{x^2}{2!}+\cdots+\frac{x^n}{n!}\right)e^{-x}$$
où n est un nombre naturel.

Exercice 4.7. Étudier les suites (u_n) qui vérifient pour tout $n>0$
$$u_n=\frac{1}{4+u_{n-1}}$$

Exercice 4.8. Calculer la fonction dérivée des fonctions suivantes :

1. $f_1 : [1, +\infty[\longrightarrow \mathbb{R}$ définie pour $x \geq 1$ par $f_1(x) = (x^2+1)\sqrt{x^3-1}$,
2. $f_2 : [0, +\infty[\longrightarrow \mathbb{R}$ définie pour $x > 0$ par $f_2(x) = \dfrac{(x-1)^3}{\sqrt{x}+1}$,
3. $f_3 : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ définie pour $x \in \mathbb{R}$ par $f_3(x) = \sqrt{\cos^2(x)+1}$,
4. $f_4 :] -\pi/2, \pi/2[\longrightarrow \mathbb{R}$ définie pour $-\pi/2 < x < \pi/2$ par
$$f_4(x) = \frac{1}{3}\tan^3(x) - \tan(x) + x,$$
5. $f_5 : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ définie pour $x \in \mathbb{R}$ par $f_5(x) = \ln(x + \sqrt{x^2+1})$.

Exercice 4.9. Pour tout entier $n \geq 1$, on définit $f_n : [0,1] \to \mathbb{R}$ par
$$f_n(x) = x^n + 2x^2 + x - 1.$$

1. Montrer que f_n est strictement croissante et qu'il existe un unique réel $x_n \in [0, 1/2[$ tel que $f_n(x_n) = 0$.
2. Montrer que pour tout $x \in [0,1]$, on $f_n(x) \geq f_{n+1}(x)$. En déduire que la suite (x_n) est convergente.
3. Montrer que la suite (x_n^n) tend vers 0. En déduire la limite de (x_n).

Exercice 4.10. Étudier la continuité, la dérivabilité et la continuité de la dérivée pour les applications de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$ suivantes :

1. $f(x) = x|x|$.
2. $$f(x) = \begin{cases} x\sin\frac{1}{x} & \text{si} \quad x \neq 0, \\ 0 & \text{si} \quad x = 0. \end{cases}$$
3. $$f(x) = \begin{cases} x^2\sin\frac{1}{x} & \text{si} \quad x \neq 0, \\ 0 & \text{si} \quad x = 0. \end{cases}$$

Exercice 4.11. Soit f une fonction réelle non négative et la fonction F définie par
$$F(x) = Cf^2(x)$$
où C est une constante telle que $C > 0$. Montrer que F et f ont les mêmes points d'extremum.

Exercice 4.12. Montrer

1. $3x < 2\sin x + \tan x \quad$ pour $\; x \in]0, \frac{\pi}{2}[$,
2. $\sin^2 x \leq \frac{4}{\pi^2}x(\pi - x), \quad$ pour $\; x \in [0, \pi]$,
3. $\frac{x}{x+1} \leq \ln(1+x) \leq x \quad$ pour $\; x \in]-1, +\infty[$.

Exercice 4.13. Pour $n \geq 2$, on définit $f_n : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ par $f_n(x) = x - \cos\dfrac{x}{n}$.

1. Montrer que f_n est strictement croissante ; en déduire qu'il existe un unique réel x_n tel que $x_n = \cos \dfrac{x_n}{n}$. Montrer que $x_n \in]0,1[$.
2. Montrer que pour tout $x \in]0,1[$, on a $\cos \dfrac{x}{n} < \cos \dfrac{x}{n+1}$. En déduire que la suite (x_n) est strictement croissante.
3. Montrer que (x_n) converge vers 1.

Exercice 4.14. Soit $f :]0,+\infty[$ la fonction définie par $f(x) = 2x \ln x - x + 1$.

1. Étudier les variations de f.
2. Calculer la limite de $f(x)$ quand x tend vers 0 et quand x tend vers $+\infty$.
3. Montrer que l'équation $f(x) = 0$ a 2 solutions et que la plus petite est dans l'intervalle $]0,1[$.

Exercice 4.15. Trouvez des intervalles sur lesquels $f(x) = x^3 - 3x + 1$ a une racine et une seule.

Exercice 4.16. Soit $f(x) = 2(x^2 - x - 1)^4 - x^2 + x$. Calculer et factorisrz $f'(x)$ sans développer f. En déduire le signe de f'. Trouver des intervalles sur lesquels $f(x) = 0$ a une racine et une seule.

Exercice 4.17. On pose

$$P_n(x) = 1 + x + \frac{x^2}{2!} + \cdots + \frac{x^n}{n!}.$$

Calculer $P_n'(x)$. Étudier l'équation $P_n(x) = 0$ pour $n \leq 4$. En déduire une hypothèse de récurrence pour les racines de $P_n(x) = 0$. Conclusion.

Exercice 4.18. Étudier l'équation $\sin x = \ln x$. On pourra étudier $f(x) = \sin x - \ln x$ sur les intervalles $]0,1]$, $[1,\pi/2]$, $[pi/2, e]$, $[e, +\infty$.

Exercice 4.19. Etudier l'équation $\cos x = \ln x$. Donner un encadrement de la (des) solution(s).

Exercice 4.20. Discuter suivant λ les solutions de $\cos 3x + 1 - 3\lambda \cos x = 0$.

Exercice 4.21. Soit f une fonction continue sur $[a,+\infty[$, dérivable sur $]a,+\infty[$, et telle que

$$f(a) = \lim_{x \to +\infty} f(x).$$

Montrez qu'il existe au moins un réel $c \in]a,+\infty[$ tel que $f'(c) = 0$.

Exercice 4.22. Peut-on appliquer le théorème de Rolle aux fonctions suivantes ? Le cas échéant, calculer le point c tel que $f'(c) = 0$.

1. $f(x) = x^2 - 2x - 3$ sur $[-1,3]$,
2. $f(x) = x^3 - x$ sur $[0,1]$,
3. $f(x) = \frac{x^2-x-6}{x-1}$ sur $[-2,3]$.

Exercice 4.23. Soit

$$f(x+h) = f(x) + hf'(x) + \cdots + \frac{h^n}{n!} f^{(n)}(x + \theta h),$$

où $0 < \theta < 1$. Soit $f^{(n+1)} \neq 0$. Montrer que

$$\lim_{h \to 0} \theta = \frac{1}{n+1}.$$

Exercice 4.24. Soit $f(x) = \cos x$.
1) Montrer que f admet un unique point fixe noté ℓ dans $[0,1]$.
2) Montrer qu'il existe $\lambda < 1$ tel que

$$\forall x \in \left[\ell - \frac{1}{2}, \ell + \frac{1}{2}\right], |f'(x)| \leq \lambda$$

3) Soit $u_0 \in [\ell - \frac{1}{2}, \ell + \frac{1}{2}]$, on construit la suite $\big(u_n\big)_{n \in \mathbb{N}}$ par récurrence : $u_{n+1} = f(u_n)$. Montrer que $\lim\limits_{n \to +\infty} u_n = \ell$.
4)Que se passe-t-il si $u_0 = 0$?

Exercice 4.25. Soit P un polynôme de degré impair, à coefficients réels. Démontrer que P admet au moins un zéro sur $\mathbb{R}$.

Exercice 4.26. Soit $f : [a, b] \to \mathbb{R}_+^*$ une fonction continue sur $[a, b]$ et dérivable sur $]a, b[$. Montrer qu'il existe $c \in]a, b[$ tel que

$$\frac{f(a)}{f(b)} = e^{(a-b)\frac{f'(c)}{f(c)}}.$$

On considèrera la fonction $g = \ln(f)$.

Exercice 4.27. Soit $f : [a, b] \to \mathbb{R}_+^*$ une fonction deux fois dérivable sur $]a, b[$. Montrer

$$\forall \alpha \in]a, b[\qquad \lim_{h \to 0} \frac{f(\alpha + h) + f(\alpha - h) - 2f(\alpha)}{h^2} = f''(\alpha).$$

Exercice 4.28. On considère la fonction f définie sur $\mathbb{R}$ par

$$f(x) = \begin{cases} e^{-\frac{1}{x}} & \text{si} \quad x > 0 \\ 0 & \text{si} \quad x \leq 0 \end{cases}$$

0) Mentionner pourquoi f est C^∞ sur $\mathbb{R}^*$ et tracer la fonction. f est-elle continue en 0 ?
1) Démontrer par récurrence sur $n \in \mathbb{N}$ la propriété

$$\forall n \in \mathbb{N} \quad \forall x \in \mathbb{R}_+^* \quad f^{(n)}(x) = e^{-\frac{1}{x}} P_n\left(\frac{1}{x}\right),$$

où P_n est un polynôme.
3) En déduire que f est C^∞ sur $\mathbb{R}$.