Chapitre 1 Résolution des équations non linéaires f(x)=0.

1.1Les erreurs numériques:

Le résultat numérique est un résultat approximatif du résultat exact. Chaque résultat numérique est donné avec une estimation, d'une autre manière, chaque résultat numérique doit être accompagné d'une erreur. L'erreur peut être due à l'imprécision des mesures physiques ou au fait que les données elles-mêmes proviennent de calculs approximatifs.

1.1.1 Définition 1 :L'erreur absolue

On appelle erreur absolue de la valeur approchée x^*sur la valeur exacte x, la quantité :

$$\boldsymbol{E = |x - x^*|}$$

L'erreur absolue sert à déterminer la précision de la valeur approchée x^*relativement à la valeur exacte x. Plus l'erreur absolue de la valeur approchée x^*est petite, plus x^*est précise.

1.1.2 Définition 2:L'erreur relative

On appelle erreur relative la quantité Er donné par :

$$\boldsymbol{Er = \frac{|x - x^*|}{|x^*|} = \frac{E}{|x^*|}}$$

L'erreur relative est utilisée pour comparer la précision de la valeur approchée x^*à la valeur exacte x, elle est souvent exprimée en pourcentage.

Elle est généralement utilisée pour comparer la précision de différentes valeurs approchées x^*,y^*,z^*,...relativement à différentes valeurs exactes respectives *x*, *y*, *z*, ...

Dans le cas où il y'a plusieurs valeurs approchées pour une valeur exacte connue, il est possible de déterminer ses erreurs absolues et relatives. Mais dans le cas contraire, les erreurs absolue et relative deviennent impossibles à calculer. On introduit alors les notions d'incertitude absolue et d'incertitude relative.

1.1.3 Définition3 : Les incertitudes

On appelle incertitude absolue d'une valeur approchée x^*, tout nombre réel positif, noté Δx, vérifiant: $\boldsymbol{E = | x - x^* | \leq \Delta x}$

ou de manière équivalente : $x^* - \Delta x \leq x \leq x^* + \Delta x$.

- Une incertitude absolue est un majorant de l'erreur absolue.
- Plus Δx est petite, plus la valeur approchée x^* est précise.

D'où, en pratique, on prend le plus petit Δx possible.

- On écrit : $x = x^* \pm \Delta x$
- Souvent au lieu d'écrire $x = x^* \pm \Delta x$, on écrit $x = x^* \pm \delta x \cdot 100\%$ où la quantité δx est définie par $\boldsymbol{\delta x = \frac{\Delta x}{|x^*|}}$
- Cette quantité est appelée incertitude relative à x^*.

1.1.4 Représentation décimale d'un nombre approché :

Tout nombre réel positif *x* peut être représenté sous la forme d'un nombre décimal de développement limité ou illimité :

$$\boldsymbol{x = a_m 10^m + a_{m-1} 10^{m-1} + \cdots + a_{m-n} 10^{m-n} + \cdots}$$

où les a_i sont les chiffres significatifs du nombre réel x (a_i = 0, 1, 2, ..., 9), avec $a_m \neq 0$ où m est un entier naturel appelé rang supérieur du nombre réel x.

Exemple de développement limité :

$7413.268 = 7 .10^3 + 4. 10^2 + 1. 10^1 + 3. 10^0+2. 10^{-1} + 6. 10^{-2} + 8. 10^{-3}$.

Exemple de développement illimité *:*

$\pi = 3.14159265358 \cdots$

$= 3 \cdot 10^0 + 1 \cdot 10^{-1} + 4 \cdot 10^{-2} + 1 \cdot 10^{-3}+5 \cdot 10^{-4} + \cdots + 5 \cdot 10^{-10} + 8 \cdot 10^{-11} + \cdots$

Dans le cas où le nombre réel x est négatif, il suffit de considérer la représentation décimale du nombre $y = - x$.

1.1.5 Chiffres significatifs exacte d'un nombre approché :

Soient x un nombre réel et x^* une valeur approchée de x.

Un chiffre significatif de x^* est dit exact (c.s.e) si l'erreur absolue de ce nombre ne dépasse pas une demi-unité de rang du chiffre significatif, c'est-à-dire que : $E = |x - x^*| \leq 0.5 \times$ l'unité de rang de ce c.s.

Ainsi :

- Le n-ieme c.s après la virgule est exact si : $\Delta x \leq 0.5\ 10^{-n}$.
- Le n-ieme c.s avant la virgule est exact si : $\Delta x \leq 0.5\ 10^{n-1}$.

1.1.6 Troncature et arrondissement d'un nombre:

La méthode habituelle pour tronquer un nombre pour ne garder qu'un nombre fini de chiffres significatifs est l'arrondissement.

1.1.6.1 Règles d'arrondissement:

- Si le1^er chiffre à rejeter est < 5, le nombre est retenu.

- Si le1[er] chiffre à rejeter est ≥ 5,on ajoute une unité au dernier chiffre significatif retenu.

1.1.6.2 L'erreur d'arrondissement:

Si on applique la règle d'arrondissement ci-dessus, l'erreur d'arrondissement ne dépasse pas une demi-unité de rang du dernier c.s. retenu, c'est-à-dire qu'on a :

$E = |x - x^*| \leq 0.5 \times$ l'unité de rang du dernier c.s. retenu.

Exemple1 :

1-Soient $x^* = 255$ et $y^* = 250$ avec $\delta x = \delta y = 0.1\%$. Calculer $x^* - y^*$ et $\delta(x - y)$.

2- Calculer, pour $x^* = 56202$ et $y^* = 56198$ avec $\delta x = \delta y = 0.01\%$, les valeurs de $x^* - y^*$, $\delta(x - y)$ et $\Delta(x - y)$.

Solution:

1. Nous avons :$\Delta x = x^* \cdot \delta x = 255\ 10^{-3} = 0.255$

Et : $\Delta y = y^* \cdot \delta y = 250\ 10^{-3} = 0.250$

et puis : $x^* - y^* = 255 - 250 = 5$, avec une incertitude relative :

$\delta(x - y) = \frac{\Delta(x-y)}{x*-y*} = 10.1\ 10^{-2} = 10.1\%$.

Exemple2:

Arrondissement du nombre au dixième près :

35,64 **≈35.6**

1.2 Résolution de l'équation non linéaire f(x)=0

1.2.1Introduction :

Soit une fonction f :IR ⟶ IR suffisamment régulière sur l'intervalle$[a.b]$ domaine des racines.

Pour trouver les racines de l'équation $f(x) = 0$.

On commence toujours par localiser et ensuite séparer les racines c.à.d. déterminer les intervalles $[a_i, b_i]$ à l'intérieur des quels la fonction f admet une racine et une seule.

La séparation des racines s'effectue en générale à partir des considérations suivantes :

- en examinant le graphe y= $f(x)$.
- en examinant les graphes $y_1 = f_1(x)$ et $y_2 = f_2(x)$ si on arrive à écrire $f(x)$ sous la forme $f_1(x) = f_2(x)$.

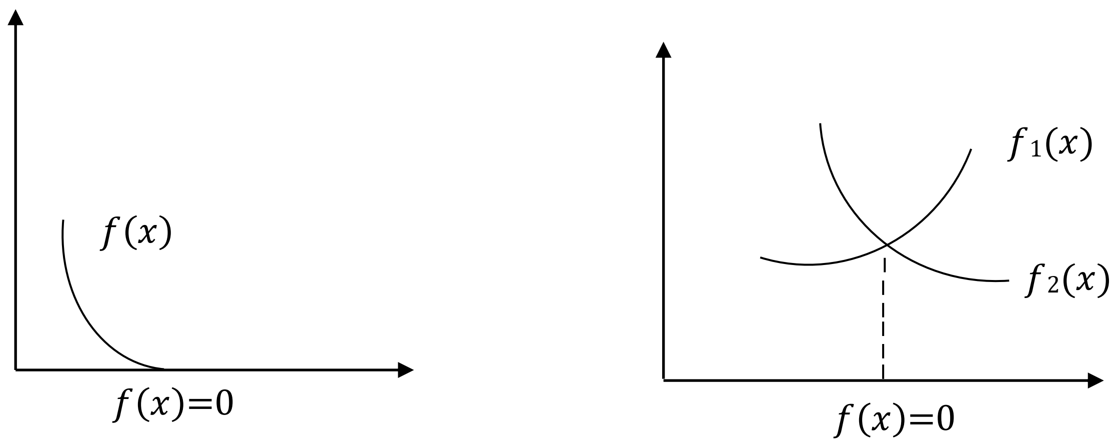

Fig 1.1 Séparation des racines graphiquement.

On peut également séparer les racines, en se basant sur le théorème du Rohle (Valeurs intermédiaires) étant donnés a, b ∈ IR, on a :

Si f est continue sur $[a, b]$

- si f(a).f(b)< 0 alors f a au moins une racine dans $[a, b]$, si de plus f's'annule pas sur$[a, b]$, alors la racine et unique.

1.2.2 Méthode du point fixe:

Le principe de cette méthode consiste à transformer l'équation $f(x) = 0$ en une équation équivalente **g(x)=** $\boldsymbol{x}$ où g est une fonction bien choisie. Le point α est alors un **point fixe** de g. Approcher les zéros de *f* revient à approcher les points fixes de g. Le choix de la fonction g est motivé par les exigences du théorème de point fixe. En effet, elle doit être contractante dans un voisinage I de α, ce qui revient à vérifier que **|g'(x)|<1**sur ce voisinage. C'est-à-dire :

$$\boldsymbol{f(x) = 0 \Leftrightarrow x = g(x)}$$

Puis on construit à partir de l'équation, la suite :

$$\begin{cases} \boldsymbol{x_{n+1} = g(x_n)} \\ \boldsymbol{x_0 choisi\ dans\ [a,b]} \end{cases}$$

1.2.2.1 Convergence de la méthode du point fixe :

Soit g :$[a,b] \rightarrow [a,b] \begin{cases} \boldsymbol{g(x) = x} \\ \boldsymbol{x_{n+1} = g(x_n)} \end{cases}$

La suite x_n converge (si x_0 est bien choisi).

Et les conditions de convergence sur $g(x)$ (fonction réelle, définie et continue sur $[a,b]$) sont :

1- $\mathrm{g}(x) \in [a,b] \forall x \in [a,b]$(si $\mathrm{I} = [a,b] alors\ \mathrm{g}(\mathrm{I}) \subset \mathrm{I}$)

2- $\exists \mathscr{k} \in IR\ : 0 < \mathscr{k} < 1\ telque: |g'(x)| \leq \mathscr{k} < 1,$

$avec\ \mathscr{k} = max|g'(x)| sur[a,b]$

On dit que $g(x)$ et strictement contracte.

Alors $g(x)$ admet un point fixe unique dans $[a,b]$et la suite

$\begin{cases} x_0 \in [a,b] \\ x_{n+1} = g(x_n) \end{cases}$ Converge vers le point fixe α.

Et : $|x_{\mathrm{n}} - \alpha| \leq \frac{\mathscr{k}^{\mathrm{n}}}{1-\mathscr{k}} |x_1 - x_0|$

Le nombre minimum d'itérations pour que la solution est approchée avec une précision ε est :$|x_n - \alpha| < \varepsilon$

Donc : $n > \frac{ln\left[\frac{(1-k)\varepsilon}{|x_1-x_0|}\right]}{lnk}$ $\quad avec \;\; k = \max_{[a,b]}|g'(x)|$

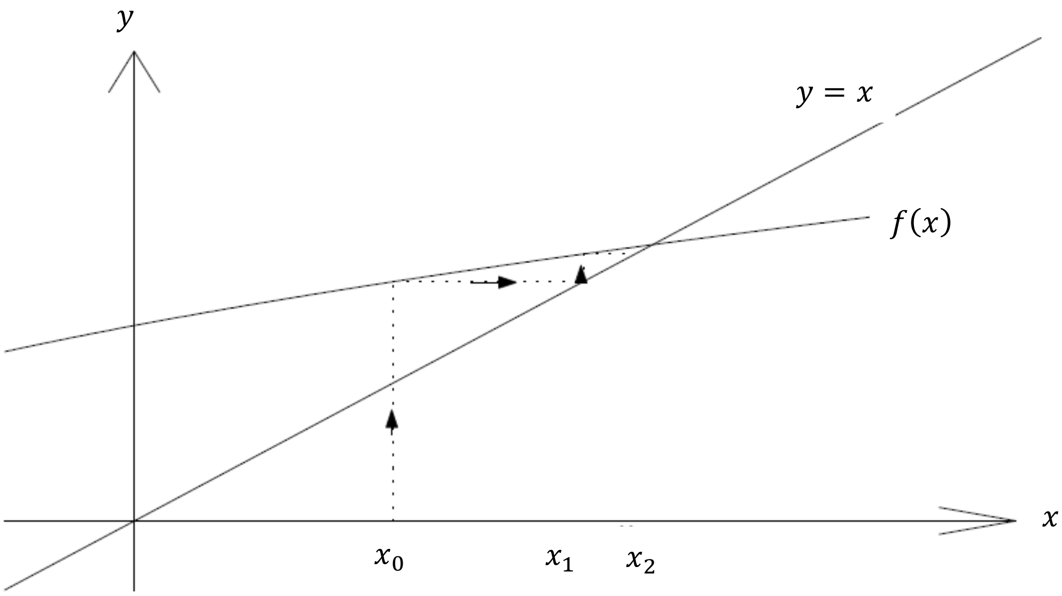

Fig 1.2 représentation graphique de la méthode du point fixe.

Exemple1:

$f(x) = x^2 - 2$ admet une racine dans[1,2] et $f'(x) = 2x > 0$

– choix de g : • $g_1(x) = 2/x$ $\quad g'_1(x) = -2/x^2$ $|g_1'(1)| = 2 > 1$

• $g_2(x) = 2x - 2/x$ $\quad g'_2(x) = 2+2/x^2$ $|g_2'(1)| = 3$

• $g_3(x) = x/2 + 1/x$ $\quad g'_3(x) = 1/2-1/x^2$ $|g_3'(1)| = 1/2$

Alors $g_3(x) = x/2 + 1/x$ permet la convergence vers la racine.

Exemple2:

Soit $f(x) = \frac{1}{4}(e^{-x} - x^2)$

1- Montrer que $g(x) = x + \frac{1}{4}(e^{-x} - x^2)$ converge vers la racine α sur [0,1].

2- Déterminer le nombre d'itérations nécessaires pour calculer une solution approchée avec une précisions $\varepsilon=10^{-10}$

Solution :

1- $$\begin{cases} g([a,b]) \subset [a,b] \text{ on } a: \\ 0 < g(0) = \frac{1}{4} < g(1) = 1 \text{ et } g'(x) > 0, \forall x \in [a,b] \ \ c.\text{à}.d \ g([0,1]) \subset [0,1] \\ \forall x \in [a,b] \ : |g'(x)| \leq k < 1 \end{cases}$$

$$comme: g'(x) = 1 - \left(\frac{e^{-x} + 2x}{4}\right) > 0 \ , \forall x \in [0,1]$$

$$\Rightarrow \max_{x \in I} |g'(x)| = |g'(0)| = \frac{3}{4}$$

D'où $k = \max_{x \in [a,b]} |g'(x)| = \frac{3}{4} < 1$

Alors la méthode du point fixe converge vers la solution sur [0,1]

2-Nombre d'itération pour $\varepsilon = 10^{-10}$

$$|x_n - \alpha| \leq |x_1 - x_0| \frac{k^n}{1-k} \quad et \quad k = max|g'(x)| = \frac{3}{4} < 1$$

Si on prend $x_0 = 0$, $x_1 = g(x_0) = x_0 + \frac{1}{4}(\bar{e}^{x_0} - x_0^2) = 0 + \frac{1}{4}(\bar{e}^0 - 0) = \frac{1}{4}$

$$\Rightarrow (x_1 - x_0) = \frac{1}{4}$$

Sachant que :$|x_n - \alpha| < \varepsilon$

$$d'ou: |x_1 - x_0| \frac{k^n}{1-k} \leq \varepsilon$$

$$\Rightarrow n \geq \frac{ln\left(\frac{\varepsilon(1-k)}{|x_1 - x_0|}\right)}{\ln k}$$

$$alors\ n \geq \left[\frac{\frac{ln10^{-10}(1-3/4)}{1/4}}{ln\ 3/4}\right] = 80{,}22$$

n=81 itérations

1.2.3 Méthode de Newton – Raphson:

Cette méthode se base sur le développement de Taylor au point x_0

$$f(\alpha) = f(x_0) + (\alpha - x_0)f'(x_0) + \frac{(\alpha - x_0)^2}{2!}f''(x_0) + \dots\dots\dots\dots + \frac{(\alpha - x_0)^n}{n!}f^{(n)}(x_0)$$

Si on prend n =1 on obtient :

$$f(\alpha) = f(x_0) + (\alpha - x_0)f'(x_0) + R(f)$$

$\alpha = x_0 - \frac{f(x_O)}{f'(x_0)} + R(f)$ $\quad R(f)$ le reste

Alors : $x_1 = x_0 - \frac{f(x_0)}{f'(x_0)}$ en négligeant le reste R (f)

$$x_2 = x_1 - \frac{f(x_1)}{f'(x_1)}$$

$$\begin{cases} \boldsymbol{x_0} \\ \boldsymbol{x_n = x_{n-1} - \frac{f(x_{n-1})}{f'(x_{n-1})}} \end{cases}$$

1.2.3.1 Interprétation de la méthode de Newton –Raphson

La méthode de Newton-Raphson est interprétée par la tangente en un point de la courbe d'une fonction f. Plus précisément, le choix d'une première valeur $\boldsymbol{x_0}$ approchée d'un zéro réel à localiser détermine un premier point **($\boldsymbol{x_0}$,$\boldsymbol{f(x_0)}$)** sur la courbe qui sera considéré comme un premier point de tangence. Ce nombre x_0 est appelé **point de départ** du procédé itératif de Newton-Raphson. L'abscisse x_1 du point d'intersection de la première tangente avec l'axe des x sera considérée comme une deuxième valeur approchée du zéro à localiser. En poursuivant ce procédé itérativement, on obtiendra une approximation de la racine.

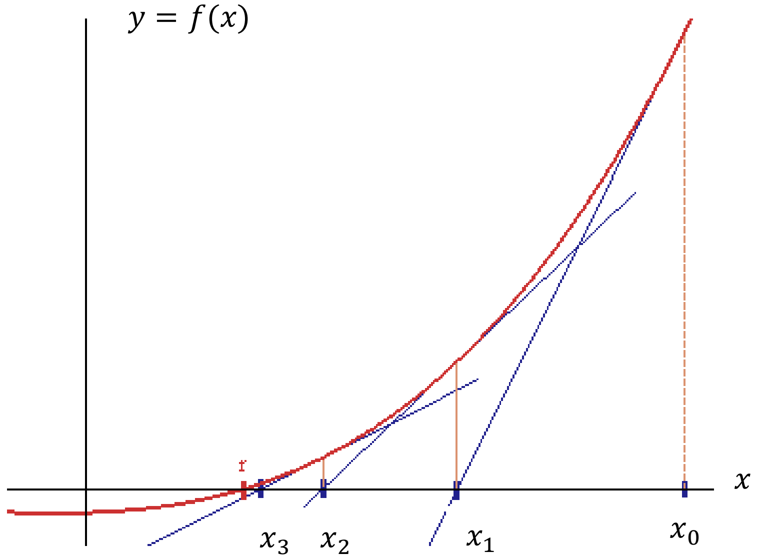

Fig 1.3 représentation graphique de la méthode de Newton-Raphson

1.2.3.2 Convergence de la méthode de Newton-Raphson :

Si $f: [a,b] \longrightarrow [a,b]$ verifie

1- $f(a) \,. f(b) < 0$

2- $\forall x \in [a,b]: f'(x) \neq 0$

3- $\forall x \in [a,b] f''(x) \neq 0$ et garde un signe constant sur $[a,b]$

Alors en choisissant $x_0 \in [a,b]$ tel que :$\boldsymbol{f(x_0). f''(x_0)}$>**0.**

Les itérations de newton convergent vers l'unique solution de $f(x) = 0$ dans $[a,b]$.

Remarque: si on cherche la racine α à 10^{-m} près; les itérations seront arrêtées lorsque $x_i$et x_{i+1} présentent les m décimales de la première à la $m^{iéme}$.

Exemple 1 :

$f\ (x) = x^6 - x - 1 = 0$ Sur [1,2]. $\varepsilon = 10^{-3}$ et $x_0 = 1{,}5$

$$\begin{cases} \boldsymbol{x_0} \\ \boldsymbol{x_n = x_{n-1} - \dfrac{f(x_{n-1})}{f'(x_{n-1})}} \end{cases}$$

$$\begin{cases} x_0 = 1{,}5 \\ x_n = x_{n-1} - \dfrac{x_{n-1}^6 - x_{n-1} - 1}{6x_{n-1}^5 - 1} \end{cases}$$

i	x_i
0	1.5000
1	1.30049
2	1.18148
3	1.13945
4	1.13478
5	1.13472

$\alpha = 1.134 \pm 10^{-3}$

Remarque:

L'estimation de l'erreur par la méthode de Newton est donnée par

$(\alpha - x_n) \leq \dfrac{M}{2m}(x_n - x_{n-1})^2$

M =max$\left|f''(x)\right|, x \in [a, b]$

m =min$\left|f'(x)\right|, x \in [a, b]$

Exemple2 :

Soit $f(x) = x^3 + x - 1$

$$\begin{cases} f\left(\dfrac{1}{2}\right) = -0.375 \\ f(1) = 1 \end{cases} \qquad \alpha \in \left[\frac{1}{2}, 1\right]$$

et $f'(x) > 0 \ sur \ \left[\frac{1}{2}, 1\right]$

$f'(x) = 3x^2 + 1 \neq 0 \ sur \left[\frac{1}{2}, 1\right]$

$f''(x) = 6x > 0 \ sur \left[\frac{1}{2}, 1\right]$

Le choix de x_0 :

$$f''(x) > 0 \ et \ f(1) > 0 \Rightarrow f''(1). f(1) > 0$$

Donc $x_0 = 1$

1.2.4Méthode de bissection (ou de Dichotomie) :

On suppose que l'equation $f(x)$=0 admet une unique solution α tel que $f(\alpha) = 0$ dans l'intervalle $[a, b]$ et que f continue dans $[a, b]$.

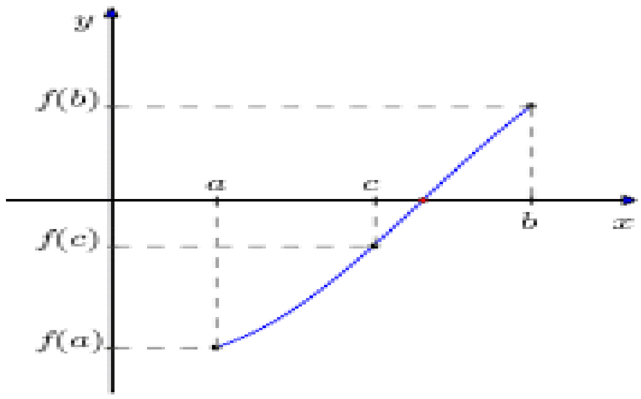

Fig. 1.4 représentation graphique de la méthode de bissection**.**

Cette méthode s'appuie sur le théorème des valeurs intermédiaires
$f(a). f(b) < 0$.

Elle consiste à construire une suite (x_n) qui converge vers la racine α de la manière suivante :

- Initialisation : on prend pour x_0 le milieu de $[a, b]$.

  La racine se trouve alors dans l'un des deux intervalles] a, x_0[ou] x_0, b[ou bien elle est égale à x_0.

- si $f(a).f(x_0) < 0$, alors $\alpha \in]a, x_0[$. On pose $a_1 = a$, $b_1 = x_0$.
- si $f(a).f(x_0) = 0$, alors $\alpha = x_0$.
- si $f(a).f(x_0) > 0$, alors $\alpha \in]x_0, b[$. On pose $a_1 = x_0$, $b_1 = b$. On prend alors pour x_1 le milieu de $[a_1, b_1]$. On construit ainsi une suite

  $x_0 = (a+b)/2$, $x_1 = (a_1 + b_1)/2$,................, $x_n = (a_n + b_n)/2$ telle que

  $|\alpha - x_n| \leq (b - a)/2^{n+1}$

Exemple :

Trouver la racine de l'équation $x^6 - x - 1 = 0$ dans l'intervalle [1.2]

Avec une précision $\varepsilon = 10^{-3}$

$$\begin{cases} f(1) = -1 \\ f(2) = 6 \end{cases} \Rightarrow f(1).f(2) < 0, \exists \alpha \in [1.2]: f(\alpha) = 0$$

$f'(x) = 6x^5 - 1.$ $\forall x \in [1,2]$: $f'(x) > 0 \Rightarrow$La racine est unique

n	a	b	$\alpha = \frac{a+b}{2}$	b-α	$f(\alpha)$
1	1.0000	2.0000	1.5000	0.5000	8.8990
2	1.0000	1.5000	1.12500	0.2500	1.5647
3	1.0000	1.2500	1.1250	0.1250	-0.0177
4	1.12500	1.2500	1.1875	0.0625	0.6167
5	1.1250	1.1875	1.1562	0.0312	0.2333
6	1.1250	1.1562	1.1406	0.0156	0.0616
7	1.1250	1.1406	1.1328	0.0078	-0.0196
8	1.1328	1.1406	1.1367	0.0039	0.0206
9	1.1328	1.1367	1.1348	0.00195	0.0004
10	1.1360	1.1348	1.1338	0.00098	0.00096

La racine : $\alpha \simeq 1.1338$ avec une erreur ≤ 0.00098.

Remarque :

Si on désire on calcule le nombre d'itération suffisant n pour approcher r α à ε près, on procède comme suit :

$$|x_n - \alpha| \leq \frac{b-a}{2^{n+1}} \leq \varepsilon$$

$$\Rightarrow n \geq \frac{\ln\left(\frac{b-a}{2\varepsilon}\right)}{\ln(2)}+1$$

Il suffit de prendre : $n = \frac{ln\left(\frac{b-a}{2\varepsilon}\right)}{ln(2)} + 1$