Chapitre1: Analyse

Table des matières

1 Fonction numérique d'une variable réelle **3**

1. Ensemble des Nombres réels 3
2. Limite et continuité 6
3. Dérivabilité 10
4. Etude d'une fonction 13

2 Primitives. Calcul intégral **16**

1. Primitives 16
2. Intégration 17
3. Méthodes d'intégration 19
4. Calcul approché d'une intégrale 20

3 Formule de Taylor. Développements limités **22**

1. Comparaison des fonctions 22
2. Formules de Taylor 23
3. Développements limités 24
4. Applications des développements limités 26

4 Fonctions de plusieurs variables **28**

1. Notions de base 28
2. Dérivées partielles 29
3. Différentielles 32
4. Optimisation d'une fonction à deux variables 33
5. Intégrales doubles 35

1 Fonction numérique d'une variable réelle

1. Ensemble des Nombres réels

■ Ordre et opérations algébriques

L'ensemble $\mathbb{R}$ muni de la relation « inférieur ou égal » est un ensemble totalement ordonné. De plus , on a la propriété suivante : Si x, y et z sont trois nombres réels, alors

$$x \leqslant y \Longleftrightarrow x + z \leqslant y + z$$

Si $z > 0$ $\quad x \leqslant y \Longleftrightarrow xz \leqslant yz$

Si $z < 0$ $\quad x \leqslant y \Longleftrightarrow xz \geqslant yz$

■ L'ensemble $\overline{\mathbb{R}}$

On appelle $\overline{\mathbb{R}}$ l'ensemble $\mathbb{R}$ auquel on adjoint les deux symboles $+\infty$ et $-\infty$. Soit :

$$\overline{\mathbb{R}} = \mathbb{R} \cup \{+\infty\} \cup \{-\infty\}.$$

On prolonge à $\overline{\mathbb{R}}$ l'addition, la multiplication et la relation d'ordre de $\mathbb{R}$ de la façon suivante :

— Pour $\ell \in \mathbb{R}$ on pose :

$$\ell + (+\infty) = +\infty, \qquad -(+\infty) = -\infty, \qquad (+\infty) + (+\infty) = +\infty$$

$$\ell + (-\infty) = -\infty, \qquad -(-\infty) = +\infty, \qquad (-\infty) + (-\infty) = -\infty, \qquad -\infty < \ell < +\infty.$$

— Pour $\ell \in \mathbb{R}^*$ on pose :

$$\ell \times (+\infty) = \begin{cases} +\infty & \text{si } \ell > 0 \\ -\infty & \text{si } \ell < 0. \end{cases} \qquad \ell \times (-\infty) = \begin{cases} -\infty & \text{si } \ell > 0 \\ +\infty & \text{si } \ell < 0. \end{cases} \qquad \begin{array}{l} (+\infty) \times (+\infty) = +\infty \\ (+\infty) \times (-\infty) = -\infty \end{array}$$

Malgré tout, certaines expressions ne sont pas définies :

$$0 \times (+\infty), \quad 0 \times (-\infty), \quad (+\infty) + (-\infty).$$

Ces expressions sont appelées **formes indéterminées**.

■ Intervalles de l'ensemble $\mathbb{R}$

Soient a et b deux éléments de $\overline{\mathbb{R}}$ tels que $a < b$. On appelle **intervalle ouvert** d'extrémités a et b le sous-ensemble de $\mathbb{R}$ noté $]a, b[$ défini par :

$$]a, b[= \{ \, x \in \mathbb{R} \ | \ a < x < b \, \}\cdot$$

Soient a et b deux nombres réels tels que $a \leqslant b$. On appelle **intervalle fermé** d'extrémités a et b le sous-ensemble de $\mathbb{R}$ noté $[a, b]$ défini par :

$$[a, b] = \{ x \in \mathbb{R} \mid a \leqslant x \leqslant b \}\cdot$$

Si a et b deux nombres réels tels que $a \leqslant b$, on définit de même l'**intervalle semi-ouvert** à droite (resp. à gauche) d'extrémités a et b par :

$$[a, b[= \{ x \in \mathbb{R} \mid a \leqslant x < b \} \qquad (\text{resp. }]a, b] = \{ x \in \mathbb{R} \mid a < x \leqslant b \})\cdot$$

Soit a un nombre réel. On appelle **intervalle ouvert de centre** a toute intervalle de type

$$]a - \varepsilon, a + \varepsilon[$$

où ε désigne un nombre réel strictement positif. Enfin, on pose :

$$[a, +\infty[= \{ x \in \mathbb{R} \mid x \geqslant a \}, \qquad]-\infty, a] = \{ x \in \mathbb{R} \mid x \leqslant a \}$$
$$]a, +\infty[= \{ x \in \mathbb{R} \mid x > a \}, \qquad]-\infty, a[= \{ x \in \mathbb{R} \mid x < a \}.$$

Valeur absolue

Définition 1.1 *Soit x un nombre réel. La **valeur absolue** de x est le nombre positif, noté $|x|$, défini par :*

$$|x| = \sup\{x, -x\}$$

Il résulte immédiatement de la définition que :

$$\forall x \in \mathbb{R} : \qquad |x| \geqslant 0, \ \ |x| = |-x|, \ \ |x| \geqslant x.$$

Proposition 1.1 *Soient x et y deux nombres réels, on a :*

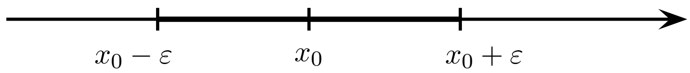
- $|xy| = |x||y|$
- $|x + y| \leqslant |x| + |y|$ *(inégalité triangulaire)*

Voisinages

Définition 1.2 *Soit x_0 un nombre réel. On appelle **voisinage fondamental** de x_0 tout intervalle ouvert non vide de centre x_0.*

On note $V_\varepsilon(x_0)$ le voisinage fondamental de x de rayon ε $(\varepsilon > 0)$:

$$V_\varepsilon(x_0) = \{x \in \mathbb{R} \, : \, x_0 - \varepsilon < x < x_0 + \varepsilon\} = \{x \in \mathbb{R} \, : \, |x_0 - x| < \varepsilon\}$$



Définition 1.3 *On appelle **voisinage** d'un nombre réel x_0 toute partie de $\mathbb{R}$ qui contient un voisinage fondamental de x.*

Définition 1.4 *On appelle **voisinage de** $+\infty$ $\big($resp. $-\infty$ $\big)$ toute partie de $\mathbb{R}$ contenant un intervalle de la forme $]a, +\infty[$ $\big($resp. $]-\infty, a[$ $\big)$ où $a \in \mathbb{R}$.*

Notion de fonction numérique d'une variable réelle

Définition 1.5 *Une **fonction numérique d'une variable réelle** est une relation de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$ telle qu'à tout élément de $\mathbb{R}$ est associé un élément au plus de $\mathbb{R}$. On note $f : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$.*

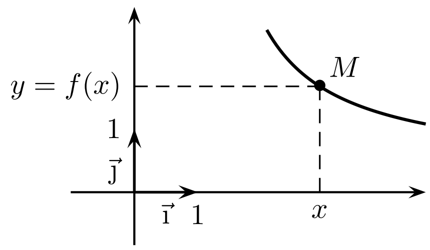
On définit souvent une telle fonction f en donnant l'expression, en fonction de x, de l'image $f(x)$ du réel x. On note $f : x \longmapsto f(x)$.

Définition 1.6 *Soit $f : E \longrightarrow F$ une fonction. On appelle **domaine de définition** (ou **ensemble de définition**) de f la partie de $\mathbb{R}$ constituée des éléments ayant (exactement) une image ; nous la noterons désormais D_f.*

Représentation graphique

Définition 1.7 *Soit $\mathcal{R} = (O, \overrightarrow{i}, \overrightarrow{j})$ un repère cartésien du plan et f une fonction. On appelle représentation graphique (ou courbe représentative) de f dans $\mathcal{R}$ l'ensemble $\mathscr{C}_f = \{M(x, f(x)) | x \in \mathrm{D}_f\}$ où $M(x, y)$ désigne le point de coordonnées (x, y) dans $\mathcal{R}$.*

Lorsque x décrit $\mathrm{D}_f \subset \mathbb{R}$, le point $M(x, y)$ où $y = f(x)$ décrit dans ce plan la courbe $\mathscr{C}_f$ de la fonction f dans le repère choisi.

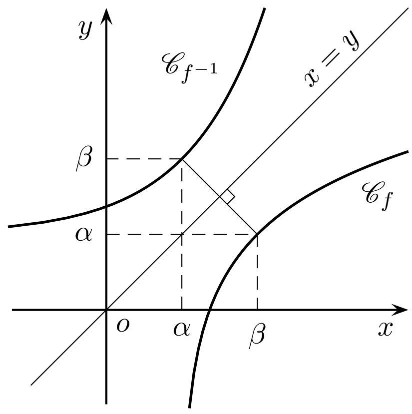


Graphe d'une fonction réciproque

Soit E et F deux parties de $\mathbb{R}$. Soit f une fonction réelle d'une variable réelle, bijective de E dans F. La fonction réciproque f^{-1} existe et le graphe de f^{-1} est symétrique de celui de f par rapport à la première bissectrice (droite d'équation $x = y$). En effet,

$$\beta = f^{-1}(\alpha) \Longleftrightarrow \alpha = f(\beta) \qquad \text{Soit,} \qquad (\alpha, \beta) \in \mathscr{C}_{f^{-1}} \Longleftrightarrow (\beta, \alpha) \in \mathscr{C}_f$$

Les points (α, β) et (β, α) sont symétriques l'un de l'autre par rapport à la première bissectrice.



Sens de variation

Définition 1.8 *Soit f une fonction réelle et I un intervalle de $\mathbb{R}$, tel que $I \subset \mathrm{D}_f$*

— *On dit que f est* ***croissante*** *sur I si :* $\forall (x,y) \in I^2, \quad x < y \Longrightarrow f(x) \leqslant f(y)$

— *On dit que f est* ***décroissante*** *sur I si :* $\forall (x,y) \in I^2, \quad x < y \Longrightarrow f(x) \geqslant f(y)$

— *f est* ***strictement croissante*** *sur I si :* $\forall (x,y) \in I^2, \quad x < y \Longrightarrow f(x) < f(y)$

— *f est* ***strictement décroissante*** *sur I si :* $\forall (x,y) \in I^2, \quad x < y \Longrightarrow f(x) > f(y)$

Pour étudier la croissante ou la décroissante de f, on introduit le rapport :

$$\frac{f(x) - f(y)}{x - y} \quad \text{où} \quad x \neq y.$$

appelé aussi **taux d'accroissement** de f. Ainsi, f est croissante (resp. strictement croissante) sur I si et seulement si :

$$\forall (x,y) \in I^2, \qquad x \neq y \Longrightarrow \frac{f(x) - f(y)}{x - y} \geqslant 0 \quad (\text{resp.} \quad > 0).$$

2. Limite et continuité

Il est parfois nécessaire d'étudier le comportement d'une fonction $f(x)$ lorsque x s'approche d'un point situé au bord de son domaine de définition ; il y a plusieurs possibilités.

Limite en un point

Définition 1.9 *On dit que f a pour limite ℓ ($\ell \in \mathbb{R}$) en x_0 si :*

$$\forall\, \varepsilon > 0, \ \exists\, \eta > 0, \ \forall\, x \in \mathrm{D}_f \quad : \quad 0 < |x - x_0| < \eta \ \Longrightarrow |f(x) - \ell| < \varepsilon.$$

On dit aussi « f converge vers ℓ quand x tend vers x_0 ». On note $\lim\limits_{x \to x_0} f(x) = \ell$.

Cette définition ne précise pas si f est définie ou non en x_0. Dans le cas où f est définie en x_0, la valeur de la limite ne dépend pas de $f(x_0)$ c-à-d que ℓ peut être *différent* de $f(x_0)$.

Limite à droite et limite à gauche

— On dit que ℓ est une **limite à droite** de f en x_0 et on note $\lim\limits_{x \to x_0^+} f(x) = \ell$ ou $\lim\limits_{\substack{x \to x_0 \\ x > x_0}} f(x) = \ell$ si :

$$\forall\, \varepsilon > 0, \ \exists\, \eta > 0, \ \forall\, x \in \mathrm{D}_f \quad : \quad x_0 < x < x_0 + \eta \Longrightarrow |f(x) - \ell| < \varepsilon.$$

— On dit que ℓ est une **limite à gauche** de f en x_0 et on note $\lim\limits_{x \to x_0^-} f(x) = \ell$ ou $\lim\limits_{\substack{x \to x_0 \\ x < x_0}} f(x) = \ell$ si :

$$\forall\, \varepsilon > 0, \ \exists\, \eta > 0, \ \forall\, x \in \mathrm{D}_f \quad : \quad x_0 - \eta < x < x_0 \Longrightarrow |f(x) - \ell| < \varepsilon.$$

Théorème 1.1 *Soit f une fonction définie au voisinage de x_0 (sauf peut-être en x_0) et $\ell \in \mathbb{R}$. On a*

$$\lim_{x \to x_0} f(x) = \ell \Longleftrightarrow \lim_{x \to x_0^-} f(x) = \lim_{x \to x_0^+} f(x) = \ell$$

Théorème 1.2 ***(Unicité de la limite)*** *Soit f une fonction réelle et $x_0 \in \mathbb{R}$. Si f admet une limite ℓ en x_0, cette limite est unique.*

Limite infinie en x_0

— On dit que f **tend vers** $+\infty$ **lorsque** x **tend vers** x_0 et on note $\lim_{x\to x_0} f(x) = +\infty$ si :

$$\forall\, A > 0,\ \exists\, \eta > 0,\ \forall x \in \mathrm{D}_f \quad : \quad 0 < |x - x_0| < \eta \Longrightarrow f(x) > A.$$

— On dit que f **tend vers** $-\infty$ **lorsque** x **tend vers** x_0 et on note $\lim_{x\to x_0} f(x) = -\infty$ si :

$$\forall\, A > 0,\ \exists\, \eta > 0,\ \forall x \in \mathrm{D}_f \quad : \quad 0 < |x - x_0| < \eta \Longrightarrow f(x) < -A.$$

Limite à l'infini

— On dit que f **tend vers** ℓ **lorsque** x **tend vers** $-\infty$ et on note $\lim_{x\to -\infty} f(x) = \ell$ si :

$$\forall\, \varepsilon > 0,\ \exists\, B < 0,\ \forall x \in \mathrm{D}_f : \quad x < B \Longrightarrow |f(x) - l| < \varepsilon$$

— On dit que f **tend vers** ℓ **lorsque** x **tend vers** $+\infty$ et on note $\lim_{x\to +\infty} f(x) = \ell$ si :

$$\forall\, \varepsilon > 0,\ \exists\, A > 0,\ \forall x \in \mathrm{D}_f : \quad x > A \Longrightarrow |f(x) - l| < \varepsilon$$

Opérations sur les limites

Soit x_0 un élément de $\overline{\mathbb{R}}$ et f et g deux fonction qui ont des limites lorsque x tend vers x_0.

▶ Théorème de comparaison

Proposition 1.2 *Soit V un voisinage de x_0. On a les résultats suivants :*

— $\big(\forall\, x \in V - \{x_0\}, \quad f(x) \geqslant 0\big) \Longrightarrow \lim_{x_0} f \geqslant 0$

— $\big(\forall\, x \in V - \{x_0\}, \quad f(x) \geqslant g(x)\big) \Longrightarrow \lim_{x_0} f \geqslant \lim_{x_0} g$

Théorème 1.3 *Soient f, g et h trois fonctions définies sur un voisinage V de x_0, alors :*

$$\left.\begin{array}{c} \forall\, x \in V - \{x_0\},\ \ f(x) \leqslant h(x) \leqslant g(x) \\ \lim_{x_0} f(x) = \lim_{x_0} g(x) = \ell \in \mathbb{R} \end{array}\right\} \Longrightarrow h \text{ admet une limite en } x_0 \text{ et } \lim_{x_0} h(x) = \ell$$

▶ Limite d'une fonction composée

Théorème 1.4 *Soient f et g deux fonctions. Soient x_0, ℓ, ℓ' trois éléments de $\overline{\mathbb{R}}$. Alors :*

$$\left.\begin{array}{l} \lim_{x\to x_0} f(x) = \ell \\ \lim_{x\to \ell} g(x) = \ell' \end{array}\right\} \Longrightarrow \lim_{x\to x_0} g \circ f(x) = \ell'$$

▶ Les tableaux des résultats

Les tableaux suivants fournissent, lorsque c'est possible, les limites des fonctions $f+g$, λf, fg et $\dfrac{1}{f}$ en fonctions des limites de f et g. Dans les cas signalés par « IND », il n'y a pas de conclusion en général ; on dit alors que c'est un cas de **forme indéterminée**.

$\boldsymbol{f+g}$		$\lim f$		
		ℓ	$+\infty$	$-\infty$
$\lim g$	ℓ'	$\ell+\ell'$	$+\infty$	$-\infty$
	$+\infty$	$+\infty$	$+\infty$	IND
	$-\infty$	$-\infty$	IND	$-\infty$

$\boldsymbol{\lambda f}$		$\lim f$		
		ℓ	$+\infty$	$-\infty$
λ	0	0	0	0
	>0	$\lambda\ell$	$+\infty$	$-\infty$
	<0	$\lambda\ell$	$-\infty$	$+\infty$

$\boldsymbol{fg}$		$\lim f$		
		0	$\ell\neq 0$	∞
$\lim g$	0	0	0	IND
	$\ell'\neq 0$	0	$\ell\ell'$	∞
	∞	IND	∞	∞

$\lim f$	$-\infty$	$\ell\neq 0$	0^+	0^-	$+\infty$
$\lim \dfrac{1}{f}$	0^-	$\dfrac{1}{\ell}$	$+\infty$	$-\infty$	0^+

▶ ∞ désigne $+\infty$ ou $+\infty$, on pourra alors déterminer le bon choix à l'aide de la règle des signes.

Pour le cas $\dfrac{f}{g}$, on utilise les résultats des deux derniers tableaux puisque $\dfrac{f}{g}=f\cdot\dfrac{1}{g}$

Les situations où l'on peut pas conclure à partir des opérations sur les limites sont les formes indéterminées :

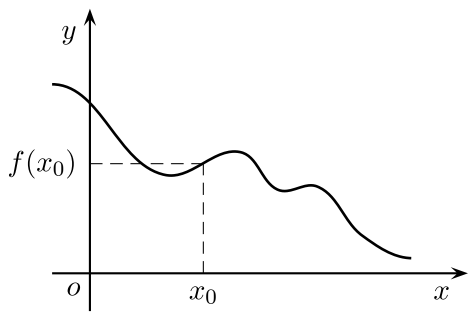
$$0\cdot\infty,\qquad \frac{0}{0},\qquad \frac{\infty}{\infty},\qquad +\infty-\infty$$

Elles nécessiteront une étude particulière chaque fois qu'elles se présenteront.

■ Continuité

Les notions de limites et continuité des des points de passage obligés vers celle de dérivée si utile dans tous les raisonnements marginaux en économie.

Définition 1.10 *Une fonction f est **continue en** x_0 si* $\lim\limits_{x_0} f(x)=f(x_0)$.



fonction continue en x_0

Définition 1.11

— *On dit que f est* ***continue à droite en*** x_0 *si* $\lim\limits_{x_0^+} f(x) = f(x_0)$

— *On dit que f est* ***continue à gauche en*** x_0 *si* $\lim\limits_{x_0^-} f(x) = f(x_0)$

Proposition 1.3 *f est continue en x_0 si, et seulement si elle est continue à droite et à gauche en x_0.*

Théorème 1.5 *Soient f et g deux fonctions continues en x_0, λ un nombre réel. Alors,*

— *les fonctions $f+g$, $f \cdot g$ et λf sont continues en x_0.*

— *si de plus, $g(x_0) \neq 0$, la fonction $\dfrac{1}{g}$ est continue en x_0.*

Prolongement par continuité

Soit f une fonction définie au voisinage de x_0 *sauf en* x_0 et admettant une limite réelle ℓ en x_0. Alors la fonction $\tilde{f}$ définie par

$$\tilde{f}(x) = \begin{cases} f(x) & \text{si} \quad x \neq x_0 \\ \ell & \text{si} \quad x = x_0 \end{cases}$$

est continue en x_0.

Définition 1.12 *La fonction $\tilde{f}$ s'appelle* ***prolongement par continuité*** *de f en x_0. On dira alors que f est* ***prolongeable par continuité*** *en x_0.*

Propriétés de la continuité sur un intervalle

Définition 1.13 *Soit f une fonction définie sur un intervalle I.*

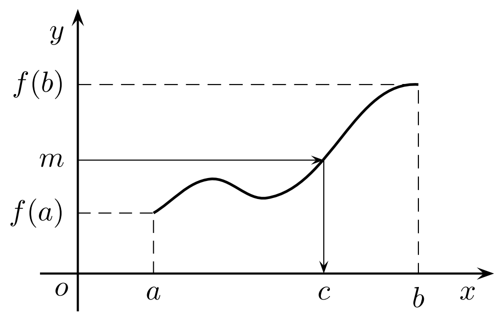
— *Lorsque I est un intervalle ouvert et lorsque f est continue en tout point de I, on dit que f* ***continue sur I****.*

— *Lorsque $I = [a,b]$, où $a < b$, on dit que f est continue sur I lorsque f est continue sur $]a,b[$, continue à droite en a et continue à gauche en b.*

Théorème des valeurs intermédiaires

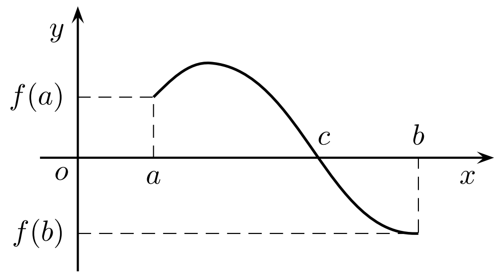
Théorème 1.6 *Soit f une fonction réelle continue sur un intervalle $I = [a,b]$. Alors pour toute valeur $\boldsymbol{m}$ comprise entre $f(a)$ et $f(b)$, il existe au moins un $\boldsymbol{c} \in [a,b]$ tel que $\boldsymbol{m} = f(\boldsymbol{c})$.*

Autrement dit, toute valeur intermédiaire aux images de deux points d'un intervalle où f est continue est elle-même une image et admet un antécédent intermédiaire à ces deux points.



Corollaire 1.1 *Si une fonction f est continue sur un intervalle fermé $[a, b]$ et $f(a)f(b) < 0$ alors il existe au moins un élément $c \in]a, b[$ tel que $f(c) = 0$.*

Autrement dit, une fonction continue ne peut changer de signe sur un intervalle qu'en s'annulant en un point de cet intervalle.



3. Dérivabilité

Définition 1.14 *Soit f une fonctions réelle définie au voisinage de x_0. f est dite **dérivable en $\boldsymbol{x_0}$** si son taux d'accroissement $\dfrac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0}$ en x_0 admet une limite finie quand x tend vers x_0. Cette limite est alors appelée **dérivée de $\boldsymbol{f}$ en $\boldsymbol{x_0}$** et notée $f'(x_0)$:*

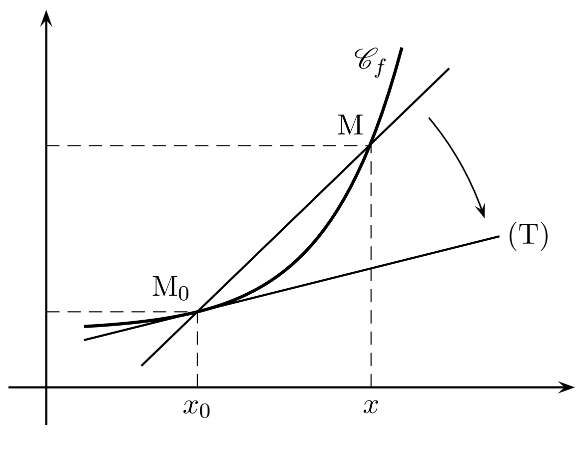
$$f'(x_0) = \lim_{x \to x_0} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0}$$

Il est souvent pratique de se ramener à une limite en 0 : notons $h = x - x_0$, donc lorsque x tend vers x_0, le nombre h tend vers 0 et par suite,

$$f'(x_0) = \lim_{x \to x_0} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} = \lim_{h \to 0} \frac{f(x_0 + h) - f(x_0)}{h}.$$

■ Interprétation géométrique : équation de la tangente

Soit $\mathscr{C}_f$ la courbe de f dans $\mathbb{R}^2$ rapporté à un repère cartésien. Considérons sur cette courbe deux points M_0 d'abscisse x_0 et M d'abscisse x, le premier fixe et le second susceptible de varier



Le coefficient directeur (ou la pente) de la droite $(\mathrm{M}_0\mathrm{M})$ est :

$$\frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0}.$$

Dire que f est dérivable en x_0 revient à dire que le coefficient directeur $(\mathrm{M_0M})$ admet une limite en x_0, qui n'est autre que $f'(x_0)$. Ainsi, la droite $(\mathrm{M_0M})$ a pour position limite la droite (T). La droite (T) s'appelle **tangente** à $\mathscr{C}_f$ en x_0.

Si $f'(x_0)$ est finie, la tangente est non parallèle à l'axe Oy et son **équation** est :

$$y = f(x_0) + (x - x_0)f'(x_0).$$

Si $f'(x_0)$ est infinie (égal à $-\infty$ ou $+\infty$), la tangente est parallèle à l'axe Oy.

Définition 1.15 *On dit que f est **dérivable à droite** (resp. **à gauche**) **en x_0** si le taux d'accroissement de f en x_0 admet en ce point une limite à droite (resp. à gauche), que l'on note $f'_{\mathrm{d}}(x_0)$ (resp. $f'_{\mathrm{g}}(x_0)$).*

On a :

$$f'_{\mathrm{d}}(x_0) = \lim_{x \to x_0^+} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0}, \qquad f'_{\mathrm{g}}(x_0) = \lim_{x \to x_0^-} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0}$$

Proposition 1.4 *f est dérivable en x_0 si, et seulement si, $f'_{\mathrm{d}}(x_0)$ et $f'_{\mathrm{g}}(x_0)$ existent et $f'_{\mathrm{d}}(x_0) = f'_{\mathrm{g}}(x_0)$.*

Théorème 1.7 *f dérivable en $x_0 \implies f$ continue en x_0.*

■ Fonction dérivée

Soit f une fonction définie sur un intervalle I de $\mathbb{R}$. On suppose que pour tout $x \in I$, f admet une dérivée $f'(x)$.

Définition 1.16 *On appelle **fonction dérivée** de f et on la note f' la fonction qui à tout point x de I associe le nombre $f'(x)$.*

▶ Dérivées et opérations

Soit f et g deux fonctions dérivables sur un intervalle I et $\alpha \in \mathbb{R}$. On a :

$$(\alpha f)' = \alpha f' \ ; \qquad (f+g)' = f' + g' \ ; \qquad (fg)' = f'g + g'f \ ; \qquad \left(\frac{f}{g}\right) = \frac{f'g - fg'}{g^2}$$

▶ Dérivée des fonctions composées et réciproques

$$(f \circ g)' = (f' \circ g) \times g' \ ; \qquad (f^{-1})' = \frac{1}{f' \circ f^{-1}}$$

▶ Tableau des dérivées usuelles

$f(x)$	D_f	$f'(x)$	$\mathrm{D}_{f'}$
$x^n \quad (n \in \mathbb{N}^*)$	$\mathbb{R}$	nx^{n-1}	$\mathbb{R}$
$x^\alpha \quad (\alpha \in \mathbb{R}^*)$	☞ $\mathbb{R}_+^*$	$\alpha x^{\alpha-1}$	☞ $\mathbb{R}_+^*$
$\cos x$	$\mathbb{R}$	$-\sin x$	$\mathbb{R}$
$\sin x$	$\mathbb{R}$	$\cos x$	$\mathbb{R}$
$\operatorname{tg} x$	$\mathbb{R} - \{\frac{\pi}{2} + k\pi,\ k \in \mathbb{Z}\}$	$1 + \operatorname{tg}^2 x$	$\mathbb{R} - \{\frac{\pi}{2} + k\pi,\ k \in \mathbb{Z}\}$

☞ Suivant les valeurs de l'exposant α, les domaines D_f et $\mathrm{D}_{f'}$ peuvent être prolongés à $\mathbb{R}^*$ ou à $\mathbb{R}$.

▶ Dérivées successives

Soit f une fonction dérivable sur $I \subset \mathbb{R}$. Si f' est dérivable sur I, on note f'' ou $f^{(2)}$ la dérivée de f' : f'' s'appelle la dérivée seconde de f.

Par récurrence sur $n \in \mathbb{N}$, $n \geqslant 2$, on définit la dérivée $n^{\text{ième}}$ de f, notée $f^{(n)}$, par $f^{(n)} = (f^{(n-1)})'$ lorsque $f^{(n-1)}$ est dérivable sur I.

■ Variations d'une fonction

▶ Signe de la dérivée et sens de variation

Soit f une fonction dérivable sur un intervalle $I \subset \mathbb{R}$. Si on a $f'(x) > 0$ (resp. $f'(x) < 0$) pour tout $x \in I$, alors f est strictement croissante (resp. décroissante) sur I.

▶ Extremum

Soit f une fonction définie sur un intervalle I et $x_0 \in I$; on dit que f admet un maximum (resp. un minimum) local en x_0 s'il existe un intervalle ouvert $J \subset I$, de centre x_0, tel que :

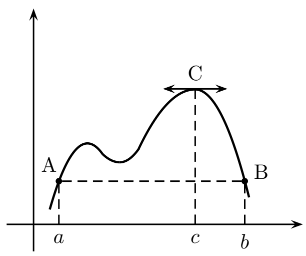
$$\forall\, x \in J, \quad f(x) \leqslant f(x_0) \qquad (\text{resp. } f(x) \geqslant f(x_0)$$

— Si f est dérivable en x_0, une condition nécessaire pour que $f(x_0)$ soit un extremum (maximum ou minimum) local en $_0$ est : $f'(x_0) = 0$.

— Si f est dérivable sur un voisinage de x_0 et si f' s'annule en x_0 en changeant de signe, alors $f(x_0)$ est un extremum local.

■ Théorème de rolle. Théorème des accroissements finis

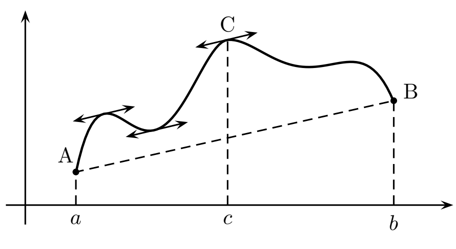
Théorème 1.8 ***(Théorème de Rolle)*** *Soit f continue sur $[a, b]$, dérivable sur $]a, b[$ telle que $f(a) = f(b)$, alors il existe $c \in]a, b[$ tel que $f'(c) = 0$*



Géométriquement, le théorème signifie qu'il existe au moins un point d'abscisse c où la courbe $\mathscr{C}_f$ de f admet une tangente horizontale.

Théorème 1.9 ***(Théorème des accroissements finis)*** *Soit f continue sur $[a, b]$, dérivable sur $]a, b[$, alors il existe $c \in]a, b[$ tel que*

$$f(b) - f(a) = (b - a)f'(c)$$



Géométriquement, il existe au moins un point d'abscisse c où la courbe $\mathscr{C}_f$ de f admet une tangente parallèle à la droite AB.

4. Etude d'une fonction

■ Symétries

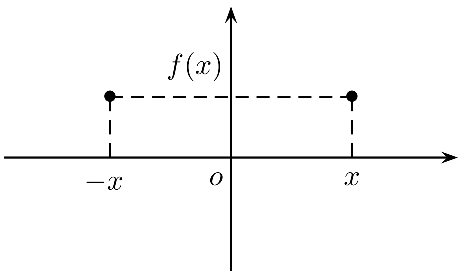
Définition 1.17 *Une fonction f, dont le domaine de définition est D_f, est dite :*

— ***paire*** *si* $\forall x \in \mathrm{D}_f \quad -x \in \mathrm{D}_f \quad \text{et} \quad f(-x) = f(x).$

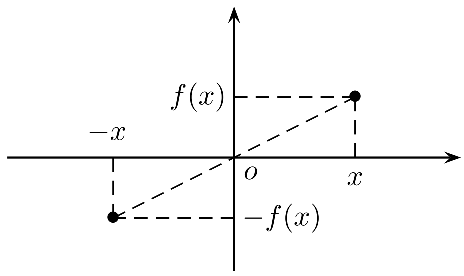
— ***impaire*** *si* $\forall x \in \mathrm{D}_f \quad -x \in \mathrm{D}_f \quad \text{et} \quad f(-x) = -f(x).$

Soit f une fonction de courbe $\mathscr{C}_f$ dans le repère cartésien orthogonal $(O, \vec{i}, \vec{j})$. On a :

f est paire $\iff$ l'axe des ordonnées Oy est axe de symétrie de $\mathscr{C}_f$
f est impaire $\iff$ l'origine O du repère est centre de symétrie de $\mathscr{C}_f$.



symétrie par rapport à Oy



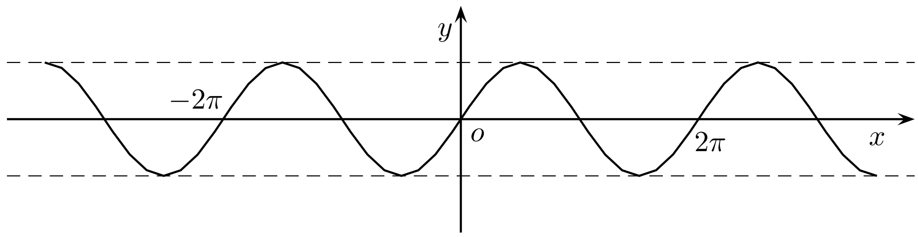
symétrie par rapport à O

Définition 1.18 *Une fonction f, dont le domaine de définition est D_f est dite* ***périodique*** *s'il existe un nombre $P \neq 0$, tel que*

$$\forall x \in \mathrm{D}_f \quad x + P \in \mathrm{D}_f \quad \text{et} \quad f(x+P) = f(x).$$

Un tel nombre P est appelé ***période*** *de la fonction.*

La fonction définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = \sin x$ est périodique de période $P = 2\pi$



■ Branches infinies

Soit f une fonction numérique et $\mathscr{C}_f$ sa courbe représentative.

Définition 1.19 *Soit f une fonction réelle et $x \in \mathrm{D}_f$. On dit que le point $M(x, f(x))$ décrit une branche infinie de $\mathscr{C}_f$ si l'une au moins de ses coordonnées est non bornée.*

— Si $\displaystyle\lim_{x \to \pm\infty} \frac{f(x)}{x} = a \in \mathbb{R}$, on dit que $\mathscr{C}_f$ admet une branche infinie dans la direction de la droite d'équation $y = ax$.

— Si $\lim\limits_{x\to\pm\infty} \dfrac{f(x)}{x} = \pm\infty$, on dit que $\mathscr{C}_f$ admet une branche parabolique de direction Oy.

— S'il existe un couple (a, b) de nombres réels tel que :

$$\lim_{x\to\pm\infty} [f(x) - (ax + b)] = 0$$

alors la droite d'équation $y = ax + b$ est dite asymptote à $\mathscr{C}_f$ en $\pm\infty$.

— Si $\lim\limits_{x\to x_0} f(x) = \pm\infty$, la droite d'équation $x = x_0$ est dite asymptote à $\mathscr{C}_f$.

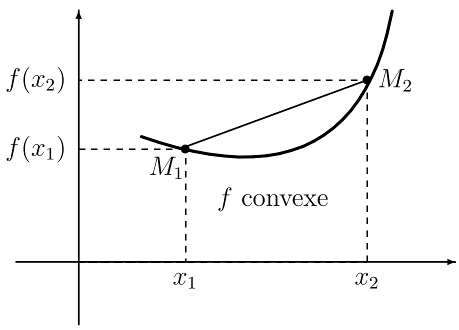
■ Convexité. Points d'inflexion

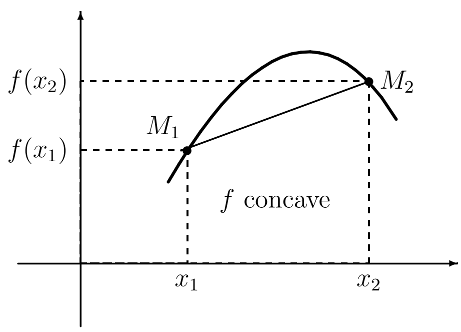
Soit f une fonction définie sur un intervalle I de $\mathbb{R}$ et $\mathscr{C}_f$ sa courbe représentative.

Définition 1.20 *On dit que f est convexe si et seulement si :*

$$\forall\, x \in I, \quad \forall\, y \in I, \quad \forall\, t \in [0, 1], \quad f((1-t)x + ty) \leqslant (1-t)f(x) + tf(y)$$

Si on change le sens de l'inégalité, dans la définition ci-dessus, f est dite concave.





Géométriquement, une fonction f est convexe (resp. concave) si, tout arc $\widehat{M_1M_2}$ de sa courbe $\mathscr{C}_f$ est situé au-dessous (resp. au-dessus) du segment $[M_1, M_2]$.

► Fonctions convexes dérivables

Nous allons maintenant essayer de caractériser les fonctions convexes à partir des conditions portant sur leurs dérivées.

Théorème 1.10 *Soit f une fonction dérivable sur un intervalle I. On a :*

a) *f est convexe sur $I \iff f'$ est croissante sur I.*

b) *f est concave sur $I \iff f'$ est décroissante sur I.*

Si de plus on suppose que la fonction f a une dérivée seconde f'' sur l'intervalle I, on obtient le résultat suivant :

Corollaire 1.2 *Soit f une fonction deux fois dérivable sur un intervalle I. On a :*

a) *f est convexe sur $I \iff f'' \geqslant 0$ sur I.*

b) *f est concave sur $I \iff f'' \leqslant 0$ sur I.*

▶ Points d'inflexion

Un **point d'inflexion** est un point où la courbure de la fonction change de sens. II est evident qu'en un point d'inflexion la tangente traverse la courbe, puisque d'un côté de ce point la courbe est disposée au-dessus de la tangente et de l'autre côté au-dessous.

Si en un point $x_0 \in I$, f'' s'annule en changeant de signe, alors le point $M(x_0, f(x_0))$ est un point d'inflexion puisque le signe de la dérivée seconde nous indique le sens de courbure de la fonction.

■ Tableau de variation

Une fois que l'on a déterminé toutes les variations d'une fonction sur son domaine de définition, on dresse un bilan. C'est ce que l'on appelle un tableau de variation. Nous pouvons résumer dans ce tableau tout ce qui est intéressant : les points particuliers, la convexité et la croissance de la fonction. Voici un exemple fictif d'un tableau de variation de la fonction f :

x	$-\infty$		x_1		x_2		x_3		x_4		x_5		$+\infty$
$f'(x)$		$-$		$-$	0	$+$		$+$	0	$-$		$-$	
$f''(x)$		$-$	0	$+$		$+$	0	$-$		$-$	0	$+$	
		$\searrow$						$\nearrow$	max	$\searrow$			
$f(x)$			pix				pix				pix		
				$\searrow$	min	$\nearrow$						$\searrow$	

Les fleches $\searrow$ indiquent que la fonction décroît, tandis que les fleches $\nearrow$ indiquent que la fonction croît. les abrégés pix, min et max indiquent respectivement un point d'inflexion, un minimum et un maximum.

■ Plan d'étude d'une fonction

Pour l'étude d'une fonction f, on pourra adopter le plan suivant :

— Détermination du domaine de définition D_f de f et étude de la continuité sur D_f

— Réduction du domaine d'étude (parité ou périodicité éventuelles)

— Calcul des limites aux bornes du domaine d'étude

— Calcul de la dérivée lorsque f est dérivable et détermination de son signe.

— Création du tableau de variation

— Etude des branches infinies et détermination des asymptotes éventuelles.

— Représentation graphique de f : on fera figurer sur le graphique de f les points intéressants tels que les extremums, les points d'inflexion, les points où la courbe coupe les axes de coordonnées ainsi que les tangentes remarquables.

2 Primitives. Calcul intégral

1. Primitives

Définition 2.1 *On appelle* ***primitive*** *d'une fonction réelle f sur un intervalle I toute fonction F dérivable sur I dont la dérivée est f.*

Autrement dit, la fonction F est une primitive de F sur I si F est derivable sur I et $\forall\, x \in I$, $F'(x) = f(x)$.

Théorème 2.1 *Si F est une primitive de f sur l'intervalle I, alors l'ensemble des primitives de f sur I est l'ensembles des fonctions de la forme $\Phi = F + \mathrm{C}$ où C est une fonction constante arbitraire.*

Théorème 2.2 *Si f admet des primitives sur l'intervalle I, il y a une seule primitive de f qui prend une valeur donnée en un point fixé de I.*

Autrement dit, il existe une primitive et une seule prenant une valeur donnée k en $x_0 \in I$; c'est la fonction $\Phi(x) = F(x) - F(x_0) + k$ où F est une primitive quelconque de f.

Théorème 2.3 ***(Théorème d'existence)*** *Toute fonction continue sur un intervalle I admet une primitive sur cet intervalle.*

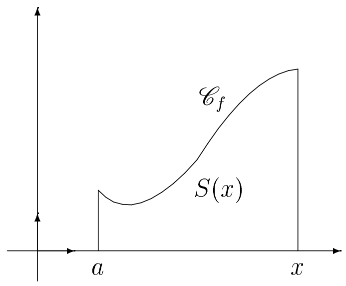
Certaines fonctions continues, comme $x \longmapsto \mathrm{e}^{-x^2}$, admettent bien sûr des primitives (théorème d'existence), mais on ne peut pas exprimer ces primitives à l'aide des fonctions usuelles.

Notation : On note $\int f(x)\,\mathrm{d}x$ l'une quelconque des primitives. On écrit, par exemple :

$$\int \frac{\mathrm{d}x}{1+x^2} = \mathrm{Arc\,tg}\, x + \mathrm{C}$$

■ Interprétation géométrique

Soit f une fonction définie et continue sur un intervalle $[a, b]$. Soient $\mathscr{C}_f$ la courbe de f dans un repère orthonormé et x un point de $[a, b]$. Supposons que $f(x)$ ne change pas de signe entre a et x. L'aire du domaine délimité par la courbe $\mathscr{C}_f$, l'axe des abscisses et les droites verticaux passant par a et x respectivement sera donc une fonction de x. Soit $S(x)$ cette fonction.



Nous allons adopter la convention de signe suivante :

— Si entre a et x, $f(x)$ est positive, $S(x)$ sera comptée positivement si $a < x$ et négativement si $a > x$

— Si entre a et x, $f(x)$ est négative, $S(x)$ sera comptée négativement si $a < x$ et positivement si $a > x$

— Si f change de signe entre a et x, on décompose l'intervalle $[a, x]$ en segments où f est positive et en segments où f est négative. L'aire totale sera la somme des aires relatives à ces sous-intervalles.

Théorème 2.4 *La fonction $S(x)$ est la primitive de $f(x)$ qui s'annule en a.*

■ Tableau des primitives usuelles

Le tableau suivant contient des primitives à connaître.

Fonction	Intervalles de définition	Primitive
$x^n \ (n \in \mathbb{N}$ et $n \geqslant 0)$	$]-\infty, +\infty[$	$\dfrac{x^{n+1}}{n+1}$
$x^n \ (n \in \mathbb{Z}$ et $n \neq -1)$	$]-\infty, 0[$ ou $]0, +\infty[$	$\dfrac{x^{n+1}}{n+1}$
$x^\alpha \ (\alpha \neq -1)$	$]0, +\infty[$	$\dfrac{x^{\alpha+1}}{\alpha+1}$
$\sin x$	$\mathbb{R}$	$-\cos x$
$\cos x$	$\mathbb{R}$	$\sin x$
$1 + \operatorname{tg}^2 x$	$\left]-\dfrac{\pi}{2} + k\pi, \dfrac{\pi}{2} + k\pi\right[, \ k \in \mathbb{Z}$	$\operatorname{tg} x$
e^x	$\mathbb{R}$	e^x
$\dfrac{1}{x}$	$]-\infty, 0[$ ou $]0, +\infty[$	$\operatorname{Log} \lvert x \rvert$
$\dfrac{1}{\sqrt{1-x^2}}$	$]-1, +1[$	$\operatorname{Arc\,sin} x$
$-\dfrac{1}{\sqrt{1-x^2}}$	$]-1, +1[$	$\operatorname{Arc\,cos} x$
$\dfrac{1}{1+x^2}$	$\mathbb{R}$	$\operatorname{Arc\,tg} x$

2. Intégration

Soit f une fonction continue sur un segment $[a, b]$, et F une primitive de f sur $[a, b]$. Le réel $F(b) - F(a)$ ne dépend pas de la primitive choisie.

Définition 2.2 *Soit f une fonction continue sur le segment $[a, b]$. On appelle* ***integrale de a à b de la fonction f*** *le réel $F(b) - F(a)$, et on note*

$$\int_a^b f(t)\,\mathrm{d}t = F(b) - F(a)$$

où F est une primitive quelconque de f.

On écrit aussi : $\displaystyle\int_a^b f(t)\,\mathrm{d}t = F(b) - F(a) = \Big[F(t)\Big]_a^b$

Théorème 2.5 *Soit f une fonction continue sur un intervalle I et $a \in I$. La fonction définie par :*

$$\forall x \in I : \quad \Phi(x) = \int_a^x f(t)\,\mathrm{d}t$$

est l'unique primitive de f sur I qui s'annule en a.

Propriétés de l'intégrale

Les propriétés suivantes seront souvent utilisées dans le calcul des intégrales

Théorème 2.6 *Soit f une fonction continue sur un intervalle I et $a, b, c \in I$. Alors,*

$$\int_a^b f(t)\,\mathrm{d}t = \int_a^c f(t)\,\mathrm{d}t + \int_c^b f(t)\,\mathrm{d}t.$$

Cette égalité est appelée ***relation de Chasles****.*

Conséquences : $\displaystyle\int_a^a f(t)\,\mathrm{d}t = 0$ et $\displaystyle\int_a^b f(t)\,\mathrm{d}t = -\int_b^a f(t)\,\mathrm{d}t$

Théorème 2.7 *Soient f et g deux fonctions continues sur un intervalle I contenant a et b, et $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$. Alors,*

$$\int_a^b (\alpha f(t) + \beta g(t))\,\mathrm{d}t = \alpha \int_a^b f(t)\,\mathrm{d}t + \beta \int_a^b g(t)\,\mathrm{d}t.$$

qui s'écrit en termes de primitives :

$$\int (\alpha f + \beta g)(x)\,\mathrm{d}x = \alpha \int f(x)\,\mathrm{d}x + \beta \int g(x)\,\mathrm{d}x$$

Attention : On a pas une propriété analogue pour le produit de fonctions continues. En général on a : $\displaystyle\int_a^b f(t)g(t)\,\mathrm{d}t \neq \left(\int_a^b f(t)\,\mathrm{d}t\right) \times \left(\int_a^b g(t)\,\mathrm{d}t\right)$. Par exemple :

$$\int_0^1 x \times x^2\,\mathrm{d}x = \int_0^1 x^3\,\mathrm{d}x = \left[\frac{x^4}{4}\right]_0^1 = \frac{1}{4} \neq \left(\int_0^1 x\,\mathrm{d}x\right) \times \left(\int_0^1 x^2\,\mathrm{d}x\right) = \frac{1}{6}.$$

Théorème 2.8 ***(Positivité)*** *Soit f une fonction continue sur le segment $[a, b]$ $(a \leqslant b)$ telle que : $\forall\, t \in [a, b]$, $f(t) \geqslant 0$. Alors $\displaystyle\int_a^b f(t)\,\mathrm{d}t \geqslant 0$.*

Attention : La réciproque est fausse en générale. En effet si $\displaystyle\int_a^b f(t)\,\mathrm{d}t \geqslant 0$ on n'a pas nécessairement $f(t) \geqslant 0\ \ \forall\, t \in [a, b]$. Par exemple, on sait que la fonction x^3 n'est pas positive sur $[-1, +2]$, mais

$$\int_{-1}^{+2} x^3\,\mathrm{d}x = \left[\frac{x^4}{4}\right]_{-1}^{+2} = 4 - \frac{1}{4} \geqslant 0.$$

Proposition 2.1 *Soient f et g deux fonctions continues sur $[a, b]$ $(a \leqslant b)$ telles que : $f(t) \leqslant g(t)$ pour tout $t \in [a, b]$. Alors,*

$$\int_a^b f(t)\,\mathrm{d}t \leqslant \int_a^b g(t)\,\mathrm{d}t.$$

Il en résulte que : si f une fonction continue sur $[a, b]$ $(a \leqslant b)$, alors

$$\left|\int_a^b f(t)\,\mathrm{d}t\right| \leqslant \int_a^b |f(t)|\,\mathrm{d}t$$

Théorème 2.9 ***(Théorème de la moyenne)*** *Soit f une fonction continue sur $[a, b]$. Alors, il existe $c \in]a, b[$ tel que :*

$$\frac{1}{b-a}\int_a^b f(t)\,\mathrm{d}t = f(c).$$

3. Méthodes d'intégration

Si F est une primitive quelconque de f sur $[a, b]$: $\displaystyle\int_a^b f(t)\,\mathrm{d}t = F(b) - F(a)$. Le calcul d'intégrales se ramène donc à la recherche de primitives.

■ Intégration directe

Il s'agit d'integrales de fonctions de la forme $u'f(u)$ où f est une fonction dont une primitive est connue. Par exemple

$$\int_2^3 \frac{x\,\mathrm{d}x}{\sqrt{x^2+1}} = \left[\sqrt{x^2+1}\right]_2^3 = \sqrt{5} - \sqrt{10}$$

■ Intégration par parties

Théorème 2.10 *Si u et v sont deux fonctions de classe C^1 sur l'intervalle $[a, b]$, alors :*

$$\int_a^b u'(t)v(t)\,\mathrm{d}t = \Big[u(t)v(t)\Big]_a^b - \int_a^b u(t)v'(t)\,\mathrm{d}t.$$

qui s'écrit en termes de primitives :

$$\int f'(x)g(x)\,\mathrm{d}x = f(x)g(x) - \int f(x)g'(x)\,\mathrm{d}x$$

■ Changement de variable

Théorème 2.11 *Si f est une fonction continue sur $[a, b]$ et si u est une fonction dérivable avec u' continue sur $[\alpha, \beta]$ telle que $u([\alpha, \beta]) \subset [a, b]$, alors :*

$$\int_\alpha^\beta f(u(t))u'(t)\,\mathrm{d}t = \int_{u(\alpha)}^{u(\beta)} f(x)\,\mathrm{d}x.$$

qui s'écrit en termes de primitives :

$$\int f[u(x)]\cdot u'(x)\,\mathrm{d}x = F[u(x)] + \mathrm{C}$$

Théorème 2.12 *Dans le cas où, avec les hypothèses du Théorème 2.11, u est bijective :*

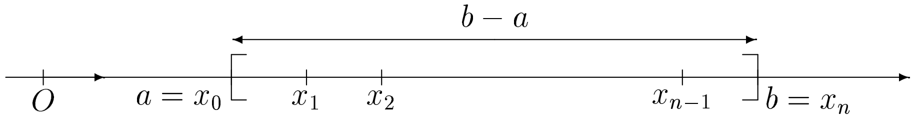
$$\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x = \int_{u^{-1}(a)}^{u^{-1}(b)} f(u(t))u'(t)\,\mathrm{d}t.$$

4. Calcul approché d'une intégrale

Définition 2.3 *Soit $[a,b]$ un intervalle de $\mathbb{R}$ $(a < b)$. Divisons $[a,b]$ en n sous-intervalles de même longueur à l'aide d'une suite $(x_i)_{0\leqslant i\leqslant n}$ strictement croissante telle que :*

$$a = x_0 < x_1 < x_2 < \cdots x_{n_1} < x_n = b.$$

*La suite $(x_i)_{0\leqslant i\leqslant n}$ est appelée **subdivision** de $[a,b]$.*



On veut déterminer les abscisses des bornes de chaque sous-intervalle : La longueur de chaque sous-intervalle $[x_k, x_{k+1}]$ est $\dfrac{b-a}{n}$, ainsi $x_{k+1} - x_k = \dfrac{b-a}{n}\cdot$ On en déduit que :

$$\forall\, k \in \{0, 1, 2, \ldots, n-1, n\}, \quad x_k = a + k\frac{b-a}{n}$$

Le réel $\dfrac{b-a}{n}$ s'appelle le **pas** de la subdivision.

Sommes de Riemann

Pour n entier donné, on définit Φ_n sur $[a,b]$ par :

$$\forall\, k \in \{0, 1, 2, \ldots, n-1\}, \quad \Phi_n(x) = f(x_k) \text{ sur } [x_k, x_{k+1}].$$

Φ_n est constante sur chaque $[x_k, x_{k+1}]$.

L'aire d'un rectangle de base $[x_k,\ x_{k+1}]$ et hauteur $f(x_k)$ vaut :

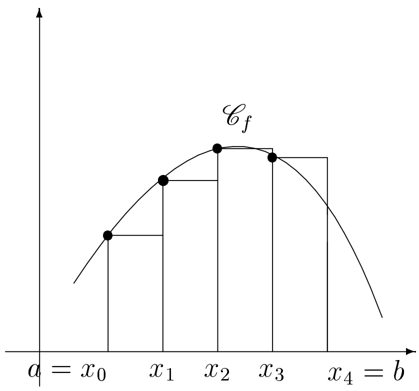
$$\mathcal{A}_k = (x_{k+1} - x_k)f(x_k) = \frac{b-a}{n} f\left(a + k\frac{b-a}{n}\right)$$

La somme $S(f,n)$ définie par :

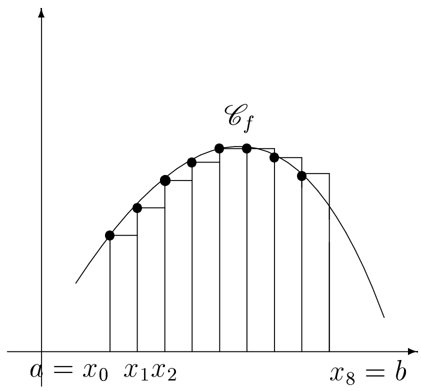
$$S(f,n) = \sum_{k=0}^{n-1}(x_{k+1} - x_k)f(x_k) = \sum_{k=0}^{n-1}\mathcal{A}_k = \frac{b-a}{n}\sum_{k=0}^{n-1} f\left(a + k\frac{b-a}{n}\right)$$

s'appelle **somme de Riemann associée à la subdivision** $(x_i)_{0\leqslant i\leqslant n}$.

Le réel $S(f,n)$ représente alors l'aire définie par $\mathscr{C}_{\Phi_n}$.



Cas d'une subdivision de pas $\dfrac{b-a}{4}$



Cas d'une subdivision de pas $\dfrac{b-a}{8}$

Remarquons que, plus le nombre n croit, plus l'aire définie par $\mathscr{C}_{\Phi_n}$ s'approche de l'aire définie par $\mathscr{C}_f$. Ainsi :

$\displaystyle \frac{b-a}{n}\sum_{k=0}^{n-1} f\left(a+k\frac{b-a}{n}\right)$ est une valeur approchée de $\displaystyle \int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x$.

Lorsque n tend vers $+\infty$, on a le théorème suivant :

Théorème 2.13 *Si f est continue sur $[a,b]$, alors*

$$\lim_{n\to+\infty}\frac{b-a}{n}\sum_{k=0}^{n-1} f\left(a+k\frac{b-a}{n}\right)=\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x.$$

Remarque : De même, si on considère la relation Ψ_n définie sur $[a,b]$ par :

$$\forall\, k\in\{1,2,\ldots,n-1,n\},\quad \Psi_n(x)=f(x_k)\ \text{ sur }\ [x_{k-1},x_k].$$

on a, pour n suffisemment grand,

$\displaystyle \frac{b-a}{n}\sum_{k=1}^{n} f\left(a+k\frac{b-a}{n}\right)$ est une valeur approchée de $\displaystyle \int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x$.

et lorsque n tend vers $+\infty$, on a aussi le théorème suivant :

Théorème 2.14 *Si f est continue sur $[a,b]$, alors*

$$\lim_{n\to+\infty}\frac{b-a}{n}\sum_{k=1}^{n} f\left(a+k\frac{b-a}{n}\right)=\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x.$$

3 Formule de Taylor Développements limités

1. Comparaison des fonctions

Les théorèmes sur les limites font apparaître l'existence de certaines formes indéterminées. Pour lever l'indétermination, les fonctions vont être remplacées par des fonctions « équivalentes ».

■ Fonctions équivalentes

Soit x_0 un point de $\overline{\mathbb{R}}$ (x_0 peut donc être soit un réel, soit $-\infty$, soit $+\infty$). Soient f et g deux fonctions définies au voisinage de x_0, sauf peut-être en x_0.

Définition 3.1 *On dit que f et g sont **équivalentes au voisinage de** x_0, s'il existe une fonction α définie au voisinage de x_0 telle que :*

$$f(x) = \alpha(x)\mathrm{g}(x) \quad \textit{avec} \quad \lim_{x \to x_0} \alpha(x) = 1.$$

On note $f \underset{x_0}{\sim} \mathrm{g}$ ou plus simplement $f \sim \mathrm{g}$.

Autre écriture : On peut remplacer la fonction α par la fonction ε définie par :

$$\varepsilon(x) = \alpha(x) - 1 \quad \text{d'où} \quad \lim_{x \to x_0} \varepsilon(x) = 0.$$

Ainsi f et g sont équivalentes, si et seulement si :

$$f(x) = \mathrm{g}(x)(1 + \varepsilon(x)) \quad \text{avec} \quad \lim_{x \to x_0} \varepsilon(x) = 0.$$

Proposition 3.1 *Si $\mathrm{g}(x) \neq 0$ au voisinage de x_0 (sauf peut être en x_0), alors*

$$f \underset{x_0}{\sim} \mathrm{g} \iff \lim_{x \to x_0} \frac{f(x)}{\mathrm{g}(x)} = 1.$$

Théorème 3.1 *Si $f_1 \underset{x_0}{\sim} \mathrm{g}_1$ et $f_2 \underset{x_0}{\sim} \mathrm{g}_2$ alors $f_1 f_2 \underset{x_0}{\sim} \mathrm{g}_1\mathrm{g}_2$. En particulier : $f_1^n \underset{x_0}{\sim} \mathrm{g}_1^n$ $(n \in \mathbb{N}^*)$*

Si de plus $f_2(x) \neq 0$ et $\mathrm{g}_2(x) \neq 0$ sur V_{x_0}, alors $\dfrac{f_1}{f_2} \underset{x_0}{\sim} \dfrac{\mathrm{g}_1}{\mathrm{g}_2}$.

Attention : En général : $f_1 \underset{x_0}{\sim} \mathrm{g}_1$ et $f_2 \underset{x_0}{\sim} \mathrm{g}_2$ n'implique pas forcément $f_1 + f_2 \underset{x_0}{\sim} \mathrm{g}_1 + \mathrm{g}_2$. En effet, citons un contre-exemple :

$$\begin{aligned} f_1(x) &= x^3 - x & \mathrm{g}_1(x) &= -x \\ f_2(x) &= x & \mathrm{g}_2(x) &= x \end{aligned}$$

On a $f_1 \underset{0}{\sim} \mathrm{g}_1$ et $f_2 \underset{0}{\sim} \mathrm{g}_2$. Mais $(f1 + f_2)(x) = x^3 \underset{0}{\not\sim} (\mathrm{g}_1 + \mathrm{g}_2)(x) = 0$. Il faut donc se garder de remplacer un terme d'une somme par une fonction équivalente. Par contre, le Théoreme 3.1 montre que cette opération est légitime dans un produit ou un quotient.

Théorème 3.2 *Soit ℓ un élément de $\overline{\mathbb{R}}$. Si $f \underset{x_0}{\sim} g$ et si $\lim\limits_{x \to x_0} f(x) = \ell$, alors $\lim\limits_{x \to x_0} g(x) = \ell$.*

Des deux théorèmes précédents, il résulte que lorsqu'on a à chercher la limite d'un produit ou d'un quotient de fonctions, on peut alors remplacer chacune des fonctions par une fonction équivalente.

Proposition 3.2 ***(Composition à droite)*** *Si $f \underset{\ell}{\sim} g$ et si $\lim\limits_{x \to x_0} h = \ell$, alors $f \circ h \underset{x_0}{\sim} g \circ h$.*

■ Fonctions négligeables

Soit x_0 un point de $\overline{\mathbb{R}}$ (x_0 peut donc être soit un réel, soit $-\infty$, soit $+\infty$). Soient f et g deux fonctions définies au voisinage de x_0, sauf peut-être en x_0.

Définition 3.2 *On dit que f* ***est négligeable devant*** *g* ***au voisinage de*** *x_0, s'il existe une fonction ε définie au voisinage de x_0 telle que :*

$$f(x) = \varepsilon(x) g(x) \quad \text{avec} \quad \lim_{x \to x_0} \varepsilon(x) = 0.$$

On note $f \underset{x_0}{=} o(g)$ ou plus simplement $f = o(g)$.

Proposition 3.3 *Si g ne s'annule pas au voisinage de x_0 (sauf peut-être en x_0), alors*

$$f \underset{x_0}{=} o(g) \quad \Longleftrightarrow \quad \lim_{x \to x_0} \frac{f(x)}{g(x)} = 0.$$

En particulier : $f \underset{x_0}{=} o(1) \Longleftrightarrow \lim\limits_{x \to x_0} f(x) = 0$.

Théorème 3.3 *On a l'équivalence suivante :* $f \underset{x_0}{\sim} g \quad \Longleftrightarrow \quad f - g \underset{x_0}{=} o(g)$.

2. Formules de Taylor

Si f est une fonction dérivable jusqu'à un certain ordre, le théorème des accroissements finis se généralise à l'aide des dérivées successives. Les formules de Taylor se différencient par un reste qui peut s'exprimer sous différentes formes.

■ La formule de Taylor-Lagrange

Soit f une fonction n fois continûment dérivable sur $[a, b]$ et telle $f^{(n+1)}$ existe sur $]a, b[$. Alors il existe un $c \in]a, b[$ tel que :

$$f(b) = f(a) + \frac{b-a}{1!} f'(a) + \frac{(b-a)^2}{2!} f"(a) + \cdots + \frac{(b-a)^n}{n!} f^{(n)}(a) + \frac{(b-a)^{n+1}}{(n+1)!} f^{(n+1)}(c)$$

Dans le cas où $a = 0$ cette formule est appelée formule de Mac-Laurin. Pour $n = 0$ on retrouve le théorème des accroissements finis.

■ La formule de Taylor-Young

Soit f une fonction $n-1$ fois dans un voisinage V de a et telle $f^{(n)}(a)$ existe. Alors, pour tout $x \in V$, on a :

$$f(x) = f(a) + \frac{x-a}{1!} f'(a) + \frac{(x-a)^2}{2!} f"(a) + \cdots + \frac{(x-a)^n}{n!} f^{(n)}(a) + o((x-a)^n)$$

La formule de Taylor avec reste intégral

Parfois la formule de Taylor avec reste intégral permet d'obtenir des résultats plus fins que la formule de Taylor-Lagrange. Cette formule nécessite une hypothèse supplémentaire de continuité de la dernière dérivée.

Soit f une fonction $n+1$ fois continûment dérivable sur $[a, b]$. Alors, on a :

$$f(b) = f(a) + \frac{b-a}{1!}f'(a) + \frac{(b-a)^2}{2!}f"(a) + \cdots + \frac{(b-a)^n}{n!}f^{(n)}(a) + \int_a^b \frac{(b-t)^n}{n!}f^{(n+1)}(t)\,\mathrm{d}t$$

3. Développements limités

Soit f une fonction définie au voisinage de x_0 de $\mathbb{R}$, sauf peut être en x_0.

Définition et remarques

Définition 3.3 *On dit que f admet un **développement limité d'ordre** n **au voisinage de** x_0, et on note $DL^n_{x_0}$, s'il existe un polynôme P_n nul ou de degré inférieur ou égal à n et une fonction ε, tel que :*

$$f(x) = P_n(x - x_0) + (x - x_0)^n\varepsilon(x) \ \textit{avec} \ \lim_{x\to x_0} \varepsilon(x) = 0.$$

On écrit aussi $\quad f(x) \underset{x_0}{=} P_n(x - x_0) + o((x - x_0)^n)$

*Le polynôme $P_n(x - x_0)$ est appelé **partie régulière du D.L.** La fonction $(x - x_0)^n\varepsilon(x) = o((x - x_0)^n)$ est dite le **reste** ou **terme complémentaire**.*

Ceci revient à l'existence de constantes réelles a_0, a_1,..., a_n et une fonction ε définie au voisinage de x_0 telle que $\lim\limits_{x\to x_0} \varepsilon(x) = 0$ et :

$$f(x) = a_0 + a_1(x - x_0) + \cdots + a_n(x - x_0)^n + (x - x_0)^n\varepsilon(x).$$

Théorème 3.4 ***(Unicité du D.L.)*** *Le Développement limité d'ordre n de f, au voisinage de x_0, s'il existe, est unique.*

Remarque On peut toujours se ramener au cas des D.L. au voisinage de 0. En effet, on définit la fonction F au voisinage de 0 par $\mathrm{g}(h) = f(x_0 + h)$. On a alors :

$$\mathrm{g}(h) = f(x_0 + h) = P_n(h) + o(h^n) = a_0 + a_1h + \cdots + a_nh^n + o(h^n)$$

Donc le développement limité de f au voisinage de x_0 s'obtient en remplaçant h par $(x - x_0)$ dans le développement limité de g au voisinage de 0.

Proposition 3.4 *La fonction f admet un D.L. au voisinage de x_0 si et seulement si la fonction g définie par $\mathrm{g}(h) = f(x_0 + h)$ admet un D.L. au voisinage de 0 du même ordre.*

Par conséquent, dans toute la suite, tous les développements limités seront considérés **au voisinage de 0**.

Développement limité de la somme

$f + \mathrm{g}$ admet un DL d'ordre n dont la partie régulière est $P_n(x) + Q_n(x)$:

$$\begin{aligned}(f+\mathrm{g})(x) &= P_n(x) + Q_n(x) + o(x^n)\\ &= (\mathrm{a}_0+\mathrm{b}_0) + (\mathrm{a}_1+\mathrm{b}_1)x + (\mathrm{a}_2+\mathrm{b}_2)x^2 + \cdots + (\mathrm{a}_n+\mathrm{b}_n)x^n + o(x^n)\end{aligned}$$

Développement limité du produit

$f\mathrm{g}$ admet un DL d'ordre n dont la partie régulière est obtenu en multipliant $P_n(x)$ par $Q_n(x)$ et en négligeant tous les termes de degré supérieur à n :

$$\begin{aligned}(f\mathrm{g})(x) &= P_n(x) \times Q_n(x) + o(x^n)\\ &= (\mathrm{a}_0\mathrm{b}_0) + (\mathrm{a}_0\mathrm{b}_1 + \mathrm{a}_1\mathrm{b}_0)x + \cdots + (\mathrm{a}_0\mathrm{b}_n + \cdots + \mathrm{a}_n\mathrm{b}_0)x^n + o(x^n)\\ &= \mathrm{c}_0 + \mathrm{c}_1 x + \cdots + \mathrm{c}_k x^k + \cdots + \mathrm{c}_n x^n + o(x^n)\end{aligned}$$

où $\quad \mathrm{c}_k = \mathrm{a}_0\mathrm{b}_k + \mathrm{a}_1\mathrm{b}_{k-1} + \cdots + \mathrm{a}_k\mathrm{b}_0 = \sum_{i=0}^{k} \mathrm{a}_i\mathrm{b}_{k-i}$

Développement limité du quotient

Si $\lim_{x\to 0} \mathrm{g}(x) \neq 0$ (c'est-à-dire $\mathrm{b}_0 \neq 0$) alors $\frac{f}{\mathrm{g}}$ admet un D.L. d'ordre n dont la partie régulière est obtenu en divisant $P_n(x)$ par $Q_n(x)$ suivant les puissances croissantes (et en négligeant les termes de degré supérieur à n). Cherchons le DL_0^5 de la fonction $\operatorname{tg} x$. On a : $\lim_{x\to 0} \cos x = 1 \neq 0$ et :

$$\begin{aligned}\operatorname{tg} x = \frac{\sin x}{\cos x} &= \frac{x - \frac{x^3}{6} + \frac{x^5}{120} + o(x^5)}{1 - \frac{x^2}{2} + \frac{x^4}{24} + o(x^5)}\\ &= x + \frac{x^3}{3} + \frac{2x^5}{15} + o(x^5)\end{aligned}$$

$$\begin{array}{l|l} x - \frac{x^3}{6} + \frac{x^5}{120} & 1 - \frac{x^2}{2} + \frac{x^4}{24} \\ -x + \frac{x^3}{2} - \frac{x^5}{24} & \\ \hline +\frac{x^3}{3} - \frac{x^5}{30} & x + \frac{x^3}{3} + \frac{2x^5}{15} \\ -\frac{x^3}{3} + \frac{x^5}{6} - \frac{x^7}{72} & \\ \hline +\frac{2x^5}{15} - \frac{x^7}{72} & \end{array}$$

Ainsi $\quad \operatorname{tg} x = x + \frac{x^3}{3} + \frac{2x^5}{15} + o(x^5)$

Développement limité d'une fonction composée

$\lim_{x\to 0} f(x) = 0$ (c-à-d $\mathrm{a}_0 = 0$) alors $\mathrm{g}\circ f$ admet un D.L. d'ordre n dont la partie régulière est obtenu en négligeant les termes de degré supérieur à n du polynôme $Q_n \circ P_n(x)$:

$$\mathrm{g}\circ f(x) = \sum_{k=0}^{n} \mathrm{b}_k \Big(P_n(x)\Big)^k + o(x^n)$$

Développement limité d'une primitive

On suppose f continue, si F est une primitive de f (c'est-à-dire $F'(x) = f(x)$) alors F admet un D.L. d'ordre $n+1$:

$$F(x) = F(0) + \mathrm{a}_0 x + \frac{\mathrm{a}_1}{2}x^2 + \cdots + \frac{\mathrm{a}_n}{n+1}x^{n+1} + o(x^{n+1}).$$

■ Développements limités en 0 usuels

Ils sont obtenus à l'aide de la formule de Taylor-Young et des règles de calcul ci-dessus.

$$\begin{aligned}
\cos x &= 1 - \frac{x^2}{2!} + \frac{x^4}{4!} + \cdots + (-1)^n \frac{x^{2n}}{(2n)!} + o(x^{2n}) \\
\sin x &= x - \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} + \cdots + (-1)^n \frac{x^{2n+1}}{(2n+1)!} + o(x^{2n+1}) \\
\mathrm{e}^x &= 1 + x + \frac{x^2}{2!} + \frac{x^3}{3!} + \cdots + \frac{x^n}{n!} + o(x^n) \\
(1+x)^\alpha &= 1 + \frac{\alpha}{1!}x + \frac{\alpha(\alpha-1)}{2!}x^2 + \cdots + \frac{\alpha(\alpha-1)\cdots(\alpha-n+1)}{n!}x^n + o(x^n) \\
\frac{1}{1+x} &= 1 - x + x^2 + \cdots + (-1)^n x^n + o(x^n) \\
\sqrt{1+x} &= 1 + \frac{x}{2} - \frac{x^2}{8} + \cdots + (-1)^{n-1} \frac{1 \times 3 \times \cdots \times (2n-3)}{2 \times 4 \times \cdots \times 2n} x^n + o(x^n) \\
\frac{1}{\sqrt{1+x}} &= 1 - \frac{x}{2} - \frac{3}{8}x^2 + \cdots + (-1)^n \frac{1 \times 3 \times \cdots \times (2n-1)}{2 \times 4 \times \cdots \times 2n} x^n + o(x^n) \\
\mathrm{Log}(1+x) &= x - \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3} + \cdots + (-1)^n \frac{x^{n+1}}{(n+1)!} + o(x^{n+1})
\end{aligned}$$

4. Applications des développements limités

■ Recherche de fonctions équivalentes

Si l'on supprime dans le DL le reste (le dernier terme du type $o(x^n)$, on obtient un équivalent à la fonction concernée au voisinage de 0. En particulier, si un fonction admet un DL alors elle est équivalente au premier terme non nul.

■ Calculs de limites

Les DLs servent à calculer certaines limites que l'on ne pourrait pas déterminer par les seules méthodes habituelles.

■ Etude de branches infinies

► **DL généralisé :** Si, au voisinage de 0, $\exists\, k \in \mathbb{N}^*$ tel que $x^k f(x)$ admette un DL d'ordre n ($n \geqslant k$) :

$$x^k f(x) = a_0 + a_1 x + \cdots + a_n x^n + o(x^n)$$

alors
$$f(x) = \frac{a_0}{x^k} + a_1 x + \cdots + a_n x^n + o(x^n)$$

et on dit que f admet un développement limité généralisé (DLG), d'ordre $n - k$, en 0.

► **Etude de f à l'infini :** Soit f une fonction définie au voisinage de l'infini ; en posant $t = \dfrac{1}{x}$ on obtient $f(x) = f\left(\dfrac{1}{t}\right) = \varphi(t)$ et φ est définie au voisinage de 0. Si φ admet un DLG de la forme :

$$\varphi(t) = \frac{a}{t} + b + ct^p + o(t^p)$$

où ct^p est le premier terme non nul après b, alors : $\quad f(x) = ax + b + \dfrac{c}{x^p} + o\left(\dfrac{1}{x^p}\right)$

La droite d'équation $y = ax + b$ est asymptote à $\mathscr{C}_f$ et le signe de $\dfrac{c}{x^p}$ indique la position de la courbe par rapport à l'asymptote.

4 Fonctions de plusieurs variables

1. Notions de base

Le recours aux fonctions réelles d'une variable réelle est souvent insuffisant pour rendre compte des relations économiques. Une variable économique dépend souvent de plusieurs autres variables économiques et non d'une seule.
D'une manière générale, les fonctions réelles de plusieurs variables réelles sont de la forme :

$$z = f(x_1, x_2, \dots, x_n)$$

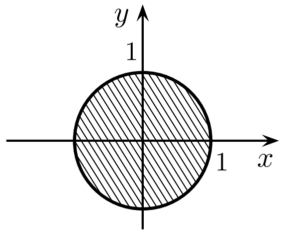
où $x_1,\ x_2, \dots, x_n$ et y sont des nombres réelles.

L'étude ci-après se fera généralement sur des fonctions ayant seulement des variables x et y. Ce cas capte l'essentiel de la théorie. L'étude du cas général est similaire et ne présente pas plus de difficultés.

■ Fonctions de deux variables

Définition 4.1 *On appelle* ***fonction de deux variables*** *une fonction f de $\mathbb{R}^2$ dans $\mathbb{R}$. L'ensemble D_f des éléments de $\mathbb{R}^2$ qui ont une image par f s'appelle le* ***domaine de définition de*** *f.*

Par exemple, La fonction f définie par : $f(x,y) = \sqrt{1 - x^2 - y^2}$
est une fonction de deux variables dont D_f est le disque de centre $(0,0)$ et de rayon 1 : $\mathrm{D}_f = \{\ (x,y) \in \mathbb{R}^2\ :\ x^2 + y^2 \leqslant 1\ \}$.

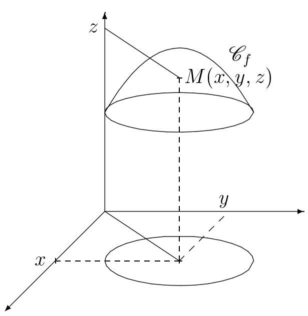


1.1. Représentation graphique

Soit f une fonction de deux variables définie sur $\mathrm{D} \in \mathbb{R}^2$. La fonction f fait correspondre à tout point (x,y) de D un réel $z = f(x,y)$. Le graphe de f est une partie de $\mathbb{R}^2 \times \mathbb{R} = \mathbb{R}^3$:

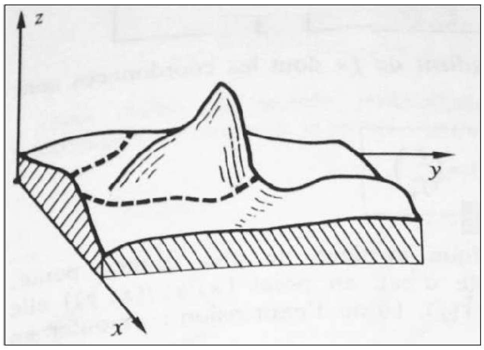
$$\mathscr{C}_f = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 \mid z = f(x,y), (x,y) \in \mathrm{D}\}$$

$\mathscr{C}_f$ est appelé **surface**. Lorsque (x,y) décrit le domaine D, le point $M(x,y,z)$ décrit la surface $\mathscr{C}_f$.

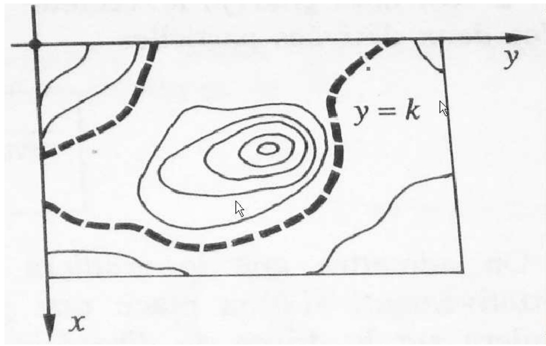


Courbes de niveau

Le plus souvent la surface d'une fonction à deux variables est difficile à visualiser. On a alors recours à des représentations graphiques « partielles », comme le font les géographes pour les reliefs :



$\Longrightarrow$

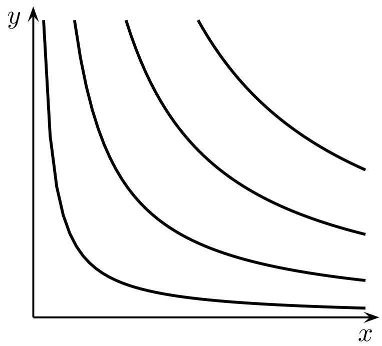


Définition 4.2 *Soit f une fonction de deux variables définie sur* $\mathrm{D} \subset \mathbb{R}^2$. *Considérons l'ensemble :*

$$C_k = \{\ (x, y) \in \mathrm{D} \mid f(x, y) = k\ \}, \quad k \in \mathbb{R}$$

*l'ensemble C_k, lorsqu'il n'est pas vide, est appelé **courbe de niveau**.*

Il y a une infinité de courbes de niveau, autant que de valeurs possibles pour k. On représente fréquemment quelques-unes de ces courbes de niveau dans le plan (x, y). En microéconomie on recourt souvent aux courbes de niveau. Le graphique ci-après présente les courbes de niveau pour une fonction de deux variables Cobb-Douglas.



2. Dérivées partielles

Soient f une fonction de deux variables définie sur une partie D de $\mathbb{R}^2$. Lorsque l'on fixe l'une des deux variables, on obtient une fonction réelle d'une seule variable réelle.

Définition 4.3 *Lorsque l'on fixe l'une des deux variables, on obtient une fonction d'une seule variable. D'ou les deux fonctions suivantes dites **fonctions partielles** de f au point (x, y).*

$$\begin{aligned} f_1 &: t \longmapsto f(t, y) \ \text{ où } y \text{ est fixé} \quad (\textit{Première application partielle}) \\ f_2 &: t \longmapsto f(x, t) \ \text{ où } x \text{ est fixé} \quad (\textit{Deuxième application partielle}). \end{aligned}$$

Dans toute cette section, la fonction de deux variables f est définie sur un ouvert D de $\mathbb{R}^2$ et (x_0, y_0) désigne un point de D.

■ Dérivées partielles d'ordres 1

Lors de l'étude d'une fonction f d'une seule variable, nous avons définie la dérivée en un point x_0 comme la limite du rapport

$$\frac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0}$$

quand x tend vers x_0. Cette définition ne peut pas s'appliquer directement aux fonctions de deux variables, puisque dans ce cas $\boldsymbol{x}=(x,y)$ et $\boldsymbol{x_0}=(x_0,y_0)$ seront des vecteurs de $\mathbb{R}^2$ et la division par un vecteur n'a pas de sens.

Cependant, si l'on fixe l'une des composantes de $\boldsymbol{x}$ (disons $y=y_0$), on peut traiter f comme une fonction de l'autre variable x seule : $f(x,y_0)=f_1(x)$ et on peut calculer sa dérivée en x_0 quand cette limite existe :

$$f_1'(x_0)=\lim_{x\to x_0}\frac{f_1(x)-f_1(x_0)}{x-x_0}=\lim_{h\to 0}\frac{f_1(x_0+h)-f_1(x_0)}{h}=\lim_{h\to 0}\frac{f(x_0+h,y_0)-f(x_0,y_0)}{h}$$

De même, si l'on fixe x (soit $x=x_0$), on peut traiter f comme une fonction de la seule variable y : $f(x_0,y)=f_2(y)$ et on peut calculer sa dérivée en y_0 quand cette limite existe :

$$f_2'(y_0)=\lim_{y\to y_0}\frac{f_2(y)-f_2(y_0)}{y-y_0}=\lim_{h\to 0}\frac{f_2(y_0+h)-f_2(y_0)}{h}=\lim_{h\to 0}\frac{f(x_0,y_0+h)-f(x_0,y_0)}{h}$$

Définition 4.4 *On appelle **dérivée partielle de f au point (x_0,y_0) par rapport à***

— *la variable x, le réel $f_1'(x_0)$ et on le note $f_x'(x_0,y_0)$ ou encore $\dfrac{\partial f}{\partial x}(x_0,y_0)$*

$$f_x'(x_0,y_0)=\frac{\partial f}{\partial x}(x_0,y_0)=\lim_{h\to 0}\frac{f(x_0+h,y_0)-f(x_0,y_0)}{h}.$$

— *la variable y, le réel $f_2'(y_0)$ et on le note $f_y'(x_0,y_0)$ ou encore $\dfrac{\partial f}{\partial y}(x_0,y_0)$*

$$f_y'(x_0,y_0)=\frac{\partial f}{\partial y}(x_0,y_0)=\lim_{h\to 0}\frac{f(x_0,y_0+h)-f(x_0,y_0)}{h}.$$

► Fonction composée

Soit u et v deux fonctions d'une variable réelle t et soit f une fonction de deux variables définies sur $\mathbb{R}^2$. On définit la fonction φ sur $\mathbb{R}$ par :

$$\varphi(t)=f\big(u(t),v(t)\big)$$

Théorème 4.1 *Si u et v sont dérivables en t_0 et f admet des dérivées partielles au voisinage de $\big(u(t_0),v(t_0)\big)$, on a :*

$$\varphi'(t_0)=\frac{\partial f}{\partial x}\big(u(t_0),v(t_0)\big)u'(t_0)+\frac{\partial f}{\partial y}\big(u(t_0),v(t_0)\big)v'(t_0)$$

▶ Gradient

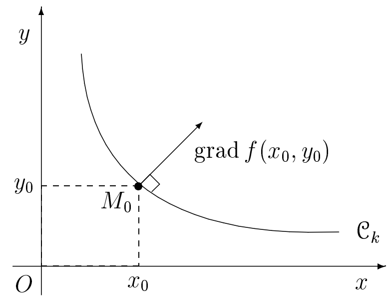
Définition 4.5 *Si la fonction f admet des dérivées partielles d'ordre 1 en un point (x_0, y_0), le vecteur grad $f(x_0, y_0)$ défini par :*

$$\text{grad}\, f(x_0, y_0) = \left(\frac{\partial f}{\partial x}(x_0, y_0), \frac{\partial f}{\partial y}(x_0, y_0)\right)$$

*est appelé **gradient** de f au point (x_0, y_0). Le gradient se note aussi par $\nabla f(x_0, y_0)$.*

Le gradient en un point M_0 de coordonnées x_0 et y_0 est représenté par un *vecteur* issue de M_0, dont les composantes sur les axes de coordonnées sont $\dfrac{\partial f}{\partial x}(x_0, y_0)$ et $\dfrac{\partial f}{\partial y}(x_0, y_0)$

Proposition 4.1 *Le gradient en un point (x_0, y_0) est orthogonal à la courbe de niveau passant par ce point.*



Remarque : Si l'accroissement $\mathrm{d}M = (\mathrm{d}x, \mathrm{d}y)$ des variables est choisi parallèle et de même sens que grad f, c'est-à-dire :

$$\mathrm{d}M = \mathrm{d}\lambda \cdot \text{grad}\, f \quad \text{où } \mathrm{d}\lambda > 0$$

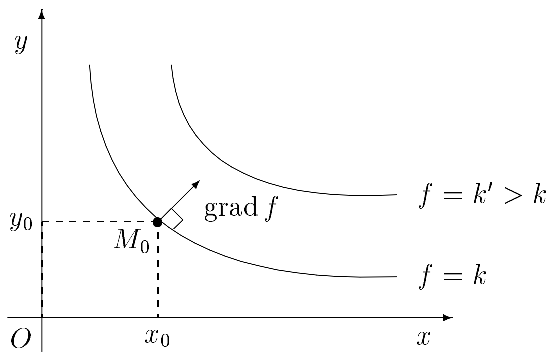
soit

$$\mathrm{d}x = \frac{\partial f}{\partial x} \cdot \mathrm{d}\lambda \quad \text{et} \quad \mathrm{d}y = \frac{\partial f}{\partial y} \cdot \mathrm{d}\lambda$$

donc

$$\mathrm{d}f = \frac{\partial f}{\partial x}\,\mathrm{d}x + \frac{\partial f}{\partial y}\,\mathrm{d}y = \mathrm{d}\lambda \left[\left(\frac{\partial f}{\partial x}\right)^2 + \left(\frac{\partial f}{\partial y}\right)^2\right] \geqslant 0.$$

Par conséquent, à un accroissement des variables dans le sens de grad f correspond un accroissement *positif* de f.



On dit que **le gradient de f est dirigé vers les f croissants**.

Dérivées partielles d'ordre 2

Soit f une fonction admettant des dérivées partielles en tout point (x, y) au voisinage du point (x_0, y_0). Les fonctions dérivées partielles suivantes

$$f'_x : (x, y) \longmapsto f'_x(x, y) \qquad\qquad f'_y : (x, y) \longmapsto f'_y(x, y)$$

sont elles-mêmes des fonctions de deux variables. En dérivant par rapport à x et par rapport à y chacune des fonctions ci-dessus on obtient les dérivées partielles d'ordre 2. Nous aurons donc quatre dérivées d'ordre 2

Définition 4.6 *Sous condition d'existence, on appelle* ***dérivées partielles d'ordre 2*** *de f au point (x_0, y_0) les dérivées partielles des fonctions f'_x et f'_y ; on les note :*

$$f''_{x^2} = \frac{\partial^2 f}{\partial x^2} = \frac{\partial f}{\partial x}\left[\frac{\partial f}{\partial x}\right] \qquad\qquad f''_{xy} = \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y} = \frac{\partial f}{\partial x}\left[\frac{\partial f}{\partial y}\right]$$

$$f''_{yx} = \frac{\partial^2 f}{\partial y \partial x} = \frac{\partial f}{\partial y}\left[\frac{\partial f}{\partial x}\right] \qquad\qquad f''_{y^2} = \frac{\partial^2 f}{\partial y^2} = \frac{\partial f}{\partial y}\left[\frac{\partial f}{\partial y}\right]$$

3. Différentielles

Les dérivées partielles ne sont pas suffisantes pour tenir compte du fait que la fonction dépend de toutes les variables à la fois. Soit f une fonction de deux variables et $M_0(x_0, y_0)$ un point de $\mathbb{R}^2$, l'application u de $\mathbb{R}^2$ dans $\mathbb{R}$ définie par :

$$(h_1, h_2) \longmapsto h_1 \frac{\partial f}{\partial x}(M_0) + h_2 \frac{\partial f}{\partial y}(M_0)$$

est une application linéaire de $\mathbb{R}^2$ dans $\mathbb{R}$, c'est-à-dire :

$$\begin{aligned} u(P + Q) &= u(P) + u(Q) \qquad && \forall\, P \in \mathbb{R}^2, \quad \forall\, Q \in \mathbb{R}^2 \\ u(\lambda P) &= \lambda u(P) && \forall\, P \in \mathbb{R}^2, \quad \forall\, \lambda \in \mathbb{R} \end{aligned}$$

L'application u est dite différentielle de f en M_0 et on la note $\mathrm{d}f(M_0)$. Les applications suivantes

$$p_1 : \begin{array}{rcl} \mathbb{R}^2 & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ (x, y) & \longmapsto & x \end{array} \qquad \text{et} \qquad p_2 : \begin{array}{rcl} \mathbb{R}^2 & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ (x, y) & \longmapsto & y \end{array}$$

sont linéaires de $\mathbb{R}^2$ dans $\mathbb{R}$ et par suite $\mathrm{d}p_1 = p_1$ et $\mathrm{d}p_2 = p_2$. On note

$$\mathrm{d}p_1 = \mathrm{d}x \quad \text{et} \quad \mathrm{d}p_2 = \mathrm{d}y$$

Théorème 4.2 *Soit f une fonction définie au voisinage de $M_0 \in \mathbb{R}^2$ et admettant des dérivées partielles continues au voisinage de M_0. Alors f est différentiable en M_0 et*

$$\mathrm{d}f(M_0) = \frac{\partial f}{\partial x}(M_0)\,\mathrm{d}x + \frac{\partial f}{\partial y}(M_0)\,\mathrm{d}y.$$

4. Optimisation d'une fonction à deux variables

■ Optimisation sans contrainte

Le problème que l'on étudie ici est celui de la recherche d'extremums locaux d'une fonction f de deux variables x, y

Définition 4.7 *Soit f une fonction de deux variables définie au voisinage de M_0.*

— *On dit que f a un **maximum local** en M_0 s'il existe un voisinage V de M_0 tel que :*

$$f(M) \leqslant f(M_0) \quad \forall\, M \in V$$

— *On dit que f a un **minimum local** en M_0 s'il existe un voisinage V de M_0 tel que :*

$$f(M_0) \leqslant f(M) \quad \forall\, M \in V$$

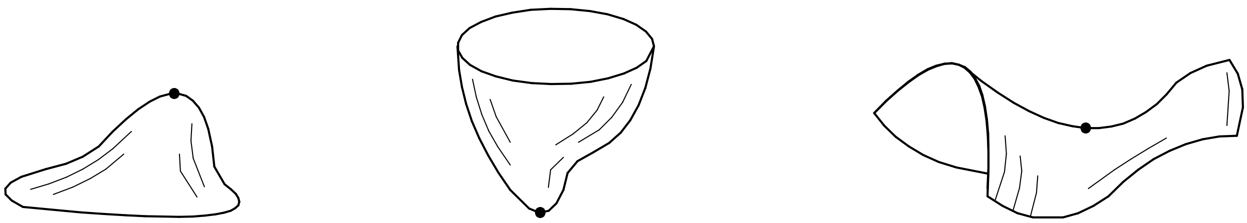
— *On dit que f admet un **extremum local** en M_0 si f admet un minimum ou un maximum local en M_0.*

Il en résulte qu'il existe un plan tangent horizontal à la courbe de f au point $(M_0, f(M_0))$.

Théorème 4.3 *Soit f une fonction définie au voisinage de M_0. On suppose que f est différentiable en M_0. Si de plus f admet un extremum local en M_0 alors*

$$\frac{\partial f}{\partial x}(M_0) = 0 \qquad \text{et} \qquad \frac{\partial f}{\partial y}(M_0) = 0 \tag{$*$}$$

*Un point M_0 vérifiant $(*)$ s'appelle **point critique**.*



maximum minimum point selle

La condition $(*)$ est nécessaire, mais l'exemple du point-selle montre qu'elle n'est pas suffisante. Bien que le plan tangent soit horizontal, quel que soit le voisinage du point-selle considéré, on pent toujours trouver un point qui soit au-dessus du point-selle et un autre point qui soit au-dessous du point-selle. Notons qu'a un point-selle, une fonction présente un minimum pour une des variables et un maximum pour l'autre variable. Il faut donc une condition suffisante qui est la suivante :

$$\mathscr{H}(M_0) = \left(\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}(M_0)\right)\left(\frac{\partial^2 f}{\partial y^2}(M_0)\right) - \left(\frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}(M_0)\right)^2 > 0$$

Théorème 4.4 *Soit M_0 un point critique et f une fonction définie au voisinage de M_0.*

a) *Si $\mathscr{H}(M_0) < 0$ alors f n'admet pas d'extremum en M_0*

b) *Si $\mathscr{H}(M_0) > 0$ et $\dfrac{\partial^2 f}{\partial x^2}(M_0) > 0$ alors f admet un minimum en M_0*

c) *Si $\mathscr{H}(M_0) > 0$ et $\dfrac{\partial^2 f}{\partial x^2}(M_0) < 0$ alors f admet un maximum en M_0*

d) *Si $\mathscr{H}(M_0) = 0$ on ne peut pas conclure.*

Optimisation avec contrainte

Dans de nombreuses applications pratiques d'optimisation, le problème est de maximiser ou minimiser une fonction donnée assujettie a certaines conditions ou contraintes sur les variables impliquées. La méthode étudiée ci-après est applicable a n'importe quel nombre de variables et de contraintes. La méthode des multiplicateurs de Lagrange est employée pour obtenir un maximum ou un minimum d'une fonction soumise a des contraintes d'égalite.

Supposons que $f(x, y)$, appelée fonction objectif, doit être optimisée sous la contrainte $g(x, y) = 0$. Formons une fonction auxiliaire appelée un lagrangien :

$$F(x, y, \lambda) = f(x, y) + \lambda g(x, y)$$

où λ (multiplicateur de Lagrange) est une inconnue. Ceci permet d'intégrer la contrainte dans l'expression de la fonction à optimiser et d'introduire une nouvelle variable. Ainsi, dans les conditions nécessaires pour avoir un extremum, on se trouve alors avec trois contraintes et trois inconnus :

Théorème 4.5 *Soient f et g deux fonctions définies au voisinage de (x_0, y_0). On suppose que f et g sont différentiables en (x_0, y_0). Si de plus f admet un extremum local en (x_0, y_0) sous la contrainte $\mathrm{g}(x, y) = 0$, alors il existe un nombre $\lambda_0 \in \mathbb{R}$ tel que :*

$$\frac{\partial F}{\partial x}(x_0, y_0, \lambda_0) = 0, \qquad \frac{\partial F}{\partial y}(x_0, y_0, \lambda_0) = 0 \qquad \text{et} \qquad \frac{\partial F}{\partial \lambda}(x_0, y_0, \lambda_0) = 0$$

La recherche des extremums commence alors par le résolution du système :

$$(S) \quad \begin{cases} \dfrac{\partial f}{\partial x}(x, y) + \lambda \dfrac{\partial \mathrm{g}}{\partial x}(x, y) = 0 \\[2ex] \dfrac{\partial f}{\partial y}(x, y) + \lambda \dfrac{\partial \mathrm{g}}{\partial y}(x, y) = 0 \\[2ex] \mathrm{g}(x, y) = 0 \end{cases}$$

La solution du système de trois equations a trois inconnues (x, y, λ) ci-dessus fournit les points critiques de la fonction sous contrainte. Ces points critiques satisfont la contrainte, mais il reste encore a determiner s'il s'agit effectivement d'un extremum. Pour cela, en tout point critique $N_0 = (x_0, y_0, \lambda_0)$, on considère :

$$\mathscr{H}(N_0) = \left(\frac{\partial^2 F}{\partial x^2}(N_0)\right)\left(\frac{\partial^2 F}{\partial y^2}(N_0)\right) - \left(\frac{\partial^2 F}{\partial x \partial y}(N_0)\right)^2$$

Théorème 4.6 *Soit $N_0 = (x_0, y_0, \lambda_0)$ un point critique et f une fonction définie au voisinage de $M_0 = (x_0, y_0)$.*

a) *Si $\mathscr{H}(N_0) > 0$, $\dfrac{\partial^2 F}{\partial x^2}(N_0) > 0$ et $\dfrac{\partial^2 f}{\partial y^2}(N_0) > 0$ alors f admet un minimum en M_0*

b) *Si $\mathscr{H}(N_0) > 0$, $\dfrac{\partial^2 F}{\partial x^2}(N_0) < 0$ et $\dfrac{\partial^2 f}{\partial y^2}(N_0) < 0$ alors f admet un maximum en M_0*

c) *Si $\mathscr{H}(N_0) \leqslant 0$ on ne peut pas conclure ; il faut examiner la fonction F au voisinage de N_0.*

5. Intégrales doubles

Dans le chapitre 2, nous avons défini l'intégrale de a à b d'une fonction f continue sur l'intervalle fini $[a, b]$. De façon analogue, on pent définir l'intégrale double, notée

$$\iint_D f(x, y)\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y$$

d'une fonction continue $f(x, y)$ sur un domaine fini D du plan $\mathbb{R}^2$.

Nous avons vu que l'intégrale définie de $f(x)$ pouvait s'interpreter en termes d'aires. La double intégrale définie peut, quant à elle, être interprétée en termes de volumes. Quand $z = f(x, y)$ est positif ou nul sur un domaine D, l'intégrale double est le volume situé sous la surface $z = f(x, y)$ et au-dessus du domaine D dans le plan $\mathbb{R}^2$.

Une intégrale double se calcule en faisant deux integrations successives :

■ Intégration sur un rectangle

Soit $D = [a, b] \times [c, d]$ un rectangle de $\mathbb{R}^2$ et f une fonction continue sur D, à valeurs réelles. On définit

$$\iint_D f(x, y)\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y = \int_a^b \left[\int_c^d f(x, y)\,\mathrm{d}y\right]\,\mathrm{d}x$$

On admettra le théorème de Fubini qui énonce que le rôle des deux variables est symétrique, c'est-à dire que l'on peut aussi écrire :

$$\iint_D f(x, y)\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y = \int_c^d \left[\int_a^b f(x, y)\,\mathrm{d}x\right]\,\mathrm{d}y$$

■ Intégration sur un domaine non rectangulaire

On étend aussi la définition précédente au cas où le domaine d'intégration D est de la forme :

$$D = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid a \leqslant x \leqslant b,\ \ y_1(x) \leqslant y \leqslant y_2(x)\}$$

En posant:

$$\iint_G f(x, y)\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y = \int_{x=a}^{x=b} \left[\int_{y_1(x)}^{y_2(x)} f(x, y)\,\mathrm{d}y\right]\,\mathrm{d}x$$

Dans le cas où l'ordre d'intégration est inversé, il faut déterminer de nouvelles bornes d'intégration :

$$\iint_G f(x, y)\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y = \int_{x=a}^{x=b} \left[\int_{y_1(x)}^{y_2(x)} f(x, y)\,\mathrm{d}y\right]\,\mathrm{d}x$$

La méthode générale de calcul de $\iint_D f(x, y)\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y$ consiste donc à intégrer d'abord par rapport à une variable, y par exemple, les bornes dépendant de x puis à intégrer par rapport à l'autre variable.

On admettra que, pour les fonctions continues, on peut intervertir l'ordre d'intégration. Un énoncé rigoureux de cette propriété (théorème de Fubini) et a fortiori sa démonstration, nécessite une définition générale précise de la forme des domaines sur lesquels on intègre, définition qui dépasse le cadre de ce cours.