RÉVISION POUR LE RATTRAPAGE — février 2010

Exercice I - étude d'une fonction réelle de variable réelle

Étudier les variations et donner une représentation graphique de la fonction

$$\begin{aligned} f\colon \mathbb{R} &\to \mathbb{R} \\ x &\mapsto f(x) = \ln(x - x^5) \end{aligned}$$

en répondant aux questions suivantes :

1. domaine de définition
2. comportement aux extrémités du domaine de définition
3. extrema locaux, sens de variation et tableaux des variations
4. comportement en $-\infty$ (recherche d'asymptôtes)
5. graphe

Solution de l'exercice I

1. *Domaine de définition de f :* il faut $x - x^5 > 0$ donc
$$\mathscr{D}_f =]-\infty, -1[\cup]0, +1[.$$
2. *Comportement de f aux extrémités du domaine de définition :*
$$\lim_{x\to-\infty} f(x) = +\infty, \qquad \lim_{x\to-1^-} f(x) = -\infty,$$
$$\lim_{x\to 0^+} f(x) = -\infty, \qquad \lim_{x\to+1^+} f(x) = -\infty.$$
3. *Extrema locaux, sens de variation et tableaux des variations de f :* la dérivée de f est l'application
$$\begin{aligned} f'\colon \mathscr{D}_f &\to \mathbb{R} \\ x &\mapsto f'(x) = \frac{1-5x^4}{x(1-x^4)} \end{aligned}$$
Dans $\mathscr{D}_f$ on a
$$\begin{aligned} &f'(x) > 0 \text{ ssi } x \in]0; 5^{-1/4}[, \\ &f'(x) = 0 \text{ ssi } x = 5^{-1/4}, \\ &f'(x) < 0 \text{ ssi } x \in]-\infty; -1[\cup]5^{-1/4}; 1[. \end{aligned}$$
On conclut que
▷ f est strictement croissante sur $]0; 5^{-1/4}[$,
▷ f est strictement décroissante sur $]-\infty; -1[$ et sur $]5^{-1/4}; 1[$,
▷ $x_M = 5^{-1/4}$ est un point de minimum local et on a $f(x_M) < 0$.
Le tableau des variations est alors le suivant :

x	$-\infty$		-1		0		$5^{-1/4}$		+1
$f'(x)$		$-$		//////		$+$		$-$	
$f(x)$	$+\infty$	$\searrow$	$-\infty$	//////	$-\infty$	$\nearrow$	$f(x_M)$	$\searrow$	$-\infty$

4. *Comportement de f en $-\infty$ (recherche d'un asymptôte) :*
$$\lim_{x\to-\infty} \frac{f(x)}{x} = -\infty.$$
Il n'y a pas d'asymptôtes en $-\infty$.
5. *Graphe de f :* voir la figure 1.

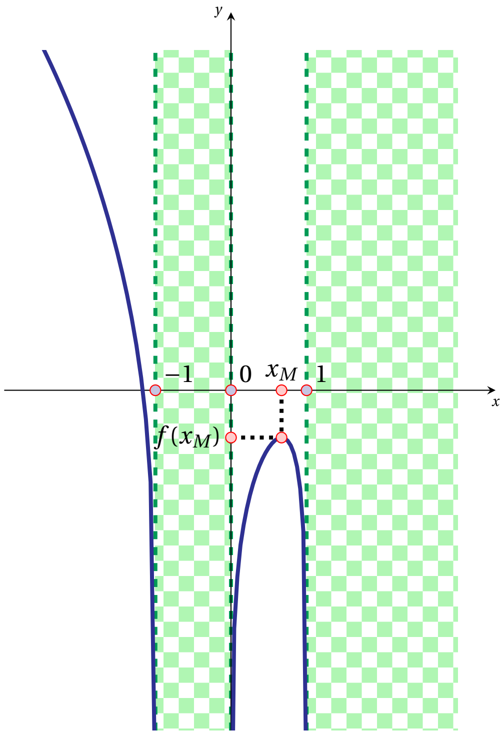


FIGURE 1: $f(x) = \ln(x - x^5)$.

Exercice II - continuité, dérivabilité

Soit $f_\alpha : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ une application définie par

$$f_\alpha(x) = \begin{cases} x^\alpha \cos\frac{1}{x}, & \text{si } x \neq 0, \\ 0, & \text{si } x = 0. \end{cases}$$

Pour chaque valeur de α indiqué, répondre aux questions suivantes :

α	f est-elle continue en $x = 0$?	f est-elle dérivable en $x = 0$?	f est-elle de classe $\mathscr{C}^1(\mathbb{R})$?
0			
1			
2			
3			

Solution de l'exercice II

Cas $\alpha = 0$ **:** $f_0(x) = \begin{cases} \cos\frac{1}{x}, & \text{si } x \neq 0, \\ 0, & \text{si } x = 0. \end{cases}$

- ▷ f_0 n'est pas continue en 0 car $\lim_{x\to 0} f_0(x) = \lim_{x\to 0} \cos\frac{1}{x}$ n'existe pas.
- ▷ f_0 n'est pas dérivable en 0 car elle n'est pas continue en 0.
- ▷ f_0 n'est pas de classe $\mathscr{C}^1(\mathbb{R})$ car elle n'est pas continue en 0.

Cas $\alpha = 1$ **:** $f_1(x) = \begin{cases} x\cos\frac{1}{x}, & \text{si } x \neq 0, \\ 0, & \text{si } x = 0. \end{cases}$

- ▷ f_1 est continue en 0 car $\lim_{x\to 0} f_1(x) = 0 = f_1(0)$ (il suffit d'observer que $-x \le x\cos\frac{1}{x} \le x$).
- ▷ f_1 n'est pas dérivable en 0 car $\lim_{x\to 0} \frac{f_1(x)-f_1(0)}{x-0} = \lim_{x\to 0} \cos\frac{1}{x}$ n'existe pas.
- ▷ f_1 n'est pas de classe $\mathscr{C}^1(\mathbb{R})$ car elle n'est pas dérivable en 0.

Cas $\alpha = 2$ **:** $f_2(x) = \begin{cases} x^2\cos\frac{1}{x}, & \text{si } x \neq 0, \\ 0, & \text{si } x = 0. \end{cases}$

- ▷ f_2 est continue en 0 car $\lim_{x\to 0} f_2(x) = 0 = f_2(0)$ (il suffit d'observer que $-x^2 \le x^2\cos\frac{1}{x} \le x^2$).
- ▷ f_2 est dérivable en 0 car $\lim_{x\to 0} \frac{f_2(x)-f_2(0)}{x-0} = \lim_{x\to 0} x\cos\frac{1}{x} = 0$ (il suffit d'observer que $-x \le x\cos\frac{1}{x} \le x$).
- ▷ f_2 n'est pas de classe $\mathscr{C}^1(\mathbb{R})$ car

$$f_2'(x) = \begin{cases} 2x\cos\frac{1}{x} + \sin\frac{1}{x}, & \text{si } x \neq 0, \\ 0, & \text{si } x = 0, \end{cases}$$

  et $\lim_{x\to 0} f_2'(x)$ n'existe pas (car $\lim_{x\to 0} \sin\frac{1}{x}$ n'existe pas).

Cas $\alpha = 3$ **:** $f_3(x) = \begin{cases} x^3\cos\frac{1}{x}, & \text{si } x \neq 0, \\ 0, & \text{si } x = 0. \end{cases}$

- ▷ f_3 est continue en 0 car $\lim_{x\to 0} f_3(x) = 0 = f_3(0)$ (il suffit d'observer que $-x^3 \le x^3\cos\frac{1}{x} \le x^3$). De plus, elle est coninue dans tout $\mathbb{R}$.
- ▷ f_3 est dérivable en 0 car $\lim_{x\to 0} \frac{f_3(x)-f_3(0)}{x-0} = \lim_{x\to 0} x^2\cos\frac{1}{x} = 0$ (il suffit d'observer que $-x^2 \le x^2\cos\frac{1}{x} \le x^2$).
- ▷ f_3 est de classe $\mathscr{C}^1(\mathbb{R})$ car

$$f_3'(x) = \begin{cases} 3x^2\cos\frac{1}{x} + x\sin\frac{1}{x}, & \text{si } x \neq 0, \\ 0, & \text{si } x = 0, \end{cases}$$

  et $\lim_{x\to 0} f_3'(x) = 0 = f_3'(0)$.

Donc on a

α	f est-elle continue en $x = 0$?	f est-elle dérivable en $x = 0$?	f est-elle de classe $\mathscr{C}^1(\mathbb{R})$?
0	Non	Non	Non
1	Oui	Non	Non
2	Oui	Oui	Non
3	Oui	Oui	Oui

Exercice III - calcul de limites avec DLs et/ou règle de L'Hôpital

1. Calculer la limite $\lim_{x\to 0} \frac{(1+x)^{\frac{1}{x}}-e}{x}$.
2. Calculer la limite $\lim_{x\to +\infty} \sqrt[3]{x^3+x+1}-\sqrt{x^2+x}$.
3. Calculer la limite $\lim_{x\to 0} \frac{x-\sin x}{e^x-1-x-\frac{x^2}{2}}$.
4. Calculer la limite $\lim_{x\to 0} \frac{2(\tan x-\sin x)-x^3}{x^5}$.
5. Calculer la limite $\lim_{x\to a} \frac{\sin x-\sin a}{x-a}$.
6. Calculer la limite $\lim_{x\to 0} \frac{x-x\cos x}{x-\sin x}$.
7. Calculer la limite $\lim_{x\to \frac{\pi}{2}} (\cos x)^{\frac{\pi}{2}-x}$.
8. Calculer la limite $\lim_{x\to 0} \frac{e^x-e^{-x}-2x}{x-\sin x}$.
9. On considère la fonction $f(x)=x+\sqrt{x^2+x}$.
   - ▷ Écrire le développement limité de $\sqrt{\left(1+\frac{1}{x}\right)}$ en $\pm\infty$ à l'ordre 3.
   - ▷ En déduire le développement asymptotique de f à l'ordre 2
     - (i) en $-\infty$
     - (ii) en $+\infty$.
   - ▷ Écrire les équations des asymptotes pour f en
     - (i) en $-\infty$
     - (ii) en $+\infty$.
10. Trouver le développement limité de $\sin x$ en $\frac{\pi}{3}$ à l'ordre 3.

Solution de l'exercice III

1) On se rappelle d'abord que

$$(1+x)^{\frac{1}{x}} = e^{\frac{\ln(1+x)}{x}}.$$

En utilisant le développement limité de $\ln(1+x)$ en 0 on a

$$(1+x)^{\frac{1}{x}} = e^{\frac{x-\frac{x^2}{2}+o(x^2)}{x}} = e^{1-\frac{x}{2}+o(x)}$$

d'où

$$\lim_{x\to 0} \frac{(1+x)^{\frac{1}{x}}-e}{x} = -\frac{e}{2}.$$

2) On note $f(x)=\sqrt[3]{x^3+x+1}-\sqrt{x^2+x}$. On réécrit d'abord la fonction comme

$$f(x)=x\left[\left(1+\frac{1}{x^2}+\frac{1}{x^3}\right)^{\frac{1}{3}}-\left(1+\frac{1}{x}\right)^{\frac{1}{2}}\right].$$

On pose $y=\frac{1}{x}$. Alors

$$\lim_{x\to +\infty} \sqrt[3]{x^3+x+1}-\sqrt{x^2+x} = \lim_{y\to 0} \frac{(1+y^2+y^3)^{\frac{1}{3}}-(1+y)^{\frac{1}{2}}}{y}.$$

En utilisant le développement limité de $(1+y)^\alpha$ en 0 on a

$$\lim_{y\to 0} \frac{(1+y^2+y^3)^{\frac{1}{3}}-(1+y)^{\frac{1}{2}}}{y} = \lim_{y\to 0} \frac{1+o(y)-1-\frac{y}{2}+o(y)}{y} = -\frac{1}{2}.$$

3) En utilisant les développements limités on a :

$$\lim_{x\to 0} \frac{x-\sin x}{e^x-1-x-\frac{x^2}{2}} = \lim_{x\to 0} \frac{x-x+\frac{x^3}{6}+o(x^3)}{1+x+\frac{x^2}{2}+\frac{x^3}{6}-1-x-\frac{x^2}{2}+o(x^3)} =$$

$$= \lim_{x\to 0} \frac{\frac{x^3}{6}+o(x^3)}{\frac{x^3}{6}+o(x^3)} = 1.$$

4) En utilisant les développements limités on a :

$$\lim_{x\to 0}\frac{2(\tan x-\sin x)-x^3}{x^5}=\lim_{x\to 0}\frac{2\left(x+\frac{x^3}{3}+\frac{2x^5}{15}-x+\frac{x^3}{6}-\frac{x^5}{120}+o(x^5)\right)-x^3}{x^5}=$$

$$=\lim_{x\to 0}\frac{\frac{x^5}{4}+o(x^5)}{x^5}=\frac{1}{4}.$$

5) $\lim_{x\to a}\frac{\sin x-\sin a}{x-a}=\cos a$. (On s'aperçoit que c'est la définition de la dérivée de $\sin x$ en $x=a$.)

6) En utilisant les développements limités on a :

$$\lim_{x\to 0}\frac{x-x\cos x}{x-\sin x}=\lim_{x\to 0}\frac{x-x\left(1-\frac{x^2}{2}+o(x^2)\right)}{x-x+\frac{x^3}{6}+o(x^3)}=$$

$$=\lim_{x\to 0}\frac{\frac{x^3}{2}+o(x^3)}{\frac{x^3}{6}+o(x^3)}=3.$$

7) On pose $y=\frac{\pi}{2}-x$, alors

$$\lim_{x\to\frac{\pi}{2}}(\cos x)^{\frac{\pi}{2}-x}=\lim_{y\to 0}(\cos(\tfrac{\pi}{2}-y))^y=$$

$$=\lim_{y\to 0}(\sin y)^y=\lim_{y\to 0}e^{y\ln(\sin y)}=$$

$$=\lim_{y\to 0}e^{y\ln\left(y-\frac{y^3}{6}+o(y^3)\right)}=\lim_{y\to 0}e^{y\ln\left(y(1-\frac{y^2}{6}+o(y^2))\right)}=$$

$$=\lim_{y\to 0}e^{y\ln y}e^{y\ln\left(1-\frac{y^2}{6}+o(y^2))\right)}=\lim_{y\to 0}e^{y\ln y}e^{y\left(-\frac{y^2}{6}+o(y^2)\right)}=$$

$$=\lim_{y\to 0}e^{y\ln y}e^{-\frac{y^3}{6}+o(y^3)}=1.$$

8) Pour calculer la limite donnée on peut utiliser les développements limités :

$$\lim_{x\to 0}\frac{e^x-e^{-x}-2x}{x-\sin x}=\lim_{x\to 0}\frac{1+x+\frac{x^2}{2}+\frac{x^3}{6}-1+x-\frac{x^2}{2}+\frac{x^3}{6}-2x+o(x^3)}{x-x+\frac{x^3}{6}+o(x^3)}=$$

$$=\lim_{x\to 0}\frac{2\frac{x^3}{6}+o(x^3)}{\frac{x^3}{6}+o(x^3)}=2.$$

Sinon on peut utiliser la règle de L'Hôpital car

$$n(x)=e^x-e^{-x}-2x,\qquad \lim_{x\to 0}n(x)=0;$$

$$d(x)=x-\sin x,\qquad \lim_{x\to 0}d(x)=0.$$

On a

$$n'(x)=e^x+e^{-x}-2,\qquad \lim_{x\to 0}n'(x)=0;$$

$$d'(x)=1-\cos x,\qquad \lim_{x\to 0}d'(x)=0;$$

$$n''(x)=e^x-e^{-x},\qquad \lim_{x\to 0}n''(x)=0;$$

$$d''(x)=\sin x,\qquad \lim_{x\to 0}d''(x)=0;$$

$$n'''(x)=e^x+e^{-x},\qquad \lim_{x\to 0}n''(x)=2;$$

$$d'''(x)=\cos x,\qquad \lim_{x\to 0}d''(x)=1;$$

donc

$$\lim_{x\to 0}\frac{e^x-e^{-x}-2x}{x-\sin x}=\lim_{x\to 0}\frac{n'''(x)}{d'''(x)}=2.$$

9) On considère la fonction $f(x) = x + \sqrt{x^2+x}$. On remarque que

$$f(x) = \begin{cases} x\left(1+\sqrt{1+\frac{1}{x}}\right), & \text{si } x \geq 0, \\ x\left(1-\sqrt{1+\frac{1}{x}}\right), & \text{si } x < 0. \end{cases}$$

▷ Pour écrire le développement limité de $\sqrt{1+\frac{1}{x}}$ en $\pm\infty$ à l'ordre 3 on commence par se ramener à un développement limité en 0 en posant $y = 1/x$: il s'agit alors de calculer le développement limité de $\sqrt{1+y}$ en 0 à l'ordre 3

$$\sqrt{1+y} \underset{0}{=} 1 + \frac{1}{2}y - \frac{1}{8}y^2 + o(y^2)$$

d'où

$$\sqrt{1+\frac{1}{x}} \underset{\infty}{=} 1 + \frac{1}{2x} - \frac{1}{8x^2} + o(x^{-2})$$

▷ On en déduit le développement asymptotique de f à l'ordre 2

(i) en $-\infty$:

$$f(x) \underset{-\infty}{=} x\left(-\frac{1}{2x} + \frac{1}{8x^2} + o(x^{-2})\right) = -\frac{1}{2} + \frac{1}{8x} + o(x^{-1})$$

(ii) en $+\infty$:

$$f(x) \underset{+\infty}{=} x\left(2 + \frac{1}{2x} - \frac{1}{8x^2} + o(x^{-2})\right) = 2x + 1 - \frac{1}{4x} + o(x^{-1})$$

▷ On en déduit les équtions des asymptotes pour f en

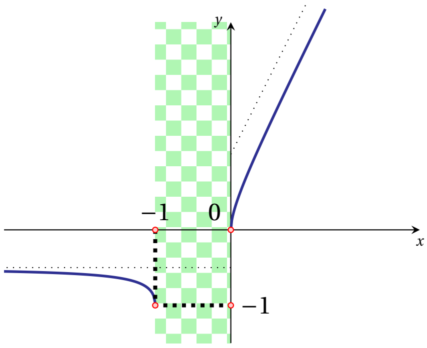
(i) en $-\infty$:

$$y = -\frac{1}{2}$$

(ii) en $+\infty$:

$$y = 2x + 1.$$

En effet, le graphe de la fonction est le suivant :



10) Pour calculer le développement limité de $\sin x$ en $\frac{\pi}{3}$ à l'ordre 3 on utilise la formule de Taylor :

$$f(x) \underset{a}{=} \sum_{k=0}^{k=n} \frac{f^{(k)}(a)}{k!}(x-a)^k + o((x-a)^k).$$

Ici $n = 3$, $a = \frac{\pi}{3}$ et $f(x) = \sin x$ d'où

$$f(x) = \sin x, \qquad f(a) = \frac{\sqrt{3}}{2};$$
$$f'(x) = \cos x, \qquad f'(a) = \frac{1}{2};$$
$$f''(x) = -\sin x, \qquad f''(a) = -\frac{\sqrt{3}}{2};$$
$$f'''(x) = -\cos x, \qquad f'''(a) = -\frac{1}{2};$$

donc

$$\sin x \underset{\pi/3}{=} \frac{\sqrt{3}}{2} + \frac{1}{2}\left(x - \frac{\pi}{3}\right) - \frac{\sqrt{3}}{4}\left(x - \frac{\pi}{3}\right)^2 - \frac{1}{12}\left(x - \frac{\pi}{3}\right)^3 + o\left(\left(x - \frac{\pi}{3}\right)^3\right).$$

Exercice IV - suites récurrentes

1. Soit $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite telle que
$$\begin{cases} u_{n+1} = \sqrt{2+u_n}, \\ u_0 = 1. \end{cases}$$
   a) Montrer que pour tout $n \in \mathbb{N}$, $-1 < u_n < 2$.
   b) En supposant que la limite de u_n existe, la calculer.
   c) Montrer que $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est une suite monotone et en étudier sa convergence.
2. Soit $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite telle que
$$\begin{cases} u_{n+1} = \frac{u_n}{1+u_n^2}, \\ u_0 = 1. \end{cases}$$
   a) Montrer que pour tout $n \in \mathbb{N}$, $u_n > 0$.
   b) En supposant que la limite de u_n existe, la calculer.
   c) Montrer que $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est une suite monotone et en étudier sa convergence.
3. Soit $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite telle que
$$\begin{cases} u_{n+1} = \frac{u_n^2+u_n}{2}, \\ u_0 = \frac{1}{2}. \end{cases}$$
   a) Montrer que pour tout $n \in \mathbb{N}$, $0 < u_n < 1$.
   b) En supposant que la limite de u_n existe, la calculer.
   c) Montrer que $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est une suite monotone et en étudier sa convergence.

Solution de l'exercice IV

1. a) Par récurrence :
   ▷ $-1 < u_0 = 1 < 2$;
   ▷ soit $-1 < u_n < 2$, alors $u_{n+1} = \sqrt{2+u_n} < \sqrt{2+2} = 2$ et $u_{n+1} = \sqrt{2+u_n} > \sqrt{2-1} = 1 > -1$.
   b) Soit $\ell = \lim u_n$ avec $\ell \in \mathbb{R}$. Alors, en passant à la limite dans la définition, on a $\ell = \sqrt{\ell+2}$ d'où $\ell = -1$ ou $\ell = 2$.
   c) Puisque $-1 < u_n < 2$ pour tout $n \in \mathbb{N}$, on a $u_{n+1} - u_n = \sqrt{u_n+2} - u_n = -\frac{u_n^2-u_n-2}{\sqrt{u_n+2}+u_n} = -\frac{(u_n-2)(u_n+1)}{\sqrt{u_n+2}+u_n} > 0$, autrement dit la suite u_n est monotone croissante. Étant une suite monotone croissante vérifiant $-1 < u_n < 2$ pour tout $n \in \mathbb{N}$ et puisque les uniques limites réelles possibles sont $\ell = -1$ et $\ell = 2$, on conclut que $\lim u_n = 2$.
2. a) Par récurrence :
   ▷ $u_0 = 1 > 0$;
   ▷ soit $u_n > 0$, alors $u_{n+1} = \frac{u_n}{1+u_n^2} > 0$.
   b) Soit $\ell = \lim u_n$ avec $\ell \in \mathbb{R}$. Alors, en passant à la limite dans la définition, on a $\ell = \frac{\ell}{1+\ell^2}$ d'où $\ell = 0$.
   c) Puisque $u_n > 0$ pour tout $n \in \mathbb{N}$, on a $u_{n+1} - u_n = \frac{u_n}{1+u_n^2} - u_n = -\frac{u_n^3}{1+u_n^2} < 0$, autrement dit la suite u_n est monotone décroissante. Étant une suite monotone décroissante minorée par 0 pour tout $n \in \mathbb{N}$ et puisque l'unique limite réelle possible est $\ell = 0$, on conclut que $\lim u_n = 0$.
3. a) Par récurrence :
   ▷ $0 < u_0 = 1/2 < 1$;
   ▷ soit $0 < u_n < 1$, alors $u_{n+1} = \frac{u_n^2+u_n}{2} > 0$ et $u_{n+1} = \frac{u_n^2+u_n}{2} < \frac{2}{2} = 1$
   b) Soit $\ell = \lim u_n$ avec $\ell \in \mathbb{R}$. Alors, en passant à la limite dans la définition, on a $\ell = \frac{\ell(\ell+1)}{2}$ d'où $\ell = 0.$ ou $\ell = 1$.
   c) Puisque $0 < u_n < 1$ pour tout $n \in \mathbb{N}$, on a $u_{n+1} - u_n = \frac{u_n(u_n-1)}{2} < 0$, autrement dit la suite u_n est monotone décroissante. Étant une suite monotone décroissante minorée par 0 pour tout $n \in \mathbb{N}$ et puisque les uniques limites réelles possibles sont $\ell = 0$ et $\ell = 1$, on conclut que $\lim u_n = 0$.

Exercice V - factorisations d'un polynôme

1. On considère le polynôme
$$P(x) = x^6 - 5x^5 + 10x^4 - 12x^3 + 11x^2 - 7x + 2.$$
   a) Écrire la formule de Taylor de P en 1 ; montrer que 1 est une racine de P et déterminer son ordre de multiplicité.
   b) Factoriser P sur $\mathbb{R}$ en sachant qu'il possède une autre racine réelle évidente (*i.e.* elle est un diviseur du terme de degré 0).
   c) Factoriser P sur $\mathbb{C}$.
2. On considère le polynôme
$$P(x) = x^8 + 5x^7 + 9x^6 + 7x^5 + 3x^4 + 5x^3 + 9x^2 + 7x + 2.$$
   a) Écrire la formule de Taylor de P en -1 ; montrer que -1 est une racine de P et déterminer son ordre de multiplicité.
   b) Factoriser P sur $\mathbb{R}$ en sachant qu'il possède une autre racine réelle évidente (*i.e.* elle est un diviseur du terme de degré 0).
   c) Factoriser P sur $\mathbb{C}$.

Solution de l'exercice V

1. a) Pour un polynôme P de degré 6, la formule de Taylor en 1 s'écrit
$$P(x) = \sum_{k=0}^{k=6} P^{(k)}(1)\frac{(x-1)^k}{k!}.$$
   On calcul alors les dérivées $P^{(k)}(x)$ pour $k = 0, \dots, 6$ et on les évalue en 1 :
$$\begin{aligned}
P(x) &= x^6 - 5x^5 + 10x^4 - 12x^3 + 11x^2 - 7x + 2 & P(1) &= 0\\
P'(x) &= 6x^5 - 25x^4 + 40x^3 - 36x^2 + 22x - 7 & P'(1) &= 0\\
P''(x) &= 30x^4 - 100x^3 + 120x^2 - 72x + 22 & P''(1) &= 0\\
P'''(x) &= 120x^3 - 300x^2 + 240x - 72 & P'''(1) &= -12\\
P^{IV}(x) &= 360x^2 - 600x + 240 & P^{IV}(1) &= 0\\
P^{V}(x) &= 720x - 600 & P^{V}(1) &= 120\\
P^{VI}(x) &= 720 & P^{VI}(1) &= 720
\end{aligned}$$
   La formule de Taylor en 1 s'écrit alors
$$\begin{aligned}
P(x) &= -2(x-1)^3 + (x-1)^5 + (x-1)^6 =\\
&= (x-1)^3((x-1)^3 + (x-1)^2 - 2) =\\
&= (x-1)^3(x^3 - 3x^2 + 3x - 1 + x^2 - 2x + 1 - 2) =\\
&= (x-1)^3(x^3 - 2x^2 + x - 2)
\end{aligned}$$
   Ceci implique que 1 est une racine de P de multiplicité 3.

   b) On pose $Q(x) = x^3 - 2x^2 + x - 2$. Une racine réelle évidente de Q est 2. En effectuant la division euclidienne de Q par $(x-2)$ on obtient
$$Q(x) = (x-2)(x^2+1).$$
   Étant donné que $x^2 + 1$ ne se factorise pas sur $\mathbb{R}$, on conclut que la factorisation de P sur $\mathbb{R}$ est
$$P(x) = (x-1)^3(x-2)(x^2+1).$$
   c) Pour factoriser P sur $\mathbb{C}$ il ne reste que factoriser le polynôme $x^2 + 1$ sur $\mathbb{C}$; on a les deux racines complexes conjuguées $x_1 = -i$ et $x_2 = +i$. On conclut que la factorisation de P sur $\mathbb{C}$ est
$$P(x) = (x-1)^3(x-2)(x-i)(x+i).$$

2. a) Pour un polynôme P de degré 8, la formule de Taylor en -1 s'écrit

$$P(x) = \sum_{k=0}^{k=8} P^{(k)}(-1)\frac{(x+1)^k}{k!}.$$

On calcul alors les dérivées $P^{(k)}(x)$ pour $k = 0, \ldots, 8$ et on les évalue en -1 :

$$\begin{aligned}
P(x) &= x^8+5x^7+9x^6+7x^5+3x^4+5x^3+9x^2+7x+2 & P(-1) &= 0\\
P'(x) &= 8x^7+35x^6+54x^5+35x^4+12x^3+15x^2+18x+7 & P'(-1) &= 0\\
P''(x) &= 56x^6+210x^5+270x^4+140x^3+36x^2+30x+18 & P''(-1) &= 0\\
P'''(x) &= 336x^5+1050x^4+1080x^3+420x^2+72x+30 & P'''(-1) &= 12\\
P^{IV}(x) &= 1680x^4+4200x^3+3240x^2+840x+72 & P^{IV}(-1) &= -48\\
P^{V}(x) &= 6720x^3+12600x^2+6480x+840 & P^{V}(-1) &= 240\\
P^{VI}(x) &= 20160x^2+25200x+6480 & P^{VI}(-1) &= 1440\\
P^{VII}(x) &= 40320x+25200 & P^{VII}(-1) &= -15120\\
P^{VIII}(x) &= 40320 & P^{VIII}(-1) &= 40320
\end{aligned}$$

La formule de Taylor en -1 s'écrit alors

$$\begin{aligned}
P(x) &= 2(x+1)^3-2(x+1)^4+2(x+1)^5+2(x+1)^6-3(x+1)^7+(x+1)^8 =\\
&= (x+1)^3\left[2-2(x+1)+2(x+1)^2+2(x+1)^3-3(x+1)^4+(x+1)^5\right] =\\
&= (x+1)^3\left[2x^2+2x+6+2(x^3+3x^2+3x+1)-3(x^4+4x^3+6x^2+4x+1)+(x^5+5x^4+10x^3+10x^2+5x+1)\right] =\\
&= (x+1)^3(x^5+2x^4+x+2)
\end{aligned}$$

Ceci implique que -1 est une racine de P de multiplicité 3.

b) On pose $Q(x) = x^5+2x^4+x+2$. Une racine réelle évidente de Q est -2. En effectuant la division euclidienne de Q par $(x+2)$ on obtient

$$Q(x) = (x+2)(x^4+1).$$

Étant donné que x^4+1 ne se factorise pas sur $\mathbb{R}$, on conclut que la factorisation de P sur $\mathbb{R}$ est

$$P(x) = (x+1)^3(x+2)(x^4+1).$$

c) Pour factoriser P sur $\mathbb{C}$ il ne reste que factoriser le polynôme x^4+1 sur $\mathbb{C}$; on a les quatre racines $x_1 = \frac{1+i}{\sqrt{2}}$, $x_2 = \frac{1-i}{\sqrt{2}}$, $x_3 = \frac{-1+i}{\sqrt{2}}$ et $x_4 = \frac{-1-i}{\sqrt{2}}$. On conclut que la factorisation de P sur $\mathbb{C}$ est

$$P(x) = (x+1)^3(x+2)\left(x-\frac{1+i}{\sqrt{2}}\right)\left(x-\frac{1-i}{\sqrt{2}}\right)\left(x-\frac{-1+i}{\sqrt{2}}\right)\left(x-\frac{-1-i}{\sqrt{2}}\right).$$