# Table des matières

# Chapitre 1

# *Les équations différentielles*

## 1.1 *Équations différentielles d'ordre* $n$

**Définition 1.1.1** *:*

*Soit* $\Omega$ *une partie de* $\mathbb{R}^{n+1}$ $(n \in \mathbb{N}^*)$ *et* $\varphi$ *une application de* $\Omega$ *dans* $\mathbb{R}\,(\varphi : \Omega \longrightarrow \mathbb{R})$. *On appelle équation de la différentielle d'ordre* $n$, *l'équation*

$$\varphi\left(x, y, y', y'', \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots, y^{(n)}\right) = 0 \qquad (E)$$

*où* $y$ *est une fonction de la variable* $x$ *et* $y', y'', \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots, y^{(n)}$ *sont ses dérivées.*

- *L'ordre le plus grand de dérivation est appelé ordre de l'équation* $(E)$.
- *Résoudre ou intégrer l'équation* $(E)$ *c'est trouver toutes les fonctions* $y = f(x)$, $y \in C^n(I, \mathbb{R})\,(y : I \longrightarrow \mathbb{R})$ *vérifient* $(E)$, $\forall x \in I$.

  *une telle fonction s'appelle solution ou intégrale de l'équation* $(E)$.

**Exemple 1.1.1** *:*

**1)** $y' = e^x$ *est une équation différentielle du premier ordre.*

**2)** $xy' + y'' + y^3 = 0$ *équation différentielle du deuxième ordre (second ordre).*

## 1.2 Équation différentielle du premier ordre

*Soient* $f : D \subset \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}$ *et* $y : I \subset \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ *deux fonctions tells que* $y$ *est dérivable sur* $I$.

**Définition 1.2.1** *:*

*On appelle équation différentielle du premier ordre toute équation de type*

$$y' = f(x, y) \tag{P}$$

*On dit que* $(P)$ *admet une solution* $y_0(x)$ *si* $y_0' = f(x, y_0)$.

### 1.2.1 Équation différentielle à variables séparés

*Soient* $f : I \longrightarrow \mathbb{R}$ *et* $g : J \longrightarrow \mathbb{R}$ *deux fonctions continues sur* $I$ *et* $J$ *respectivement et* $\forall y \in J, g(y) \neq 0$.

**Définition 1.2.2** *:*

*Une équation différentielle premier ordre est dite à variables séparées si elle peut s'écrire sous la forme* $y' = \dfrac{f(x)}{g(y)}$ *où* $g(y)\,dy = f(x)\,dx$ *une telle que différentielle peut s'intégrer facilement en effet:*

$$y' = \frac{dy}{dx} = \frac{f(x)}{g(y)} \Longrightarrow \int g(y)\,dy = \int f(x)\,dx \Longrightarrow G(y) = F(x) + c$$

*tel que* $G$ *est une primitive de* $g$ *et* $F$ *est primitive de* $f$. *Donc*

$$y = G^{-1}(F(x) + c).$$

***Exemple 1.2.1*** *:*

*Résoudre sur* $I = ]1, +\infty[$ *l'équation différentielle:* $xy' \ln x = (3 \ln x + 1)\, y$

$$xy' \ln x = (3 \ln x + 1)\, y \Longrightarrow y' = \frac{(3 \ln x + 1)\, y}{x \ln x}$$

$$
\begin{aligned}
&\Longrightarrow \quad \frac{y'}{y} = \frac{(3\ln x + 1)}{x\ln x} \\
&\Longrightarrow \quad \frac{1}{y}\frac{dy}{dx} = \frac{(3\ln x + 1)}{x\ln x} \\
&\Longrightarrow \quad \frac{dy}{y} = \frac{(3\ln x + 1)}{x\ln x}dx \\
&\Longrightarrow \quad \int \frac{dy}{y} = \int \frac{(3\ln x + 1)}{x\ln x}dx \\
&\Longrightarrow \quad \ln y = 3\int \frac{\ln x}{x\ln x}dx + \int \frac{1}{x\ln x}dx \\
&\Longrightarrow \quad \ln y = 3\ln|x| + \ln|\ln x| + c \\
&\Longrightarrow \quad \ln y = \ln\left(x^3\ln x\right) + c \\
&\Longrightarrow \quad e^{\ln y} = e^{\ln\left(x^3\ln x\right)+c} \\
&\Longrightarrow \quad y = e^c\left(x^3\ln x\right) \\
&\Longrightarrow \quad y = k\left(x^3\ln x\right) \quad \textit{où} \;\; k = \pm e^c
\end{aligned}
$$

### 1.2.2 *Équations différentielles homogènes*

*La forme générale de ces équations est* $y' = f\left(\frac{y}{x}\right) \Longrightarrow \frac{dy}{dx} = f\left(\frac{y}{x}\right)$ *où* $f$ *est une fonction continue sur* $I \subset \mathbb{R}$.

***Résolution de l'équation:***

*On pose* $t = \frac{y}{x}$ *pour se ramener à une équation à variables séparés,*

*on pose* $t = \frac{y}{x} \Longrightarrow y = xt$

*Ainsi*

$$
dy = xdt + tdx \;\; \text{et} \;\; y' = f\left(\frac{y}{x}\right) \Longrightarrow \frac{dy}{dx} = f\left(\frac{y}{x}\right)
$$

$$
\begin{aligned}
&\Longrightarrow \quad dy = f\left(\frac{y}{x}\right)dx \\
&\Longrightarrow \quad xdt + tdx = f(t)\,dx \\
&\Longrightarrow \quad xdt = (f(t) - t)\,dx \\
&\Longrightarrow \quad \frac{dt}{f(t) - t} = \frac{dx}{x}
\end{aligned}
$$

*On est donc bien ramené au cas précédent (équation différentielle à variables séparés).*

**Exemple 1.2.2** *:*

*Résoudre l'équation différentielle:* $(2x+y)\,dx-(4x-y)\,dy=0$

$$(2x+y)\,dx-(4x-y)\,dy=0 \Longrightarrow (2x+y)\,dx=(4x-y)\,dy$$

$$\begin{aligned}
&\Longrightarrow \quad \frac{dy}{dx}=\frac{2x+y}{4x-y}; \qquad ((4x-y)\neq 0)\\
&\Longrightarrow \quad \frac{dy}{dx}=\frac{2+\frac{y}{x}}{4-\frac{y}{x}}\\
&\Longrightarrow \quad dy=\left(\frac{2+\frac{y}{x}}{4-\frac{y}{x}}\right)dx
\end{aligned}$$

*On pose*

$$t=\frac{y}{x}\Longrightarrow y=xt\Longrightarrow dy=xdt+tdx$$

*Alors*

$$xdt+tdx=\left(\frac{2+t}{4-t}\right)dx\Longrightarrow xdt=\left(\frac{2+t}{4-t}-t\right)dx$$

$$\begin{aligned}
&\Longrightarrow \quad xdt=\frac{t^2-3t+2}{4-t}dx\\
&\Longrightarrow \quad \frac{dx}{x}=\left(\frac{4-t}{t^2-3t+2}\right)dt\\
&\Longrightarrow \quad \ln|x|=\int\frac{4-t}{t^2-3t+2}dt=\int\frac{2}{t-2}dt-\int\frac{3}{t-1}dt\\
&\Longrightarrow \quad \ln|x|=2\ln|t-2|-3\ln|t-1|+c\\
&\Longrightarrow \quad \ln|x|=\ln|t-2|^2-\ln|t-1|^3+c\\
&\Longrightarrow \quad \ln|x|=\ln\frac{|t-2|^2}{|t-1|^3}+c\\
&\Longrightarrow \quad |x|=e^c\frac{|t-2|^2}{|t-1|^3}=k\frac{|t-2|^2}{|t-1|^3} \quad \textit{où} \quad k=\pm e^c
\end{aligned}$$

*Alors*

$$|x| = k\frac{\left|\frac{y}{x}-2\right|^2}{\left|\frac{y}{x}-1\right|^3} = k\frac{\left|\frac{y-2x}{x}\right|^2}{\left|\frac{y-x}{x}\right|^3} = k\,|x|\,\frac{|y-2x|^2}{|y-x|^3} \Longrightarrow |y-x|^3 = k\,|y-2x|^2$$

### 1.2.3 *Équations différentielles linéaires*

**Définition 1.2.3** *:*

*une équation différentielle linéaire du premier ordre est une équation différentielle qui peut s'écrire sous la forme:*

$$y' + a(x)\,y = b(x) \qquad \text{(EDL)}$$

*où $a$ et $b$ sont des fonctions continues sur $I \subset \mathbb{R}$.*

*Cette équation différentielle on peut associe la même équation avec $b(x) = 0$ c'est équation homogène associée à équation différentielle ou équation sans second membre on la note $(E.H)$.*

***i.e***:

$$y' + a(x)\,y = 0 \qquad (E.H)$$

***1- Résolution de l'équation homogène associe:***

*Équation homogène $(EH)$ est une équation a variable séparé:*

$$\begin{aligned}
y' + a(x)\,y = 0 &\Longrightarrow \frac{y'}{y} = -a(x) \\
&\Longrightarrow \ln|y| = -\int a(x)\,dx + c \\
&\Longrightarrow y = ke^{-\int a(x)dx}; \qquad k = \pm e^c \\
&\Longrightarrow y = ke^{F(x)}; \qquad k = \pm e^c \;\; et \;\; F(x) = -\int a(x)\,dx
\end{aligned}$$

***2- Solution particulière par variation de la constante:***

*On cherche la solution particulière sous la forme $y_p = k(x)\,e^{F(x)}$ avec $k$ une fonction à déterminer; $y_p' = k'(x)\,e^{F(x)} + k(x)\,F'(x)\,e^{F(x)}$*

*et on a:*

$$
\begin{aligned}
y' + a(x)\,y = b(x) &\Longrightarrow k'(x)\,e^{F(x)} + k(x)\,F'(x)\,e^{F(x)} + a(x)\,k(x)\,e^{F(x)} = b(x) \\
&\Longrightarrow k'(x)\,e^{F(x)} = b(x) \\
&\Longrightarrow k'(x) = b(x)\,e^{-F(x)} \\
&\Longrightarrow k(x) = \int b(x)\,e^{-F(x)}dx
\end{aligned}
$$

*Donc la solution particulière est:*

$$y_p = e^{F(x)} \int b(x)\,e^{-F(x)}dx$$

*La solution générale de l'équation* $(E.D.L)$ *est:*

$$y = y_H + y_p = e^{F(x)}\left(k + \int b(x)\,e^{-F(x)}dx\right) \quad \text{où} \quad F(x) = -\int a(x)\,dx$$

**Exemple 1.2.3** *:*

*Résoudre sur* $I = \left]0, \frac{\pi}{2}\right[$ *l'équation différentielle*

$$y' \sin x - y \cos x = x \qquad (E.D.L)$$

1) *l'équation homogène (équation sans second membre)* $(E.H)$*:*

$$y' \sin x - y \cos x = 0 \Longrightarrow y' \sin x = y \cos x$$

$$
\begin{aligned}
&\Longrightarrow \frac{y'}{y} = \frac{\cos x}{\sin x} \\
&\Longrightarrow \frac{1}{y}\frac{dy}{dx} = \frac{\cos x}{\sin x} \\
&\Longrightarrow \frac{dy}{y} = \frac{\cos x}{\sin x}dx \\
&\Longrightarrow \int \frac{dy}{y} = \int \frac{\cos x}{\sin x}dx \\
&\Longrightarrow \ln y = \ln \sin x + c \\
&\Longrightarrow y = e^c \sin x \\
&\Longrightarrow y = k \sin x; \quad k = \pm e^c
\end{aligned}
$$

2) *cherchons la solution particulière:*

*la solution particulière sous la forme* $y = k(x)\sin x \Longrightarrow y' = k'(x)\sin x + k(x)\cos x.$

$$\begin{aligned}
(EDL) &\Longrightarrow (k'(x)\sin x + k(x)\cos x)\sin x - k(x)\sin x\cos x = x \\
&\Longrightarrow k'(x)\sin^2 x + k(x)\cos x\sin x - k(x)\sin x\cos x = x \\
&\Longrightarrow k'(x)\sin^2 x = x \\
&\Longrightarrow k'(x) = \frac{x}{\sin^2 x} \\
&\Longrightarrow k(x) = \int \frac{x}{\sin^2 x}dx
\end{aligned}$$

*on intégre par parties*

*on posent* $\begin{cases} u = x & \Longrightarrow \quad u' = dx \\ v' = \dfrac{1}{\sin^2 x} & \Longrightarrow \quad v = -\dfrac{1}{\tan x} \end{cases}$

$$\begin{aligned}
\int \frac{x}{\sin^2 x}dx &= -\frac{x}{\tan x} + \int \frac{1}{\tan x}dx \\
&= -\frac{x}{\tan x} + \ln|\sin x| + c
\end{aligned}$$

*donc* $\quad k(x) = -\dfrac{x}{\tan x} + \ln|\sin x| + c$

*Alors*

$$y_p = k(x)\sin x = -x\cos x + \sin x\ln|\sin x| + c$$

*la solution générale*

$$\begin{aligned}
y &= y_H + y_p \\
&= k\sin x - x\cos x + \sin x\ln|\sin x| \\
&= -x\cos x + (k + \ln|\sin x|)\sin x; \qquad k \in \mathbb{R}
\end{aligned}$$

### 1.2.4 *Équations de Bernoulli*

$$y' + a(x)y = b(x)y^k \qquad (E.B)$$

*Une équation de Bernoulli est de la forme*

$$y' + a(x)y = b(x)y^k; \qquad k \neq 0, k \neq 1, k \in \mathbb{R}$$

$a(x)$ *et* $b(x)$ *sont des fonctions continues sur* $I$*.*

*lorsque* $k = 0$ *ou* $k = 1$ *une tell équation est linéaire.*

***Méthode de résolution:***

*Division* $(E.B)$ *par* $y^k$, *on obtient*

$$y'y^{-k} + a(x)\,y^{1-k} = b(x) \qquad (E.B')$$

*or, on peut remarque que:* $y'y^{-k} = \left(\dfrac{y^{1-k}}{1-k}\right)'$; donc on pose $z = y^{1-k}$ il vient $z' = (1-k)\,y'y^{-k}$, *remplaçant dans* $(E.B')$

$$\frac{z'}{1-k} + a(x)\,z = b(x)$$

*on est donc ramené à une équation différentielle linéaire.*

**Exemple 1.2.4** *:*

*Résoudre l'équation de Bernoulli*

$$xy' - y = 2xy^2, \qquad k = 2 \qquad (E.b)$$

$$(E.b) \Longrightarrow xy'y^{-2} - y^{-1} = 2x$$

*posons*

$$z = \frac{1}{y} = y^{-1} \Longrightarrow z' = -\frac{y'}{y^2} = -y'y^{-2}$$

*alors*

$$(E.B) \Longrightarrow -xz' - z = 2x$$

*l'équation homogène associe à* $(E.B)$ *est*

$$-xz' - z = 0 \Longrightarrow -xz' = z$$

$$\begin{aligned}
&\Longrightarrow \frac{z'}{z} = -\frac{1}{x} \\
&\Longrightarrow \int \frac{z'}{z}dx = -\int \frac{1}{x}dx \\
&\Longrightarrow \ln|z| = -\ln|x| + c \\
&\Longrightarrow z = e^{\ln\frac{1}{|x|}+c} = k\frac{1}{|x|}, \qquad k \pm e^c
\end{aligned}$$

*la solution particulière de* $(E.B)$ :

*Remarquons que* $z = -x$ *est une solution particulière de* $(E.B)$ *donc la solution générale est*

$$z = \frac{k}{|x|} - x$$

$$z = \frac{1}{y} \Longrightarrow y = \frac{1}{z} \Longrightarrow y = \frac{1}{\frac{k}{|x|} - x} = \frac{|x|}{k - x\,|x|}.$$

### 1.2.5 *Équation de Riccati*

*Une équation de Riccati est de la forme*

$$y' + a(x)\,y + b(x)\,y^2 = f(x) \qquad (E.R)$$

*On ne peut la résoudre que si l'on connaît une solution particulière* $y_p$.

*on pose* $z = y - y_p \Longrightarrow y = z + y_p \Longrightarrow z' = y' - y'_p \Longrightarrow y' = z' + y'_p$ *et* $y^2 = z^2 + y_p^2 + 2zy_p$.

*ce qui permet d'arriver à:*

$$z' + (a(x) + 2y_p b(x))\,z = -b(x)\,z^2$$

*une équation de Bernoulli avec* $k = 2$.

**Exemple 1.2.5** *:*

$$\begin{cases} e^{-x}y' - 2e^x y + y^2 = 1 - e^{2x} \\ y_p = e^x \end{cases} \qquad (E.r)$$

*Posons* $z = y - y_p = y - e^x \Longrightarrow y = z + e^x \Longrightarrow y' = z' + e^x$ *et* $y^2 = z^2 + e^{2x} + 2ze^x$.

*Remplaçant dans* $(E.r)$ *on obtient:*

$$\begin{aligned}
(E.r) &\Longleftrightarrow e^{-x}(z' + e^x) - 2e^x(z + e^x) + z^2 + 2ze^x + e^{2x} = 1 - e^{2x} \\
&\Longleftrightarrow e^{-x}z' + z^2 = 0 \\
&\Longleftrightarrow e^{-x}z' = -z^2 \\
&\Longleftrightarrow \frac{z'}{z^2} = -e^x \\
&\Longleftrightarrow \int \frac{z'}{z^2}dx = \int -e^x dx \\
&\Longleftrightarrow -\frac{1}{z} = -e^x + c \\
&\Longleftrightarrow z = \frac{1}{e^x - c}
\end{aligned}$$

*Alors la solution générale de* $(E.r)$ *est*

$$y = z + e^x \Longrightarrow y = \frac{1}{e^x - c} + e^x$$

## 1.3 *Équations différentielles du second ordre à coefficients constants*

*Les équations différentielles d'ordre 2 sont de la forme générale* $F(x, y, y'; y'') = 0$ *comme pour les équations différentielles du* $1^{er}$ *ordre on distingue les équations différentielles d'ordre 2 sans et avec second membre puis les équations différentielles linéaires d'ordre 2 sans et avec second membre on s'intéresse aux équations différentielles linéaires du second ordre où les coefficients sont des constantes réelles.*

**Définition 1.3.1** *:*

*Une équation différentielle linéaire du second ordre à coefficients constants est une équation différentielle de la forme:*

$$ay'' + by' + cy = f(x) \qquad (E)$$

*où* $a, b; c \in \mathbb{R}\,(a \neq 0)$ *et* $f \in C^0(I)$.

### 1.3.1 *L'équation homogène associée à* $(E)$ *(sans second membre)*

$$ay'' + by' + cy = 0 \qquad (E.H)$$

***Résolution de l'équation*** $(E.H)$:

*On considère l'équation différentielle*

$$ay'' + by' + cy = 0 \qquad (E.H)$$

*on remarque que la fonction nulle est solution de* $(E.H)$ *et on va chercher une condition sur* $r$ *pour que* $e^{rx}$ *sont une solution de* $(E.H)$ *où* $r$ *un réel.*

$$y = e^{rx} \Longrightarrow y' = re^{rx} \Longrightarrow y'' = r^2 e^{rx}$$

*Donc l'équation différentielle $(E.H)$ devient:*

$$e^{rx}\left(ar^2+br+c\right)=0 \quad , e^{rx}\neq 0$$

*donc*

$$\varphi(x)=ar^2+br+c=0 \qquad (E.C)$$

*c'est ce que l'on appelle équation caractéristique de l'équation $(E.H)$. Donc la forme des solutions de $(E.H)$ dépend du déterminant $\Delta$*

**Proposition 1.3.1** *:*

*Suivant le signe de $\Delta=b^2-4ac$. On a les résultats suivants:*

**1)** *Si $\Delta>0$ alors l'équation $(E.C)$ admet deux racines distincts $r_1,r_2$ et $(E.H)$ admet deux solutions $y_1=e^{r_1x}$ et $y_2=e^{r_2x}$. Donc la solution générale de l'équation $(E.H)$ est*

$$y_H=c_1y_1+c_2y_2=c_1e^{r_1x}+c_2e^{r_2x} \quad \text{avec} \quad c_1,c_2\in\mathbb{R}.$$

**2)** *Si $\Delta=0$ alors l'équation $(E.C)$ admet une racine double $r_0=\dfrac{-b}{2a}$ et $(E.H)$ admet la solution particulière et la solution générale de l'équation $(E.H)$ est*

$$y_H=(c_1x+c_2)\,e^{r_0x} \quad \text{avec} \quad c_1,c_2\in\mathbb{R}.$$

**3)** *Si $\Delta<0$ alors l'équation $(E.C)$ admet deux racines complexes conjugués $r_1=\alpha+i\beta$, $r_2=\alpha-i\beta$. Donc la solution générale de l'équation $(E.H)$ est*

$$y_H=e^{\alpha x}\left(c_1\cos\beta x+c_2\sin\beta x\right) \quad \text{avec} \quad c_1,c_2\in\mathbb{R}.$$

### 1.3.2 *Résolution de l'équation différentielle linéaire d'ordre* 2 *avec second membre*

*Une équation différentielle linéaire d'ordre 2 est de la forme $ay''+by'+cy=f(x)$ ce équation avec second membre résolvent en deux étapes:*

1) *On intégre d'abord l'équation sans second membre on obtient $y_H$.*

2) *On résoudre l'équation avec second membre en cherchant une solution particulière $y_p$ de $(E)$ et dans ce cas $y=y_H+y_p$.*

**Proposition 1.3.2** *: (Solution particulière de l'équation avec second membre)*

*Suivant l'expression du second membre, nous allons résumer les solutions particulières possibles dans le cas de l'équation différentielle avec second membre:*

- *Si* $f(x) = P_n(x)$ *avec* $d^0 P = n$ *on cherche une solution particulière de la forme* $x^k P_n(x) = Q_n(x)$

  $*\ k = 0$ *si* $r$ *n'est pas solution de l'équation* $\varphi(r) = 0$ *(l'équation caractéristique*$(E.C)$*).*

  $*\ k = 1$ *si* $r$ *est une racine de l'équation* $\varphi(r) = 0$*.*

  $*\ k = 2$ *si* $r$ *est une racine double de l'équation* $\varphi(r) = 0$*.*

  *On seulement* $y_p = Q_n(x)$, $Q_n$ *est un polynôme de degré* $n$*.*

- *Si* $f(x) = e^{rx}(\lambda \cos\theta x + \mu \sin\theta x)$, $\theta \in \mathbb{R}^*$.

  $*$ *Si* $r + i\theta$ *et* $r - i\theta$ *ne sont pas des racines de* $(E.C)$*, on cherche une solution particulière de la forme* $y_p = e^{rx}(\alpha \cos\theta x + \beta \sin\theta x)$

  $*$ *Si* $r+i\theta$ *et* $r-i\theta$ *sont des racines de* $(E.C)$*, alors* $y_p = xe^{rx}\left(\frac{\lambda}{2\theta}\sin\theta x - \frac{\mu}{2\theta}\cos\theta x\right)$.

- *Si* $f(x) = e^{\alpha x}.P_n(x)$ *avec* $d^0 P = n$ *alors* $y_p = x^k e^{\alpha x}.P_n(x)$

  $*\ k = 0$ *si* $\alpha$ *n'est pas solution de l'équation* $\varphi(r) = 0$*.*

  $*\ k = 1$ *si* $\alpha$ *est une racine de l'équation* $\varphi(r) = 0$*.*

  $*\ k = 2$ *si* $\alpha$ *est une racine double de l'équation* $\varphi(r) = 0$*.*