Annexe 1

Formalisme de Lagrange

1. Démonstration de l'équation de Lagrange

Considérons un système constitué de N points matériels (N masses). Si l'on suppose que chaque point a n coordonnées généralisée (q_n), les vecteurs positions peuvent être s'écrire comme,

$$\begin{aligned}
&\vec{r}_1 = \vec{r}_1(q_1 \ldots q_n, t) \\
&. \\
&\vec{r}_i = \vec{r}_i(q_1 \ldots q_n, t) \\
&. \\
&\vec{r}_n = \vec{r}_N(q_1 \ldots q_n, t)
\end{aligned} \tag{A1.1}$$

- Le déplacement de l'énième vecteur position $d\vec{r}_i$ est donné par :

$$d\vec{r}_i = \sum_{j=1}^{n} \frac{\partial \vec{r}_i}{\partial q_j} \delta q_j + \frac{\partial \vec{r}}{\partial t} dt \tag{A1.2}$$

- et le déplacement virtuel est donné par,

$$\delta \vec{r}_i = \sum_{j=1}^{n} \frac{\partial \vec{r}_i}{\partial q_j} dq_j \,. \tag{A1.3}$$

De la relation 2 on peut tirer la formule de la vitesse qui sera donner par,

$$\vec{v}_i = \frac{d\vec{r}_i}{dt} = \sum_{j=1}^{n} \frac{\partial \vec{r}_i}{\partial q_j} \frac{\delta q_j}{dt} + \frac{\partial \vec{r}}{\partial t}, \qquad \dot{q} = \frac{\delta q_j}{dt}$$

$$\vec{v}_i == \sum_{j=1}^{n} \frac{\partial \vec{r}_i}{\partial q_j} \dot{q}_j + \frac{\partial \vec{r}}{\partial t} \tag{A1.4}$$

Maintenant, si je prends la dérivé du vecteur position (de la relation A1.2) par apport à la coordonnée q_j j'obtiens,

$$\frac{\partial \vec{r}_i}{\partial q_j} = \sum_{j=1}^{n} \frac{\partial \vec{r}_i}{\partial q_j} \tag{A1.5}$$

Et si je prends la dérivé du vecteur vitesse (de la relation A1.4) par apport à la vitesse généralisée $\dot{q}_j$ j'obtiens,

$$\frac{\partial \vec{v}_i}{\partial \dot{q}_j} = \sum_{j=1}^{n} \frac{\partial \vec{r}_i}{\partial q_j} \tag{A1.6}$$

Des relations 5 et 6 on peut écrire,

$$\frac{\partial \vec{v}_i}{\partial \dot{q}_j} = \frac{\partial \vec{r}_i}{\partial q_j} \tag{A1.7}$$

- On peut écrire aussi,

$\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial \vec{r}_i}{\partial q_j}\right) = \left(\frac{\partial^2 \vec{r}}{\partial q_j \partial t}\right)$, où $\vec{r}$ est donné par la relation (A1.1).

Donc,

$$\left(\frac{\partial \vec{r}_i}{\partial q_j}\right) = \left(\sum_{i=1}^{n} \frac{\partial \vec{r}_i}{\partial q_j} + \frac{\partial^2 \vec{r}_i}{\partial t \partial q_j} dt\right) = \left(\sum_{i=1}^{n} \frac{\partial \vec{r}_i}{\partial q_j} \frac{\partial q_j}{\partial q_j} + \frac{\partial^2 \vec{r}_i}{\partial t \partial q_j} dt\right)$$

$$\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial \vec{r}_i}{\partial q_j}\right) = \left(\sum_{i=1}^{n} \frac{\partial^2 \vec{r}_i}{\partial q_j \partial q_j} \frac{\partial q_j}{dt} + \frac{\partial^2 \vec{r}_i}{\partial t \partial q_j}\right)$$

$$\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial \vec{r}_i}{\partial q_j}\right) = \left(\sum_{i=1}^{n} \frac{\partial^2 \vec{r}_i}{\partial q_j \partial q_j} \dot{q}_j + \frac{\partial^2 \vec{r}_i}{\partial t \partial q_j}\right) = \frac{\partial}{\partial q_j}\left(\sum_{i=1}^{n} \frac{\partial^2 \vec{r}_i}{\partial q_j} \dot{q}_j + \frac{\partial^2 \vec{r}_i}{\partial t}\right)$$

On constate que le terme entre la parenthèse est la vitesse $\vec{v}_i$ (A1.4) on peut écrire,

$$\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial \vec{r}_i}{\partial q_j}\right)=\frac{\partial \vec{v}_i}{\partial q_j} \tag{A1.8}$$

- Partons du principe de d'Alembert

$$\sum_{i=1}^{n}\left(\vec{F}-m_i\frac{d\vec{v}_i}{dt}\right)\delta\vec{r}_i=0 \quad \Rightarrow \quad \sum_{i=1}^{N}\vec{F}\delta\vec{r}_i=\sum_{i=1}^{N}m_i\frac{d\vec{v}_i}{dt}\delta\vec{r}_i \tag{A1.9}$$

Ici la force $\vec{F}$ est la résultante de toutes les forces agissantes sur le système.

Remplaçons par $\delta\vec{r}_i$ (A1.3), on obtient

$$\sum_{1=1}^{N}\sum_{j=1}^{n}\vec{F}\frac{\partial \vec{r}_i}{\partial q_j}dq_j=\sum_{i=1}^{N}\sum_{j=1}^{n}m_i\frac{d\vec{v}_i}{dt}\frac{\partial \vec{r}_i}{\partial q_j}dq_j \tag{A1.10}$$

On peut écrire le premier terme par :

$$\sum_{j=1}^{n}\vec{F}\frac{\partial \vec{r}_i}{\partial q_j}dq_j=Q_j dq_j,$$

Où Q_j est la force généralisé conjugué de la coordonnée généralisée q_j .

$$Q_j=\vec{F}\frac{\partial \vec{r}_i}{\partial q_j}$$

Alors la relation 10 peut être reformulé par :

$$\sum_{j=1}^{n}m_i\frac{d\vec{v}_i}{dt}\frac{\partial \vec{r}_i}{\partial q_j}dq_j=Q_j dq_j \tag{A1.11}$$

- On cherche à quoi égal le premier terme dans (A1.11).

Nous avons,

$$\sum_{j=1}^{n} m_i \frac{d\vec{v}_i}{dt}\frac{\partial \vec{r}_i}{\partial q_j} dq_j = \sum_{j=1}^{n} m_i \frac{d^2\vec{r}_i}{dt^2}\frac{\partial \vec{r}_i}{\partial q_j} dq_j \ .$$

Si on prend,

$$\sum_{j=1}^{n} \frac{d}{dt}\left(m_i \frac{d\vec{r}_i}{dt}\frac{\partial \vec{r}_i}{\partial q_j}\right) dq_j = \sum_{j=1}^{n}\left(m_i \frac{d^2\vec{r}_i}{dt^2}\frac{\partial \vec{r}_i}{\partial q_j}\right) dq_j + \sum_{j=1}^{n}\left(m_i \frac{d\vec{r}_i}{dt}\frac{d}{dt}\frac{\partial \vec{r}_i}{\partial q_j}\right) dq_j \quad \text{(A1.12)}$$

Et par suite on obtient,

$$\sum_{j=1}^{n}\left(m_i \frac{d^2\vec{r}_i}{dt^2}\frac{\partial \vec{r}_i}{\partial q_j}\right) dq_j = \sum_{j=1}^{n} \frac{d}{dt}\left(m_i \frac{d\vec{r}_i}{dt}\left(\frac{\partial \vec{r}_i}{\partial q_j}\right)\right) dq_j - \sum_{j=1}^{n}\left(m_i \frac{d\vec{r}_i}{dt}\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial \vec{r}_i}{\partial q_j}\right)\right) dq_j$$

Alors,

$$\sum_{j=1}^{n}\left(m_i \frac{d\vec{v}_i}{dt}\frac{\partial \vec{r}_i}{\partial q_j}\right) dq_j = \sum_{j=1}^{n} \frac{d}{dt}\left(m_i \frac{d\vec{r}_i}{dt}\left(\frac{\partial \vec{r}_i}{\partial q_j}\right)\right) dq_j - \sum_{j=1}^{n}\left(m_i \frac{d\vec{r}_i}{dt}\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial \vec{r}_i}{\partial q_j}\right)\right) dq_j \ .$$

De la relation (A1.7), on remplace $\left(\frac{\partial \vec{r}_i}{\partial q_j}\right)$ dans le premier terme du deuxième membre de la relation précédente et de la relation (8) on remplace $\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial \vec{r}_i}{\partial q_j}\right)$.

En fin,

$$\sum_{j=1}^{n}\left(m_i \frac{d\vec{v}_i}{dt}\frac{\partial \vec{r}_i}{\partial q_j}\right) dq_j = \sum_{j=1}^{n} \frac{d}{dt}\left(m_i \vec{v}_i\left(\frac{\partial \vec{v}_i}{\partial \dot{q}_j}\right)\right) dq_j - \sum_{j=1}^{n}\left(m_i \vec{v}_i\left(\frac{\partial \vec{v}_i}{\partial q_j}\right)\right) dq_j \quad \text{(A1.13)}$$

On peut écrire,

$$v_i^{\,2} = \vec{v}_i.\vec{v}_i \quad \Rightarrow \quad \frac{\partial}{\partial q_j}\left(\vec{v}_i\vec{v}_i\right) = \left(\frac{\partial \vec{v}_i}{\partial q_j}\right)\vec{v}_i + \vec{v}_i\left(\frac{\partial \vec{v}_i}{\partial q_j}\right)$$

$$m_i\vec{v}_i\left(\frac{\partial\vec{v}_i}{\partial q_j}\right)=\frac{1}{2}m_i{v_i}^2=T_i \qquad \text{(A1.14)}$$

Et

$${v_i}^2=\vec{v}_i.\vec{v}_i \quad\Rightarrow\quad \frac{\partial}{\partial\dot{q}_j}(\vec{v}_i\vec{v}_i)=\left(\frac{\partial\vec{v}_i}{\partial\dot{q}_j}\right)\vec{v}_i+\vec{v}_i\left(\frac{\partial\vec{v}_i}{\partial\dot{q}_j}\right)$$

$$m_i\vec{v}_i\left(\frac{\partial\vec{v}_i}{\partial\dot{q}_j}\right)=\frac{1}{2}m_i{v_i}^2=T_i \qquad \text{(A1.15)}$$

L’énergie cinétique totale du système sera donnée par :

$$T=\sum_{i=1}^{N}\frac{1}{2}m_i{v_i}^2 \qquad \text{(A1.16)}$$

Par remplacement des relations (13), (14) et (15) dans (12) on trouve,

$$\sum_{j=1}^{n}\left(m_i\frac{d\vec{v}_i}{dt}\frac{\partial\vec{r}_i}{\partial q_j}\right)dq_j=\sum_{j=1}^{n}\frac{d}{dt}\left(\left(\frac{\partial T}{\partial\dot{q}_j}\right)\right)dq_j-\sum_{j=1}^{n}\left(\left(\frac{\partial T}{\partial q_j}\right)\right)dq_j \qquad \text{(A1.17)}$$

Remplaçons le premier membre de l’équation par la force généralisée donnée par (A1.11), et donc le principe de d’Alembert peut être s’écrire sous la forme suivante.

$$\sum_{j=1}^{n}\left[\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial T}{\partial\dot{q}_j}\right)-\left(\frac{\partial T}{\partial q_j}\right)\right]dq_j=Q_j dq_j$$

Ou,

$$\sum_{j=1}^{n}\left[\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial T}{\partial\dot{q}_j}\right)-\left(\frac{\partial T}{\partial q_j}\right)\right]=Q_j \qquad \text{(A1.18)}$$

L’équation (A1.18) est connue comme l’équation de Lagrange.

Les coordonnées généralisées doivent être indépendantes et par suite on peut récrire cette relation pour chaque coordonnée par,

$$\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial T}{\partial \dot{q}_j}\right)-\left(\frac{\partial T}{\partial q_j}\right)=Q_j \qquad \text{(A1.19)}$$

2. Cas particuliers

2.1 Toutes les forces généralisées sont dérivées de potentiel

Si l'on considère que toutes les forces dérivent d'un potentiel, on peut écrire

$$Q_j=-\frac{\partial U}{\partial q_j} \qquad \text{(A1.20)}$$

Où

$$U=\sum_{i=1}^{N} U_i$$

On remplace (20) dans (19),

$$\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial T}{\partial \dot{q}_j}\right)-\left(\frac{\partial T}{\partial q_j}\right)+\frac{\partial U}{\partial q_j}=0$$

On peut écrire aussi,

$$\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial T}{\partial \dot{q}_j}\right)-\left(\frac{\partial (T-U)}{\partial q_j}\right)=0$$

Puisque l'énergie potentille ne dépend pas des vitesses $\dot{q}_j$ (elle est fonction des q_j), ça veut dire que $\frac{\partial U}{\partial \dot{q}_j}=0$. on peut ajouter ce terme au premier terme de (20)

$$\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial (T-U)}{\partial \dot{q}_j}\right)-\frac{\partial (T-U)}{\partial q_j}=0 \qquad \text{(A1.21)}$$

La quantité $L=T-U$ est connue sous le nom de l'équation **d'Euler-Lagrange** ou le lagrangien du système. Alors la ***première équation de Lagrange***

$$\boxed{\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial L}{\partial \dot{q}_j}\right)-\frac{\partial L}{\partial q_j}=0} \qquad \text{(A1.22)}$$

2.2 Les forces généralisées sont des forces dérivées du potentiel plus des forces frottements.

Généralement, dans ce cours on s'intéresse seulement à des forces des frottements visqueuses de la forme $\vec{f}=-c\vec{v}$. c est le coefficient de frottement et $\vec{v}$ la vitesse.

Dans ce cas l'équation de Lagrange sera écrite comme,

$$\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial L}{\partial \dot{q}_j}\right)-\frac{\partial L}{\partial q_j}=F_{q_j} \qquad \text{(A1.23)}$$

$F_{q_j}=\vec{f}\,\dfrac{\partial \vec{r}}{\partial q_j}$ est la force généralisée conjuguée de q_j, alors

$$F_{q_j}=-c\frac{\partial \vec{r}}{dt}\frac{\partial \vec{r}}{\partial q_j}=-c\frac{\partial \vec{r}}{dt}\frac{\partial \vec{r}}{\partial q_j}\frac{\partial q_j}{\partial q_j}=-c\frac{\partial \vec{r}}{\partial q_j}\frac{\partial \vec{r}}{\partial q_j}\frac{\partial q_j}{dt},$$

$$F_{q_j}=-c\left(\frac{\partial \vec{r}}{\partial q_j}\right)^2\dot{q}_j=-c\beta\dot{q}_j,\quad où \qquad \beta=\left(\frac{\partial \vec{r}}{\partial q_j}\right)^2$$

L'équation de Lagrange peut être s'écrire sous la forme,

$$\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial L}{\partial \dot{q}_j}\right)-\frac{\partial L}{\partial q_j}=-c\beta\dot{q}_j \qquad \text{(A1.24)}$$

L'équation (A1.24) est connue comme la deuxième équation de Lagrange. Cette équation peut être écrite sous une autre forme.

2.3 fonction de dissipation

Lors du frottement dans l'intervalle de temps dt, il y a une quantité de l'énergie dégagée au milieu extérieur sous forme de chaleur donnée par,

$$\delta Q=cv^2dt \qquad \text{(A1.25)}$$

La puissance de dissipation P est définie par :

$$P = \frac{\delta Q}{dt} = cv^2$$

La puissance de dissipation P peut être écrite par :

$$P = c\left(\frac{d\vec{r}}{dt}\right)^2 = c\left(\frac{\partial \vec{r}}{\partial q_j}\right)^2 \dot{q}_j^{\,2} = c\beta \dot{q}_j^{\,2} \tag{A1.26}$$

La fonction de dissipation est définie comme la moitié de la puissance de dissipation. Donc,

$$D = \frac{P}{2} = c\left(\frac{d\vec{r}}{dt}\right)^2 = c\left(\frac{\partial \vec{r}}{\partial q_j}\right)^2 \dot{q}^{\,2} = \frac{1}{2} c\beta \dot{q}^{\,2}$$

On peut écrire le deuxième membre de la deuxième équation de Lagrange (A1.24) par :

$$-c\beta \dot{q} = -\frac{\partial D}{\partial \dot{q}_j} \tag{A1.27}$$

En fin la ***deuxième équation de Lagrange*** peut s'écrire par la forme :

$$\boxed{\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial L}{\partial \dot{q}_j}\right) - \frac{\partial L}{\partial q_j} + \frac{\partial D}{\partial \dot{q}_j} = 0} \tag{A1.28}$$

2.1 Les forces généralisées sont des forces dérivées du potentiel plus des forces frottements plus des forces dépendent du temps.

Dans ce cas il reste dans le deuxième membre la force extérieure conjuguée de la coordonnée généralisée q_j. **La *troisième équation de Lagrange donnée par :***

$$\boxed{\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial L}{\partial \dot{q}_j}\right) - \frac{\partial L}{\partial q_j} + \frac{\partial D}{\partial \dot{q}_j} = F_{q_j}^{ex}} \tag{A1.29}$$

NB : dans le cas d'un système de n degrés de liberté on trouve n équations de Lagrange peuvent être s'écrire par :

$$\begin{cases} \dfrac{d}{dt}\left(\dfrac{\partial L}{\partial \dot{q}_1}\right) - \dfrac{\partial L}{\partial q_1} + \dfrac{\partial D}{\partial \dot{q}_1} = F_{q_1}^{ex} \\ . \\ . \\ \dfrac{d}{dt}\left(\dfrac{\partial L}{\partial \dot{q}_i}\right) - \dfrac{\partial L}{\partial q_i} + \dfrac{\partial D}{\partial \dot{q}_i} = F_{q_i}^{ex} \\ . \\ . \\ \dfrac{d}{dt}\left(\dfrac{\partial L}{\partial \dot{q}_n}\right) - \dfrac{\partial L}{\partial q_1} + \dfrac{\partial D}{\partial \dot{q}_n} = F_{q}^{ex} \end{cases} \tag{A1.30}$$

Annexe 2

Equations différentielles linéaires du deuxième ordre avec des coefficients constantes

1. Définition

On dit qu'une équation différentielle est linéaire d'ordre n, si elle est du premier ordre de la fonction y et ses dérivations. Elle écrit sous la forme,

$$y^{[n]} + g_1(x)y^{[n-1]} + ...g_n(x)y = f(x) \qquad \text{(A2.1)}$$

$y^{[n]}$: l'énième dérivé de y par rapport à x.

$g_i(x)$: Fonction de la variable x (dites coefficients variables).

$f(x)$: Fonction de la variable x (dite deuxième membre).

2. Equation différentielle homogène du deuxième ordre avec coefficients constantes

- Si $n = 2$, l'équation différentielle est du deuxième ordre, elle s'écrit sous la forme,

$$y'' + g_1(x)y' + g_2(x)y = f(x) \qquad \text{(A2.2)}$$

- Si $f(x) = 0$ l'équation différentielle est dite homogène, donc l'équation différentielle homogène du deuxième ordre s'écrit sous la forme,

$$y'' + g_1(x)y' + g_2(x)y = 0 \qquad \text{(A2.3)}$$

- Si $g_1(x) = b$ et $g_2(x) = c$, l'équation différentielle est dite avec coefficients constantes, donc *l'équation différentielle homogène du deuxième ordre avec coefficients constantes s'écrit sous la forme,*

$$y'' + by' + cy = 0 \qquad \text{(A2.4)}$$

Théorème 1 : si y_1 *et* y_2 sont deux solutions particulières de l'équation (A2.4), $y_1 + y_2$ est aussi une solution. Nous avons,

$$y_1'' + by_1' + cy_1 = 0$$

$$y_2'' + by_2' + cy_2 = 0$$

$$(y_1 + y_2)'' + b(y_1 + y_2)_1' + c(y_1 + y_2) = 0$$

$$\left(y_1'' + by_1' + cy_1\right) + \left(y_2'' + by_2' + cy_2\right) = 0 + 0 = 0$$

Donc, $y_1 + y_2$ est une solution pour l'équation (A2.4˙).

Définition : on dit que les solutions y_1 *et* y_2 sont linéairement indépendantes si

$$\frac{y_1}{y_2} \neq c$$

dans le cas contraire, les deux solutions sont linéairement dépendantes.

Exemple :

$$y'' - y' = 0 \tag{A2.5}$$

On peut proposer $y_1 = e^x,\ y_2 = e^{-x},\ y_3 = 3e^x$ comme des solutions particulières pour l'équation (5). Il est claire que,

- $\dfrac{y_2}{y_1} = e^{-2x} \neq c$, on dit que y_1 *et* y_2 sont linéairement indépendantes.
- $\dfrac{y_3}{y_1} = 3 = c$, on dit que y_1 *et* y_2 sont linéairement dépendantes.

Théorème 2 : si les solutions particulières y_1 *et* y_2 sont linéairement indépendantes, la solution générale de l'équation (4) est:

$$y = c_1 y_1 + c_2 y_2 \tag{A2.6}$$

c_1 et c_2 , sont des constantes peuvent être trouver des conditions initiales.

2. 1. Solution de l'équation différentielle homogène du deuxième ordre avec coefficients constantes

On cherche une solution de la forme $y = e^{\lambda x}$.

Nous avons $y' = \lambda e^{\lambda x}$ et $y'' = \lambda^2 e^{\lambda x}$, par remplacement dans l'équation (A2.4) on trouve,

$e^{\lambda x}\left(\lambda^2 + b\lambda + c\right) = 0 \;\Rightarrow\; \left(\lambda^2 + b\lambda + c\right) = 0$. Donc la solution proposée $y = e^{\lambda x}$ est une solution de l'équation (4) seulement si λ est une solution de l'équation caractéristique $\lambda^2 + b\lambda + c = 0$.

les solutions de l'équation caractéristique sont :

$$\begin{cases} \lambda_1 = -\dfrac{b}{2} + \sqrt{\dfrac{b^2}{4} - c} \\ \lambda_2 = -\dfrac{b}{2} - \sqrt{\dfrac{b^2}{4} - c} \end{cases}$$

On distingue trois cas : $\lambda_1 \; et \; \lambda_2$ sont racines réelles, $\lambda_1 \; et \; \lambda_2$ sont des racines imaginaires et $\lambda_1 = \lambda_2$ racine réelle double.

1ier cas $\lambda_1 \; et \; \lambda_2$ **racines réelles** $\Delta > 0$

Si on met $\begin{cases} y_1 = e^{\lambda_1 x} \\ y_2 = e^{\lambda_2 x} \end{cases} \Rightarrow \dfrac{y_2}{y_1} = e^{(\lambda_2 - \lambda_1)} \neq const$, les deux solutions sont linéairement indépendantes.

Selon la théorème 2, la solution générale est de la forme $y = c_1 y_1 + c_2 y_2$. Donc,

$$y = c_1 e^{\lambda_1 x} + c_2 e^{\lambda_2 x} \qquad \text{(A2.7)}$$

Exemple :

$y'' + y' - 2y = 0$, $\begin{cases} b = 1 \\ c = 2 \end{cases}$, L'équation caractéristique correspond est : $\lambda^2 + \lambda - 2 = 0$.

$$\Delta = b^2 - 4ac\,,\ \begin{cases} a = 1 \\ b = 2 \\ c = 2 \end{cases} \quad \Rightarrow \quad \Delta = 9\,,$$ deux solutions réelles, $\lambda_1 = 1 \quad et \quad \lambda_2 - 2$.

La solution générale de cette équation est

$$y = c_1 e^x + c_2 e^{-2x} \tag{A2.8}$$

c_1 *et* c_2 seront déterminées des conditions initiales.

2[eme] **cas** λ_1 *et* λ_2 **racines imaginaires** $\Delta < 0$

$$\Delta = b^2 - 4ac < 0 \quad \Rightarrow \quad \begin{cases} \lambda_1 = -\dfrac{b}{2} + i\sqrt{c - \dfrac{b^2}{4}} \\ \lambda_2 = -\dfrac{b}{2} - i\sqrt{c - \dfrac{b^2}{4}} \end{cases} \quad \Rightarrow \quad \begin{cases} \lambda_1 = \alpha + i\beta \\ \lambda_1 = \alpha - \beta \end{cases},$$

Les deux solutions particulières sont $y_1 = e^{(\alpha + i\beta)}$ *et* $y_2 = e^{(\alpha - i\beta)}$. Les solutions sont des fonctions complexes pour des variables réelles.

Si une fonction complexe d'une variable réelle $y = u(x) + iv(x)$, est une solution de l'équation (4), par dérivation et remplacement on trouve,

$$(u(x) + iv(x))'' + b(u(x) + iv(x))' + c(u(x) + iv(x)) = 0 \tag{A2.9}$$

$$(u''(x) + bu'(x) + cu(x)) + i(v''(x) + bv'(x) + cv(x)) = 0 \tag{A2.10}$$

$$\begin{cases} u''(x) + bu'(x) + cu(x) = 0 \\ v''(x) + bv'(x) + cv(x) = 0 \end{cases} \tag{A2.11}$$

On conclut que $u(x)$ *et* $v(x)$, sont des solutions pour l'équation (4).

Nôtres deux solutions particulières sont :

$$\begin{cases} y_1 = e^{(\alpha + i\beta)} \\ y_2 = e^{(\alpha - i\beta)} \end{cases} \quad \Rightarrow \quad \begin{cases} y_1 = e^{\alpha x} \cos \beta x + i e^{\alpha x} \sin \beta x \\ y_2 = e^{\alpha x} \cos \beta x - i e^{\alpha x} \sin \beta x \end{cases} \tag{A2.12}$$

Comme nous avons conclu plus haut, les fonctions $y_1^* = e^{\alpha x}\cos\beta x \; et \; y_2^* = e^{\alpha x}\sin\beta x$ sont des solutions particulières de l'équation (4). En plus $\frac{y_2^*}{y_1^*} \neq cons$ (linéairement indépendantes), ainsi, la solution générale de l'équation (4) peut être donnée par ;

$$y = e^{\alpha x}\left(c_1\cos\beta x + c_2\sin\beta x\right) \tag{A2.13}$$

$c_1 \; et \; c_2$ seront déterminées des conditions initiales.

Exemple :

Trouver la solution générale de l'équation $y'' + 2y' + 5y = 0$ lorsque à $x = 0\begin{cases} y = 0 \\ y' = 1 \end{cases}$

Solution :

L'équation caractéristique correspond à cette équation différentielle est donnée par :

$$\lambda^2 + 2\lambda - 2 = 0$$

$$\Delta = -16 = (4i)^2 \quad \Rightarrow \quad \sqrt{\Delta} = \pm 4i \quad \Rightarrow \quad \begin{cases} \lambda_1 = -1 + 2i \\ \lambda_2 = -1 - 2i \end{cases} \quad \Rightarrow \alpha = -1 \; et \; \beta = 2$$

Ainsi, la solution générale sera :

$$y = e^{-x}\left(c_1\cos 2x + c_2\sin 2x\right)$$

Des conditions initiales ;

- $y(0) = 0 \quad \Rightarrow \quad e^0\left(c_1\cos 0 + c_2\sin 0\right) = 0 \quad \Rightarrow \quad c_1 = 0$. Donc la solution est récrite sous la forme ;

$$y = c_2 e^{-x}\sin 2x$$

- $y'(0) = 1 \quad \Rightarrow \quad 2e^0 c_2\cos 0 - e^0 c_2\sin 0 = 0 \quad \Rightarrow \quad c_2 = \frac{1}{2}$.

En fin la solution générale de l'équation proposée est ;

$$y = \frac{1}{2} e^{-x} \sin 2x .$$

3eme cas $\lambda_1 = \lambda_2$ **racine réelle double** $\Delta = 0$

Dans ce cas $\lambda_1 = \lambda_2$, donc, Nous avons une seule solution particulière $y_1 = e^{\lambda x}$, par suite nous devons chercher une autre solution particulière y_2 linéairement indépendante avec y_1 pour trouver la solution générale sous la forme $y = c_1 y_1 + c_2 y_2$.

On cherche la deuxième solution particulière de la forme $y_2 = u(x) e^{\lambda x}$.

Par dérivation et remplacement dans l'équation (4), on trouve,

$$e^{\lambda x}\left(u''(x) + 2\lambda u'(x) + \lambda^2 u(x)\right) + b e^{\lambda x}\left(u'(x) + \lambda^2 u(x)\right) + c u(x) e^{\lambda x} = 0 \qquad \text{(A2.14)}$$

$$u''(x) + (2\lambda + b) u'(x) + (\lambda^2 + b\lambda + c) u(x) = 0 \qquad \text{(A215)}$$

Nous avons $\begin{cases} (2\lambda + b) = 0, \ parseque\ \lambda\ est\ racine\ double. \\ (\lambda^2 + b\lambda + c) = 0, \ parseque\ \lambda\ est\ racine. \end{cases}$

On déduit que $u''(x) = 0 \quad \Rightarrow \quad u'(x) = a_1 \quad \Rightarrow \quad u(x) = a_1 x + a_2$

On peut prendre $a_1 = 1 \quad et \quad a_2 = 0$, ainsi, $u(x) = x$ et par suit, $y_2 = x e^{\lambda x}$

Comme nous avons $\dfrac{y_2}{y_1} = x \neq cont$, donc, $y_1\ et\ y_2$ sont linéairement indépendante. La solution générale sera donnée par :

$$y = c_1 e^{\lambda x} + c_2 x e^{\lambda x} \qquad \text{(A2.16)}$$

$$y = \left(c_1 + c_2 x\right) e^{\lambda x} \qquad \text{(A2.17)}$$

2. 1. Solution de l'équation différentielle non homogène du deuxième ordre avec coefficients constantes

L'équation différentielle non homogène du deuxième ordre avec coefficients constantes est donnée par,

$$y'' + by' + cy = f(x) \tag{A2.18}$$

La solution générale de cette équation est la somme de :

- la solution générale y_g de l'équation homogène (ie: $f(x) = 0$).

- une solution particulière y_p pour l'équation non homogène.

$$y = y_g + y_p \tag{A2.19}$$

Pour déterminer y_g il faut seulement retourner aux paragraphes précédents. Il nous reste comment proposer une solution particulière y_p. Pour ce fait on s'intéresse à deux cas particuliers, lorsque le deuxième membre de l'équation non homogène s'écrit sou la forme $f(x) = P_n e^{\alpha x}$ ou,

$f(x) = P_n(x)e^{\alpha x}\cos\beta x + Q_m(x)e^{\alpha x}\cos\beta x$,

où $P_n(x)$ *et* $Q_m(x)$ sont des polynôme d'ordre n et m .

1ier cas $f(x) = P_n e^{\alpha x}$

L'équation s'écrit par :

$$y'' + by' + cy = P_n e^{\alpha x} \tag{A2.20}$$

On trouve trois cas particulier :

a. α**, n'est pas une solution pour l'équation caractéristique**, $\lambda^2 + b\lambda + c = 0$, correspondente à l'équation différentielle homogène (i.e $\alpha \neq \lambda_1 \neq \lambda_2$).

On cherche une solution particulière de la forme,

$$y_p = Q_n(x)e^{\alpha x}$$

$Q_n(x) = A_0 + A_1 x + ...A_n x^n$, est un polynôme de même ordre que $P_n(x)$.

Par dérivation et remplacement dans l'équation (20), on trouve,

$$Q_n''(x) + (2\alpha + b)Q_n'(x) + (\alpha^2 + b\alpha + c)Q_n(x) = P_n(x) \tag{A2.21}$$

Comparant les deux membres, on trouve les coefficients $A_0, A_1, ...$

Exemple :

$y'' + 4y' + 3y = x$

On peut écrire l'équation sous la forme

$y'' + 4y' + 3y = xe^{0x} = P(x)e^{\alpha x}$, dans ce cas $\alpha = 0$ et $P(x) = x$.

La solution de cette équation est la somme de la solution de l'équation homogène et la solution particulière.

1- solution général de l'équation homogène $y'' + 4y' + 3y = 0$:

L'équation caractéristique correspondante est $\lambda^2 + 4\lambda + 3 = 0$ donc, $\lambda_1 = -1,\ et\ \lambda_2 = -3$

La solution générale de l'équation homogène est :

$$y_g = c_1 e^{-x} + c_2 e^{-3x}$$

2- solution particulière de l'équation non homogène $y'' + 4y' + 3y = x$

Le deuxième membre est de la forme $P(x)e^{\alpha x} \Rightarrow \begin{cases} P(x) = x\ (premier\ ordre) \\ \alpha = 0,\ (\alpha \neq \lambda_1 \neq \lambda_2) \end{cases}$

Par suite la solution particulière y_p cherchée est de la forme, $y_p = Q_1(x)e^{\alpha x} = Q_1(x) = A_0 + A_1 x$, ($Q(x)$ est du premier ordre puisque $P(x)$ est du premier ordre). Alors,

$$y_p = Q(x)e^{\alpha x} = (A_0 + A_1 x)e^{0x} \quad \Rightarrow y_p = A_0 + A_1 x$$

Par dérivation et remplacement dans l'équation $y'' + 4y' + 3y = x$.

On trouve $A_0 = \frac{1}{3}$ *et* $A_1 = \frac{4}{9}$,

$$y_p = \frac{4_1}{9} x + \frac{1}{3}$$

A la fin la solution de l'équation non homogène est :

$$y = y_g + y_p$$

$$y = c_1 e^{-x} + c_2 e^{-3x} + \frac{4_1}{9} x + \frac{1}{3}$$

c_1 *et* c_2 peuvent être trouver des conditions initiaux.

b. α, une solution simple pour l'équation caractéristique

si α est une solution pour l'équation caractéristique $\lambda^2 + 2\lambda - 2 = 0$, correspondent à l'équation différentielle homogène (i.e $\alpha = \lambda_1$ *ou* $\alpha = \lambda_2$). $(\alpha^2 + b\alpha + c) = 0$, et par suite, le premier membre de l'équation (21) est de l'ordre de $n-1$ alors que le seconde membre est de l'ordre n, La comparaison des deux membres est impossible. Dans ce cas, il faut chercher une solution particulière de la forme $y_p = xQ_n(x)e^{\alpha x}$

Exemple :

c. α, une solution double pour l'équation caractéristique

si α est une solution pour l'équation caractéristique $2\lambda + b = 0$ et $\lambda^2 + b\lambda + c = 0$. donc, le premier membre de l'équation (21) est de l'ordre de $n-2$ alors que le seconde membre est de l'ordre n, La comparaison des deux membres est impossible. Dans ce cas, il faut chercher une solution particulière de la forme $y_p = x^2 Q_n(x)e^{\alpha x}$.

Exemple :

2ème cas $f(x) = P(x)e^{\alpha x}\cos\beta x + Q(x)e^{\alpha x}\sin\beta x$

Du même analyse que dans les paragraphes précédents, on trouve deux cas:

a. $\alpha + i\beta$ **n'est pas une solution de l'équation caractéristique corresponde à l'équation homogène.**

On cherche la solution particulière sous la forme,

$$y_p = u(x)e^{\alpha x}\cos\beta x + v(x)e^{\alpha x}\sin\beta x \qquad \text{(A2.22)}$$

$u(x)$ *et* $v(x)$ sont des polynôme de l'ordre du polynôme le plus élevé de $P(x)$ *ou* $Q(x)$.

b. $\alpha + \beta i$ **est une solution de l'équation caractéristique corresponde à l'équation homogène.**

On cherche la solution particulière sous la forme,

$$y_p = x\left(u(x)e^{\alpha x}\cos\beta x + v(x)e^{\alpha x}\sin\beta x\right) \qquad \text{(A2.23).}$$

Exemple :

$$y'' + 4y = \cos 2x$$

La solution de cette équation est la somme de la solution générale de l'équation homogène et une solution particulière $y = y_g + y_p$

- $y_g = ?$

$y'' + 4y = 0$

$$\lambda^2 + 4 = 0 \qquad \Rightarrow \quad \lambda_{1.2} = \mp 2i$$

Donc

$$x_g = A_1 \cos(2x) + A_2 \sin(2x)$$

➢ $y_p = ?$

Le deuxième membre est de la forme

$$\cos 2x = p_0(x)e^{0.x}\cos(2x) + Q_0(x)e^{0.x}\sin(2x)$$

$$\begin{cases} p_0(x) = 1 \\ Q_0(x) = 0 \\ \alpha = 0, \quad \beta = 2 \end{cases}$$

$$\alpha + 2i = \lambda_2$$

Donc, la solution particulière sera de la forme,

$$y_p = x(C_1 \cos(2x) + C_2 \sin(2x))$$

Par dérivation et remplacement dans l'équation différentielle on trouve

$$C_1 = \frac{1}{4} \qquad et \qquad C_2 = 0$$

La solution particulière :

$$y_p = \frac{1}{4} x_1 \cos(2x)$$

A la fin, la solution est donnée par :

$$y = A_1 \cos(2x) + A_2 \sin(2x) + \frac{1}{4} x \cos(2x)$$

On peut trouver A_1 et A_2 à partir des conditions initiales.

Bibliographies

1) نظرية الاهتزازات و الأمواج الميكانيكية ’هشام جبر’ ; ديوان المطبوعات الجامعية.
2) Mechanical vibrations. ‘Singiresu. S. Rao ; Pearson éducation.
3) Mechanical vibrations theory and applications. ‘S. Graham. Kelly’ ; cengage learning.
4) Vibrations et Ondes Mécaniques cours et exercices, ‘H. Djelouah’ ; Université des Sciences et de la Technologie Houari Boumediene.
5) The physics of vibrations and waves. H. J. Pain’ ; John Wiley & Sons.
6) Ingeneering Vibrations, ‘Daniel J Inman ’ ; Pearson éducation.
7) Cours de physique : Ondes Volume 3. ’ Frank-S Crawford’ ; Dunod.
8) Vibration et phénomène de propagation. ‘Gabillard’. Dunod.
9) astrowww.phys.uvic.ca/~tatum/classmechs/class11.pdf
10) https://www.youtube.com/watch?v=sP1DzhT8Vzo
11) https://www.youtube.com/watch?v=DZcflDmog60
12) https://www.youtube.com/watch?v=j-zczJXSxnw