Résumé du chap 1 L3 S6

I opérateurs linéaires

Soient X et Y deux e.v. tous deux réels ou tous deux complexes.

I.1 Déf : Un op $A : X \longrightarrow Y$ défini sur $D(A)$ est appelé linéaire si :

1) $D(A)$ est une variété linéaire

2) $A(\lambda_1 x_1 + \lambda_2 x_2) = \lambda_1 A x_1 + \lambda_2 A x_2$, $\forall x_1, x_2 \in D(A)$, $\forall \lambda_1, \lambda_2 \in \mathbb{K}$.

I.2. Opérateur lin continu :

X et Y deux e.n. A un op. lin, $A : X \longrightarrow Y$ $(D(A) = X)$

A continu en $x_0 \in X$ si $A x \underset{x \to x_0}{\longrightarrow} x_0$

I.3. Théorème

$A : X \longrightarrow Y$; $D(A) = X$, X et Y e. de Banach.

A continu au pt $x = 0 \in X$, alors A est continu en tout pt $x_0 \in X$

I.4 : Déf : Un op lin est dit continu s'il est continu au pt 0.

I.5 : Opérateurs lin. bornés :

A un op. lin t.q. $D(A) = X$ et $R(A) \subset X$

Déf : A est borné, s'il est borné sur la boule unité.

i.e ; $\exists c > 0$, $\forall x \in X$, $\|x\| \leq 1$; $\|Ax\| \leq c$

I.6. Théorème 1 A borné ssi : $\forall x \in X$: $\|Ax\| \leq c\|x\|$.

I.7 : Théorème 2 $M \subset X$, M borné alors, l'ens $\{\|Ax\|, x \in M\}$ est borné.

I.8 Corollaire. Tout op. lin borné A, est borné sur sur toute boule $B(x_0, r)$, $\forall x_0 \in X, \forall r > 0$.

I.9. Théorème : $A : X \longrightarrow Y$; $\boxed{D(A) = X}$, X et Y de Banach.

A continu $\Leftrightarrow$ A borné.

II Convergence uniforme d'op. lin

Soit $\{A_n\}_n \in \mathcal{L}(X,Y)$. ; $A \in \mathcal{L}(X,Y)$.

$A_n \xrightarrow[n \to \infty]{} A$ uniformément si $\|A_n - A\| \xrightarrow[n \to \infty]{} 0$

II.1 Théorème 1 $A_n \xrightarrow[n \to \infty]{CV.U} A \in \mathcal{L}(X,Y)$ ssi $A_n x \xrightarrow[n \to \infty]{CV.U} Ax$

$\boxed{\forall x \in X, \|x\| \leq 1}$

Corollaire $M \subset X$, M bornée

$A_n \xrightarrow[n \to \infty]{} A$ CV. U. alors $A_n x \xrightarrow[n \to \infty]{CV.U} Ax$ par rapport à $x \in M$.

II.2. Théorème X, e.n $\longrightarrow Y$ e. de Banach.

Alors $\mathcal{L}(X,Y)$ est un e. de Banach.

II.3. Théorème $\mathcal{L}(X,Y)$ e. de Banach.

$\sum_{k=1}^{\infty} A_k$ absolument CV $\Longrightarrow$ $\sum_{k=1}^{\infty} A_k$ U. convergente.

Lemme $A_n \in \mathcal{L}(X,Y)$
$B_n \in \mathcal{L}(X,Y)$
$A, B \in \mathcal{L}(X,Y)$

si $\left.\begin{array}{l} A_n \xrightarrow[n \to \infty]{} A \\ B_n \xrightarrow[n \to \infty]{} B \end{array}\right\}$ alors $A_n B_n \xrightarrow[n \to \infty]{} AB$

Les séries dans $\mathcal{L}(X,Y)$, $\mathcal{L}(X)$

+ La série $\sum_{k=1}^{\infty} A_k$, $A_k \in \mathcal{L}(X,Y)$ est U. CV si la suite $\sum_{k=1}^{n} A_k$ est U. cv.

- La série $\sum_{k=1}^{\infty} A_k$ est absolument cv si la suite $\sum_{k=1}^{n} A_k$ est absolument cv.

Théorème $\mathcal{L}(X,Y)$ un e. de Banach. Si la série $\sum_{k=1}^{\infty} A_k$ est absolument cv alors elle est U. cv.

II.4. Convergence forte dans $\mathcal{L}(X,Y)$ ou convergence ponctuelle

Def $\{A_n\}_n \in \mathcal{L}(X,Y)$, $A \in \mathcal{L}(X,Y)$

$A_n \xrightarrow[n\to\infty]{} A$ fortement si $\forall x \in X$: $\|A_n x - Ax\| \xrightarrow[n\to\infty]{} 0$

Remarque

$A_n \xrightarrow[n\to\infty]{} A$ uniformément $\Rightarrow$ $A_n \xrightarrow[n\to\infty]{} A$ fortement.

II. Prolongement par continuité :

- 1 Théorème : $A : D(A) \subset X \longrightarrow Y$, X e.n, Y e. de Banach $R(A) \subseteq Y$

$\overline{D(A)} = X$, A borné sur $D(A)$

Alors $\exists$ un op borné $\tilde{A}$ t.q: $Au = \tilde{A}u$ $\forall u \in D(A)$

$\|\tilde{A}\| = \|A\|$

Rq: Soit $A : D(A) \subset E \longrightarrow E$, E e. de Hilbert

A borné sur $D(A)$

Alors $\exists$ $\tilde{A}$ t.q: $D(\tilde{A}) = E$

$\forall u \in D(A)$: $Au = \tilde{A}u$.

et $\|\tilde{A}\| = \|A\|$

III OPERATEURS A DOMAINE DENSE : E et F e. de Banach

Dans la suite, on considère l'op. lin n-borné A :

$A : D(A) : E \longrightarrow F \qquad \overline{D(A)} = E$

Th1 $\quad A \subset B \Rightarrow B^* \subset A^*$

Th2 $\quad A$ possède un adjoint A^* à domaine dense

donc $\quad A^{**}$ est une extension de A.

3. **Définition** $\quad G(A) = \{(x,y) \in E \times F \,/\, x \in D(A),\ y = Ax\}$.

Déf : A est fermé ssi $G(A)$ est fermé dans $E \times F$.

4. **Proposition**

A^* est fermé ($G(A^*)$ fermé dans $F' \times E'$)

Remarque $\quad A$ fermé $\Rightarrow N(A)$ fermé

Corollaire

$$A \text{ fermé} \Rightarrow \begin{cases} \cdot\ N(A) = R(A^*)^{\perp} \\ \cdot\ N(A^*) = R(A)^{\perp} \\ \cdot\ N(A)^{\perp} \supset \overline{R(A^*)} \\ \cdot\ N(A^*)^{\perp} = \overline{R(A)} \end{cases}$$

III.5 Caractérisation des ops à image fermée

Th1

$$A \text{ fermé} \Rightarrow \begin{cases} i)\ R(A) \text{ fermé} \\ \quad \Updownarrow \\ ii)\ R(A^*) \text{ fermé} \\ \quad \Updownarrow \\ iii)\ R(A) = N(A^*)^{\perp} \\ \quad \Updownarrow \\ iv)\ R(A^*) = N(A)^{\perp} \end{cases}$$

A^* fermé $\Rightarrow$

$R(A^*)$ fermé $\Updownarrow$ $R(A)$ fermé $\Updownarrow$ $R(A^*) = N(A)^{\perp}$ $\Updownarrow$ $R(A) = N(A^*)^{\perp}$

Remarque

$R(A)$ fermé $\Leftrightarrow \exists c > 0 : \quad \text{dist}(u, N(A)) \leq c\|Au\|, \ \forall u \in D(A)$

Th 2

$$A \text{ fermé} \Rightarrow \begin{cases} \cdot\ A \text{ surjectif} \\ \quad \Updownarrow \\ \cdot\ \exists c > 0,\ \|v\| \leq c\|A^* v\|,\ \forall v \in D(A^*) \\ \quad \Updownarrow \\ \cdot\ N(A^*) = \{0\} \text{ et } R(A^*) \text{ est fermé} \end{cases}$$

Th 3

$$A \text{ fermé} \Rightarrow \begin{cases} \cdot\ A^* \text{ surjectif} \\ \quad \Updownarrow \\ \cdot\ \exists c > 0 : \|u\| \leq c\|Au\|,\ \forall u \in D(A) \\ \quad \Updownarrow \\ \cdot\ N(A) = \{0\} \text{ et } R(A) \text{ est fermé} \end{cases}$$

Remarque : Si $\dim E < \infty$ ou $\dim F < \infty$

Alors A surjectif $\Leftrightarrow$ A^* injectif

A^* surjectif $\Leftrightarrow$ A injectif

Dans le cas général on a :

A surjectif $\Rightarrow$ A^* injectif

A^* surjectif $\Rightarrow$ A injectif

Th 4

$$A \text{ fermé} \Rightarrow \begin{cases} \cdot\ D(A) = E \\ \Updownarrow \\ \cdot\ A \text{ borné} \\ \Updownarrow \\ \cdot\ D(A^*) = F, \\ \Updownarrow \\ \cdot\ A^* \text{ borné} \end{cases}$$

Dans ces conditions on a : $\|A\|_{\mathcal{L}(E,F)} = \|A^*\|_{\mathcal{L}(F',E')}$

V Principe de la borne uniforme :

Théorème : Soient E un espace de Banach et F un e.v. normé. $A_i : E \to F$, $(i \in I)$ une famille d'opérateurs linéaires continus bornés fortement i.e; $\forall x \in E$, l'ensemble $\{A_i x \mid i \in I\}$ est borné en norme, Alors la famille $\{A_i\}_{i \in I}$ est bornée en norme, i.e, $\sup_{i \in I} \|A_i\| < \infty$.

- En d'autres termes :

$$\sup_{i \in I} \{A_i x\} < \infty \Rightarrow \sup_{i \in I} \|A_i\| < \infty$$

ou aussi : $\exists c > 0 : \|A_i x\| \leq c\|x\|$ $\forall x \in E, \forall i \in I$

Théorème de Banach-Steinhaus

Soit E un espace de Banach, F un e.v. normé et $A_n : E \longrightarrow F$, $(n \in \mathbb{N})$ une suite d'opérateurs linéaires continus t.que : $\forall x \in E$ il existe $\lim_{n \to \infty} A_n x = Ax \in F$.

Alors la famille $(A_n)_{n \in \mathbb{N}}$ est uniformément bornée i.e; $\sup_{n \in \mathbb{N}} \|A_n\| < \infty$ et l'opérateur A est continu.

donc

$$\begin{cases} \{A_n\} \in \mathcal{L}(E,F) \\ \lim_{n \to \infty} A_n x = Ax, \ \forall x \in E \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \sup_{n \in \mathbb{N}} \|A_n\| < \infty \\ \text{et} \\ A \in \mathcal{L}(E,F). \end{cases}$$

- **Corollaire 1 :** E, F deux e. de Banach.

$(A_n)_n$ une suite d'op. continus de E dans F. t.que :

$\forall x \in E : A_n x \xrightarrow[n \to \infty]{} Ax.$

Alors : •) $\sup_n \|A_n\|_{\mathcal{L}(E,F)} < \infty$

•) $A \in \mathcal{L}(E,F)$

•) $\|A\|_{\mathcal{L}(E,F)} \leq \liminf \|A_n\|_{\mathcal{L}(E,F)}$

- **Corollaire 2 :** G e. de Banach.

$$\begin{cases} B \subset G \\ \forall f \in G', \ f(B) = \bigcup_{x \in B} \langle f, x \rangle \text{ borné} \end{cases} \Rightarrow B \text{ borné}$$

- **Corollaire 3 :** G e. de Banach.

$$\left.\begin{array}{l} B' \subset G' \\ \forall x \in G, \text{ l'ensemble } \langle B', x \rangle = \bigcup_{f \in B'} \langle f, x \rangle \text{ borné dans } \mathbb{R} \end{array}\right\} \Rightarrow B' \text{ borné}$$

- Théorème de l'appli ouverte et du graphe fermé

I.1 **Théorème** (de l'appli ouverte).

E, F deux e. de Banach. , $T : E \longrightarrow F$, T continu et surjectif. Alors : $\exists c > 0$: $T(B_E(0,1)) \supset B_F(0,c)$

i.e. $\forall y \in F, \exists x \in E \,/\, Tx = b$ et $\|x\| \leq c\|y\|$ ($\|x\| \leq c\|Tx\|$)

Corollaire E, F deux e de Banach. $T : E \longrightarrow F$. T continu et bijectif. Alors T^{-1} est continu de F dans E.

I.2 **Théorème du graphe fermé**:

Soient E et F deux e. de Banach. $T : E \to F$. On suppose que le graphe $G(T)$ est fermé dans $E \times F$.

Alors T est continu.

* [$T : E \to F$ T continu (D(T) fermé) $\Rightarrow G(T)$ fermé dans $E \times F$] ne plus faire

$T : E \longrightarrow F$, E, F e. de Banach.

- **Théorème** 1:

si $\left.\begin{array}{l} D(T) = E \\ T \text{ borné} \end{array}\right\} \Rightarrow A$ fermé

$T : E \longrightarrow F$ E, F e. Banach.

- **Théorème** 2

$\left.\begin{array}{l} A \text{ fermé} \\ A^{-1} \text{ existe} \end{array}\right\} \Rightarrow A^{-1}$ fermé

Corollaire $\left.\begin{array}{l} A \in \mathcal{L}(E,F) \\ A^{-1} \text{ existe} \end{array}\right\} \Rightarrow A^{-1}$ fermé

VI **Adjoint d'un opérateur**

E e.v.n . $E' = \mathcal{L}(E, \mathbb{K})$

E' est muni de la norme :

$$\|f\|_{E'} = \sup_{\substack{x \in E \\ \|x\| \leq 1}} |f(x)| = \sup_{\substack{x \in E \\ \|x\| \leq 1}} f(x)$$

Si $f \in E'$, $x \in E$: on note $f(x) = \langle f, x \rangle$

$A : D(A) \subset E \longrightarrow F$, $\overline{D(A)} = E$

$A^* : D(A^*) \subset F' \longrightarrow E'$

$D(A^*) = \{ v \in F' \mid \exists c \geq 0 \; |\langle v, Au\rangle| \leq c\|u\|, \; \forall u \in D(A) \}$.

$D(A^*)$: s-e-v de F'

On a : $\langle v, Au\rangle_{F',F} = \langle A^* v, u\rangle_{E',E}$ $\forall u \in D(A)$; $\forall v \in D(A^*)$.

Remarque

$G(A)^\perp = \mathcal{J}[G(A^*)]$ t.que : $\mathcal{J} : F' \times E' \longrightarrow E' \times F'$, $[v, b] \longmapsto [b, v] = \mathcal{J}[v, b]$

Théorème : $A : D(A) \subset E \longrightarrow F$, $\overline{D(A)} = E$

Alors $\exists$ un op. lin **injectif** A^* adjoint de A

$A^* : D(A^*) \subset F' \longrightarrow R(A^*) \subset E'$

et l'égalité $\langle v, Au\rangle = \langle A^* v, u\rangle$ $\forall u \in D(A)$; $\forall v \in D(A^*)$.

II Supplémentaire topologique - Opérateurs inversibles

II.1 - Définition

E e. de Banach. $G \subset E$, G s-e-v fermé de E.

L s-e.v. de E

L suff topo de G si $\begin{cases} \text{a) } L \text{ fermé} \\ \text{b) } G \cap L = \{0\} \text{ et } G + L = E. \end{cases}$

II.2 - Théorème

E, F e. de Banach.

$T : E \longrightarrow F$, T continu et surjectif

Alors : (T admet un inverse à droite)

$\Updownarrow$

($N(T) = T^{-1}\{0\}$ admet un suff. topo dans E)

Rq $T \circ S = Id$: S est un inverse à droite de T

II.3 Théorème

E, F Banach. $T : E \longrightarrow F$

T continu et injectif

Alors : (T admet un inverse à gauche)

$\Updownarrow$

($R(T) = T(E)$ est fermé et admet un suff topo dans F)

Rq $S \circ T = Id$: S est un inverse à gauche de T

VII.4 Op. inverses dans les e.v.n. Th. de Banach.

$A : D(A) \subset E \longrightarrow R(A) \subset F$, E, F 2 e.v.

! L'op A met en bije $D(A)$ et $R(A)$ ssi $N(A) = \{0\}$.

VII.5 Théorème 2

$\left.\begin{array}{l} A^{-1} \text{ existe} \\ A^{-1} \text{ borné sur } R(A) \end{array}\right)$ ssi $\left(\forall x \in D(A),\ m > 0 : \|Ax\| \geq m\|x\|\right)$.

II.6 Définition

$A : E \longrightarrow F$. A est continûment inversible si :

- $R(A) = F$
- A inversible
- $A^{-1} \in \mathcal{L}(F, E)$

VII.7 Théorème 3

(A est continûment inversible) ssi $\left\{\begin{array}{l} R(A) = F \\ \forall x \in D(A) : \|Ax\| \geq m\|x\| \ , m > 0. \end{array}\right.$

VII.8 Théorème 4 : E, F 2 e. de Banach.

$A : E \xrightarrow{\text{bijecti}} F$

donc A^{-1} est borné.

i.e : $\left.\begin{array}{l} A \in \mathcal{L}(E, F), \\ E, F \text{ 2 Banach} \end{array}\right\} \Rightarrow$ A est continûment inversible

Rq : Si A_d^{-1} existe , $R(A) = F$: ($Ax = y$ vérifie la th d'existence)

Si A_g^{-1} existe , $N(A) = \{0\}$: ($Ax = y$ " " " d'unicité)

* Lemme 1 : $A \in \mathcal{L}(E, F)$. A admet les inverses A_d^{-1} et A_g^{-1}

Alors $\exists A^{-1}$ inverse de A t-que :

1) $A^{-1} = A_d^{-1} = A_g^{-1}$
2) $D(A^{-1}) = F$, $R(A^{-1}) = E$.
3) A_d^{-1} et A_g^{-1} sont uniques.

Lemme 2 $A \in \mathcal{L}(E,F)$

Si $\exists U \in \mathcal{L}(F,E)$ t. que :

$U.A = Id_E$ et $AU = Id_F$

Alors A est continûment inversible et $A^{-1} = U$.

VII.9 Existence de $(I-C)^{-1}$.

E e.de Banach.

I = op. identité de $\mathcal{L}(E)$.

On pose $C = I - A$; $\|I-A\| = \|A-I\| = \|C\|$

Théorème 5

Soit $C \in \mathcal{L}(E)$. t. qe $\|C\| < 1$.

L'op. $I-C$ est continûment inversible

et $\|I-C\|^{-1} \leq \frac{1}{1-\|C\|}$

de plus : $\|I-(I-C)^{-1}\| \leq \frac{\|C\|}{1-\|C\|}$