Centre Universitaire Abdelhafid Boussouf – Mila

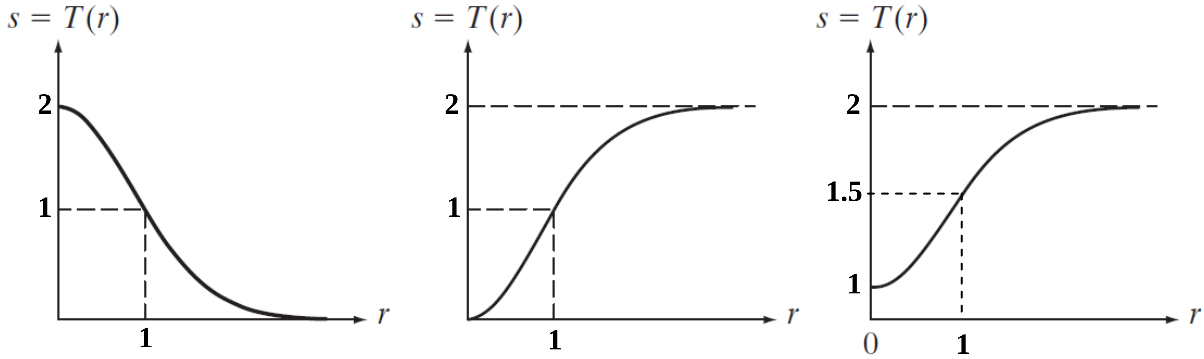
Institut ST — 1ière Année Master STIC (S1)

Département MI — Mila le 06/02/2019

Corrigé type de l'examen final en traitement d'image

Exercice 1 (6 points) :

Soient les fonctions exponentielles de la forme $e^{-\alpha r^2}$ avec α une constante positive qui sont utiles pour construire certains types de fonctions de transformation d'intensité. Construire les fonctions de transformation ayant les formes générales illustrées dans les figures suivantes.



(a) (b) (c)

Solution:

a) La forme générale: $\mathrm{s} = \mathrm{T}\,(\mathrm{r}) = \mathrm{A}e^{-Kr^2}$. Pour la condition montrée dans la figure (a) de l'exercice, $2e^{-K} = 1$. La résolution pour K va donner :

$$-K = \ln(0.5)$$
$$K = \ln(2)$$

donc

$$\mathbf{s} = \mathbf{T}\,(\mathbf{r}) = \mathbf{2}e^{-0.6931r^2}.$$

b) La forme générale: $\mathrm{s} = \mathrm{T}\,(\mathrm{r}) = \mathrm{B}(1 - e^{-Kr^2})$. Pour la condition montrée dans la figure (b) de l'exercice, $2(1 - e^{-K}) = 1$. La résolution pour K va donner :

$$-K = \ln(0.5)$$
$$K = \ln(2)$$

donc

$$\mathbf{s} = \mathbf{T}\,(\mathbf{r}) = \mathbf{2}\left(\mathbf{1} - e^{-0.6931r^2}\right)$$

c) La forme générale est : $\mathrm{s} = \mathrm{T}\,(\mathrm{r}) = (\mathrm{D} - \mathrm{C})\left(1 - e^{-Kr^2}\right) + C = 2 - e^{-Kr^2}$. La résolution pour K va donner :

$$-K = \ln(0.5)$$
$$K = \ln(2)$$

donc

$$\mathbf{s} = \mathbf{T}\,(\mathbf{r}) = \mathbf{2} - e^{-0.6931r^2}$$

Exercice 2 (6 points) :

1) Donner la définition de la convolution spatiale.

2) Calculer l'image g qui représente la convolution $g = f * k$, tel que :

$f =$

1	**1**	**1**	**0**	**0**
0	**1**	**1**	**0**	**1**
0	**1**	**1**	**1**	**0**
0	**0**	**1**	**1**	**0**
0	**1**	**0**	**0**	**1**

Image d'entrée

$k =$

1	**0**	**1**
0	**2**	**0**
1	**0**	**1**

Noyau de convolution

3) Ecrire un programme Matlab qui permet de calculer cette convolution.

Solution:

1) La définition de la convolution spatiale :

$$g(x,y) = \sum_{s=-a}^{a} \sum_{t=-b}^{b} w(s,t) f(x+s, y+t)$$

2) Résultat de la convolution $g = f * k$:

$g =$

5	5	2
4	4	5
1	5	4

Image de sortie

3) Ecrire un programme Matlab qui permet de calculer cette convolution :

```
clear; clc;
f = [1 1 1 0 0; 0 1 1 0 1; 0 1 1 1 0; 0 0 1 1 0; 0 1 0 0 1];
k = [1 0 1;0 2 0;1 0 1];
g = filter2(k,f,'valid');
```

Exercice 3 (8 points) :

En se basant sur l'équation $\frac{\partial f}{\partial x} = \boldsymbol{f(x+1) - f(x)}$, une approche pour approximer la dérivée discrète en 2-D est basée sur le calcul des différences de la forme et $\boldsymbol{g_x = f(x+1,y) - f(x,y)}$ et $\boldsymbol{g_y = f(x,y+1) - f(x,y)}$.

1) Trouvez le filtre équivalent $H\ (u,v)$ dans le domaine fréquentiel.
2) Montrez que votre résultat est un filtre passe-haut (ex. détecteur de contours).
3) Trouvez le filtre équivalent $H(u,v)$ qui implémente dans le domaine fréquentiel l'opération spatiale effectuée par le masque Laplacien suivant :

0	**1**	**0**
1	**-4**	**1**
0	**1**	**0**

4) Pouvez-vous trouver un moyen qui permet à la transformée de Fourier de calculer la magnitude du gradient $\boldsymbol{M(x,y) = \|\nabla f(x,y)\| = \sqrt{g_x{}^2 + g_y{}^2}}$ pour une utilisation dans la différenciation d'image? Si votre réponse est oui, donnez une méthode pour le faire. Si votre réponse est non, expliquez pourquoi.

Solution:

1) L'image filtrée est donnée par:

$$g(x,y) = f(x+1,y) - f(x,y) + f(x,y+1) - f(x,y)$$

À partir de la propriété de la Translation de la DFT,

$$\begin{aligned} G(u,v) &= F(u,v)e^{i2\pi u/N} - F(u,v) + F(u,v)e^{i2\pi v/M} - F(u,v) \\ &= \left[e^{i2\pi u/N} - 1\right]F(u,v) + \left[e^{i2\pi v/M} - 1\right]F(u,v) \\ &= H(u,v)F(u,v) \end{aligned}$$

où $H(u,v)$ est la fonction de filtre:

$$\begin{aligned} H(u,v) &= \left[\left(e^{i2\pi u/N} - 1\right) + \left(e^{i2\pi v/M} - 1\right)\right] \\ &= 2i\left[sin(\pi\, u/N)e^{i\pi u/N} + sin(\pi v/M)e^{i\pi v/M}\right] \end{aligned}$$

2) Pour voir qu'il s'agit d'un filtre passe-haut, cela aide à exprimer la fonction de filtre sous la forme de fonctions centrées:

$$H(u,v) \quad = 2i\left[sin(\pi\,[u-N/2]/N)e^{i\pi u/N} + sin(\pi[v-M/2]/M)e^{i\pi v/M}\right]$$

La fonction est 0 au centre du filtre ($u = N/2$ et $v = M/2$). Au fur et à mesure que u et v augmentent, la valeur du filtre diminue, atteignant sa valeur limite proche de $-4i$ lorsque $u = N-1$ et $v = M-1$. La valeur limite négative est due à l'ordre dans lequel les dérivées sont prises. Si, à la place, nous avions pris des différences de la forme $f(x,y) - f(x+1,y)$ et $f(x,y) - f(x,y+1)$, le filtre aurait tendu vers un positif valeur limite. Le point important ici est que le terme continu (dc term) est éliminé et que les fréquences plus élevées sont passées, ce qui est la caractéristique d'un filtre passe-haut.

3) La fonction filtrée est donnée par :

$$g(x,y) = f(x+1,y) + f(x-1,y) + f(x,y+1) + f(x,y-1) - 4f(x,y)$$

Comme dans la question précédente :

$$G(u,v) = H(u,v)F(u,v)$$

où

$$\begin{aligned} H(u,v) \quad &= \left[e^{i2\pi u/N} + e^{-i2\pi u/N} + e^{i2\pi v/M} + e^{-i2\pi v/M} - 4\right] \\ &= 2[cos(2\pi\, u/N) + cosn(2\,\pi v/M) - 2] \end{aligned}$$

Le décalage du filtre au centre du rectangle de fréquence donne

$$H(u,v) = 2[cos(2\pi\,[u-N/2]/N) + cosn(2\,\pi[vv-M/2]/M) - 2]$$

Lorsque $(u,v) = (M/2, N/2)$ (le centre du filtre décalé), $H(u,v) = 0$. Pour les valeurs éloignées du centre, $H(u,v)$ diminue en raison de l'ordre dans lequel les dérivées sont prises. Le point important est que le terme continu (dc term) est éliminé et que les fréquences les plus élevées sont passées, ce qui est la caractéristique d'un filtre passe-haut.

4) La réponse est non. La transformée de Fourier est un processus linéaire, tandis que les carrées et les racines carrées impliquées dans le calcul du gradient sont des opérations non linéaires. La transformée de Fourier peut être utilisée pour calculer les dérivées sous forme de différences, mais les carrés, la racine carrée ou les valeurs absolues doivent être calculés directement dans le domaine spatial.