Exercice 1

1. $\lim_{x \to 0} \frac{\sin x}{x} = 1$ (cours)

2. Non, la fonction f n'admet pas de limite en 0. En effet, $\lim_{x \to 0} \frac{1}{x} = \infty$ et la fonction sinus n'a pas de limite en l'infini.

3. $\forall x \neq 0, -|x| \leq x \sin(1/x) \leq |x|$.
   Donc, par encadrement, $\lim_{x \to 0} x \sin(1/x) = 0$.

Exercice 2

1. $\forall x > 0, \frac{\sin(2x)}{\sqrt{x}} = 2\sqrt{x} \frac{\sin(2x)}{2x}$.
   Or, $\lim_{x \to 0} \frac{\sin(2x)}{2x} = \lim_{X \to 0} \frac{\sin(X)}{X} = 1$ et $\lim_{x \to 0} 2\sqrt{x} = 0$.
   Donc par produit, $\lim_{x \to 0} \frac{\sin(2x)}{\sqrt{x}} = 0$.

2. $\forall x \in \left]-\frac{\pi}{3}; 0\right[\cup \left]0; \frac{\pi}{3}\right[, \frac{\sin(2x)}{\sin(3x)} = \frac{2}{3} \frac{\sin(2x)}{2x} \frac{3x}{\sin(3x)}$.
   Donc, d'après la question 2.1, $\lim_{x \to 0} \frac{\sin(2x)}{\sin(3x)} = \frac{2}{3}$.

3. $\lim_{x \to 0} \frac{\tan(x)}{x} = \lim_{x \to 0} \frac{\tan(x) - \tan(0)}{x - 0} = \tan'(0) = 1$. (La règle de L'Hospital).

4. $\frac{x^2 \sin\left(\frac{1}{x}\right)}{\sin(x)} = \frac{x}{\sin(x)} x \sin\left(\frac{1}{x}\right)$.
   D'après l'exercice 2, $\lim_{x \to 0} \frac{x^2 \sin\left(\frac{1}{x}\right)}{\sin(x)} = 0$.

5. $\forall x \neq \frac{1}{2}, \frac{\cos(\pi x)}{1 - 2x} = -\frac{1}{2} \frac{\cos(\pi x) - \cos\left(\frac{\pi}{2}\right)}{x - \frac{1}{2}}$.
   Donc, $\lim_{x \to \frac{1}{2}} \frac{\cos(\pi x)}{1 - 2x} = -\frac{1}{2} \pi \left(-\sin\left(\frac{\pi}{2}\right)\right) = \frac{\pi}{2}$.

6. $\forall x \in \left[0; \frac{1}{2}\right[\cup \left]\frac{1}{2}; 1\right], (2x^2 + x - 1) \tan(\pi x) = \frac{2x - 1}{\cos(\pi x)} (x + 1) \sin(\pi x)$.
   D'après la question précédente, $\lim_{x \to \frac{1}{2}} (2x^2 + x - 1) \tan(\pi x) = -\frac{2}{\pi} \times \frac{3}{2} = -\frac{3}{\pi}$.

7. $\forall x \in \mathbb{R}^*, \frac{\cos x - 1}{x^2} = \frac{-2 \sin^2\left(\frac{x}{2}\right)}{x^2} = -\frac{1}{2} \left(\frac{\sin\left(\frac{x}{2}\right)}{\frac{x}{2}}\right)^2$.
   Donc, $\lim_{x \to 0} \frac{\cos x - 1}{x^2} = -\frac{1}{2}$.

8. $\dfrac{\ln(\cos(3x))}{\ln(\cos(2x))} = \dfrac{\ln\left(1-2\sin^2\left(\frac{3x}{2}\right)\right)}{\ln\left(1-2\sin^2(x)\right)} = \dfrac{\ln\left(1-2\sin^2\left(\frac{3x}{2}\right)\right)}{-2\sin^2\left(\frac{3x}{2}\right)} \times \dfrac{-2\sin^2 x}{\ln\left(1-2\sin^2 x\right)} \times \dfrac{-2\sin^2\left(\frac{3x}{2}\right)}{-2\sin^2 x}$.

Or, $\lim\limits_{x\to 0}\left(-2\sin^2\left(\dfrac{3x}{2}\right)\right) = 0$ et $\lim\limits_{X\to 0}\dfrac{\ln(1+X)}{X} = 1$, soit par composée, $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\ln\left(1-2\sin^2\left(\frac{3x}{2}\right)\right)}{-2\sin^2\left(\frac{3x}{2}\right)} = 1$.

De même, $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{-2\sin^2 x}{\ln\left(1-2\sin^2 x\right)} = 1$.

Par la méthode de la question 2., on trouve $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{-2\sin^2\left(\frac{3x}{2}\right)}{-2\sin^2 x} = \lim\limits_{x\to 0}\left(\dfrac{\sin\left(\frac{3x}{2}\right)}{\sin x}\right)^2 = \left(\dfrac{3}{2}\right)^2$.

Par suite, $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\ln(\cos(3x))}{\ln(\cos(2x))} = \dfrac{9}{4}$.

9. $\forall x \in]-\pi;0[\cup]0;\pi[$, $\dfrac{\ln(1+x^2)}{\sin^2 x} = \left(\dfrac{x}{\sin(x)}\right)^2 \dfrac{\ln(1+x^2)}{x^2}$.

Or, $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\ln(1+x^2)}{x^2} = \lim\limits_{X\to 0}\dfrac{\ln(1+X)}{X} = 1$.

Donc, $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\ln(1+x^2)}{\sin^2 x} = 1$.

10. $\ln^2 x - \sqrt{x} = \sqrt{x}\left(\left(\dfrac{\ln(x)}{x^{\frac{1}{4}}}\right)^2 - 1\right)$.

Par croissance comparée, $\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{\ln(x)}{x^{\frac{1}{4}}} = 0$.

On en déduit que $\lim\limits_{x\to+\infty}\ln^2 x - \sqrt{x} = -\infty$.

11. $\forall x > 0$, $\dfrac{\ln(x+1)}{\ln x} = \dfrac{\ln\left(x\left(1+\frac{1}{x}\right)\right)}{\ln x} = 1 + \dfrac{\ln\left(1+\frac{1}{x}\right)}{\ln x}$.

On en déduit que $\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{\ln(x+1)}{\ln x} = 1$.

12. $\lim\limits_{x\to 0}\sqrt{x}\ln^3 x = \lim\limits_{x\to 0}\left(x^{\frac{1}{6}}\ln x\right)^3 = 0$ par croissance comparée.

13. $\forall x > 0$, en posant $X = \ln x$ on a $\dfrac{\exp(\ln^2 x)}{x^n} = \dfrac{e^{X^2}}{e^{nX}} = e^{X^2-nX}$.

Donc, pour tout $n \in \mathbb{Z}$, $\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{\exp(\ln^2 x)}{x^n} = \lim\limits_{X\to+\infty} e^{X^2-nX} = +\infty$.

Exercice 3. Notons T une période strictement positive de f et l la limite de f en $+\infty$.
$\forall x \in \mathbb{R}$ et $\forall n \in \mathbb{N}$, $f(x) = f(x+nT)$.
On a donc pour tout réel x,
- d'une part, $\lim\limits_{n\to+\infty} f(x+nT) = f(x)$
- d'autre part, $\lim\limits_{n\to+\infty} f(x+nT) = l$. Par unicité de la limite, on en déduit que pour tout réel x, $f(x) = l$, ce qui signifie que f est une fonction constante.

Exercice 4:

$$f(x) = \sqrt{x^2+x+1} - ax$$

$\lim\limits_{x\to\infty} f(x) = \infty - \infty$ indeterminé

$$\lim f(x) = \frac{(\sqrt{x^2+x+1} - ax)(\sqrt{x^2+x+1} + ax)}{\sqrt{x^2+x+1} + ax}$$

$$= \frac{x^2+x+1 - a^2x^2}{\sqrt{x^2+x+1} + ax} = \frac{(1-a^2)x^2 + x + 1}{x\sqrt{1+\frac{1}{x}+\frac{1}{x^2}} + ax}$$

$$\lim_{x\to\infty} f(x) = \lim_{x\to\infty} (1-a^2)x$$

$\to a = 1$ $\quad \lim\limits_{x\to\infty} f(x) = \lim\limits_{x\to\infty} \frac{x+1}{x\sqrt{1+\frac{1}{x}+\frac{1}{x^2}} + x} = \lim \frac{x}{x\underbrace{\left(\sqrt{1+\frac{1}{x}+\frac{1}{x^2}}+1\right)}_{2}}$

$$= 1/2$$

$\to a < 1 \quad \lim f(x) = +\infty$

$\to a > 1 \quad \lim f(x) = -\infty$

Exercice 5:

$$f(x) = \begin{cases} \dfrac{x^3-8}{x-2} & x \neq 2 \\ a & x = 2 \end{cases}$$

La fonction f est continue en tout point différent de 2 car c'est le quotient de 2 fctions continues et le dénominateur est non nul.

On remarque que $x^3-8 = (x-2)(x^2+2x+4)$

pour $x \neq 2$ $\lim_{x \to 2} f(x) = \lim_{x \to 2} (x^2+2x+4) = 12$

f est continue en 2 si $\alpha = 12$ c.a.d

$$\lim_{x \to 2} f(x) = f(2) = \alpha = 12$$

donc f est continue sur $\mathbb{R}$.

Exercice 5 :

$$f(x) = \begin{cases} \frac{1-\cos(x)}{x^2} & x \neq 0 \\ \alpha & x = 0 \end{cases}$$

on a : $\sin^2 a = \frac{1-\cos(2a)}{2}$

$$1 - \cos(2a) = 2\sin^2(a)$$

$2a = x$
$a = x/2$

$$\frac{1-\cos(x)}{x^2} = \frac{2\sin^2(x/2)}{x^2} = 2\,\frac{\sin^2(x/2)}{4(x/2)^2} = \frac{1}{2}\,\frac{\sin^2(x/2)}{(x/2)^2}$$

$$\lim_{x \to 0} f(x) = \lim_{x \to 0} \frac{1}{2}\underbrace{\left(\frac{\sin x/2}{(x/2)}\right)^2}_{\to 1} = \frac{1}{2}$$

Pour que f soit continue sur $\mathbb{R}$ c.a.d prolongeable par continuité il faut que $\lim_{x \to 0} f(x) = f(0) = \alpha$

c.a.d $\boxed{\alpha = 1/2}$

Exercice 7 :

1) oui la fonction f est continue en 0 car c'est le quotient de 2 fonctions continues en 0 et f au dénominateur ne s'annule pas en 0

$x^3 - 2x^2 - x + 2 = (x-1)(x^2 - x - 2) = (x-1)(x+1)(x-2)$

$\rightarrow x \geq 0 \qquad |x| = x \qquad f(x) = -(x+1)(x-2)$

$$\lim_{x \to 1} f(x) = 2$$

$\rightarrow x \leq 0 \qquad |x| = -x \qquad f(x) = (x-1)(x-2)$

$$\lim_{x \to -1} f(x) = 6$$

<u>Exercice B</u>

1) $f(x) = \begin{cases} \sqrt{x} & 0 \leq x \leq 1 \\ ax^2 + bx + 1 & x > 1 \end{cases}$

f est dérivable sur $\mathbb{R}_+^*$, donc elle est dérivable au pt $x_0 = 1$

On a : $\lim_{x \to 1^-} \frac{f(x) - f(1)}{x-1} = \lim \frac{\sqrt{x} - 1}{x-1} = \lim \frac{1}{\sqrt{x}+1} = 1/2$

$\lim_{x \to 1^+} f(x) = \lim \frac{f(x) - f(1)}{x-1} = \lim \frac{ax^2 + bx - a - b}{x-1} = 2a+b$

et f ~~est~~ ~~continue~~ au pt $x_0 = 1$

$$\lim_{x \to 1^-} f(x) = \lim_{x \to 1^+} f(x) \Rightarrow a + b + 1 = 1$$
$$a + b = 0$$

$\begin{cases} 2a + b = 1/2 & f \text{ dérivable en } 1 \\ a + b = 0 & f \text{ Continue en } 1 \end{cases}$

on obtient $\quad a = 1/2$
$\qquad\qquad\quad b = -1/2$

2] $f(x) = \begin{cases} x \ln(|x|) & x \neq 0 \\ 0 & x = 0 \end{cases}$

Les fonctions $\begin{cases} x \rightarrow x \\ x \rightarrow |x| \\ x \rightarrow \ln(x) \end{cases}$ sont Continues, dérivables sur leur domaine de définition

(Comme multiplication et Composition de fonctions).

→ La Continuité au pt $x=0$

$\lim_{x\to 0} f(x) = 0 = f(0)$, f Continue au pt $x=0$

→ Dérivabilité au pt $x=0$

$\lim_{x\to 0} \frac{f(x)-f(0)}{x-0} = \lim_{x\to 0} \ln(|x|) = -\infty$ alors f n'est pas

dérivable au pt $x=0$

$$\boxed{g(x) = \begin{cases} \sin^2(x)\cos(\frac{1}{x}) & x \neq 0 \\ 0 & x = 0 \end{cases}}$$

Les fctions $\begin{cases} x \to x^2 \\ x \to \sin(x) \\ x \to \cos x \end{cases}$ sont Continues, dérivables sur $\mathbb{R}$

et la fction $\frac{1}{x}$ est Continue et dérivable sur $\mathbb{R}^*$

alors la fction g est Continue et dérivable sur $\mathbb{R}^*$

(Comme multiplication et Composition de fctions Continues et dérivables)

→ Continuité au pt $x=0$

$\lim_{x\to 0} g(x) = g(0) = 0$ g Continue au pt 0

→ Dérivabilité au pt $x=0$

$\lim_{x\to 0} \frac{g(x)-g(0)}{x-0} = \lim_{x\to 0} \frac{\sin^2 x \cos 1/x}{x} = \lim_{x\to 0} \underbrace{\frac{\sin^2 x}{x^2}}_{1} \cdot \underbrace{x \cos 1/x}_{\to 0}$

$-1 \leq \cos 1/x \leq 1$ $\quad \underbrace{-x}_{\downarrow 0} \leq x \cos 1/x \leq \underbrace{x}_{\downarrow 0}$ $(x\to 0)$ $\quad = 0$

d'où g est dérivable au pt $x=0$

On a $|\sin(x_1) - \sin(x_2)| < |x_1 - x_2|$

On peut le vérifier par le théorème des accroissements finis (TAF).

$x_1, x_2 \in \mathbb{R}$ il existe alors $c \in]x_1, x_2[$ tel que

$$f(x_1) - f(x_2) = f'(c)(x_1 - x_2).$$

Dans le cas de $f(x) = \sin(x)$ $\quad f'(x) = \cos x$ alors $|f'(x)| \leq 1$.

L'inégalité de A.F est $|f(x_1) - f(x_2)| \leq M |x_1 - x_2|$

$|f'(c)| \leq M$ et $|f'(x)| \leq 1 \quad \forall x$

alors $|\sin x_1 - \sin x_2| \leq |x_1 - x_2|$.
$\leq \delta$

il suffit de prendre $\delta = \varepsilon$ pour que $|\sin x_1 - \sin x_2| < \varepsilon$

2] $f(x) = \dfrac{\sin(2x)}{\sqrt{1+x} - 1}$

D_f. $\sqrt{1+x} - 1 \neq 0 \quad \sqrt{1+x} \neq 1$

$1 + x \neq 1 \implies x \neq 0$

$$\lim_{x \to 0} f(x) = \lim \frac{\sin(2x)}{\sqrt{1+x} - 1} \cdot \frac{\sqrt{1+x} + 1}{\sqrt{1+x} - 1} = \frac{(\sqrt{1+x} + 1)\sin(2x)}{\cancel{1} + x - \cancel{1}}$$

$$= \lim_{x \to 0} (\sqrt{1+x} + 1) \frac{\sin(2x)}{x}$$

$$= \lim \underbrace{(\sqrt{1+x} + 1)}_{\to 2} \underbrace{\frac{\sin(2x)}{(2x)}}_{\to 1} \times 2 = 4$$

On peut prolonger f par continuité et

$$\tilde{f} = \begin{cases} \dfrac{\sin(2x)}{\sqrt{1+x} - 1} & x \neq 0 \\ 4 & x = 0 \end{cases}$$