# Chapitre 3

# Vibrations forcées des systèmes à un degré de liberté.

### 3.1 Introduction

Les vibrations (oscillations) forcées, se produisent lorsque le système est soumis le long de ses vibrations à une des forces extérieures périodiques. Souvent, ces forces s'appellent excitations extérieures. Le mouvement résultant, s'appelle la réponse du système à l'excitation extérieure. La force d'excitation peut être harmonique, périodique non harmonique, non périodique ou aléatoire.

Dans le présent cours, on s'intéresse seulement aux excitations harmoniques. L'excitation harmonique peut être donnée mathématiquement par :

$$f(t) = f_0 \sin(w.t + \varphi), \quad f(t) = f_0 \cos(w.t + \varphi), \quad f(t) = f_0 e^{i(w.t+\varphi)}.$$

$\varphi$ : la phase de l'excitation (dépend de la valeur la force $f$ à $t = 0$).

### 3.2 Excitation harmonique d'un système non amortie.

- **équations du mouvement :**

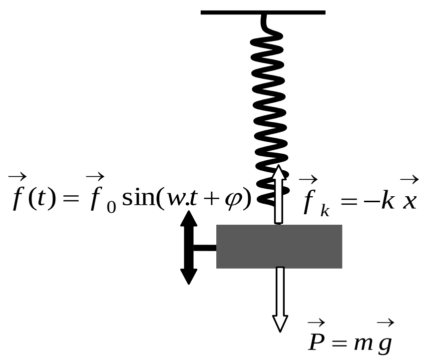


Figure 3.1 : Système masse ressort harmoniquement excité

De la deuxième loi de Newton, $\sum \vec{F} = m\vec{\gamma}$ ,

$$\vec{f_t} + \vec{f_k} + \vec{p} = m\,\vec{\gamma} \tag{3.1}$$

$$-kx + f_t = m\ddot{x} \tag{3.2}$$

$$m\ddot{x} + kx = f_t \tag{3.3}$$

$$\ddot{x} + \frac{k}{m}x = \frac{f_o}{m}\cos(w.t) \tag{3.4}$$

- De l'application du théorème de Lagrange, qui est recommandé dans ce cours,

$$\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial L}{\partial \dot{q}}\right) - \frac{\partial L}{\partial q} = f_q \tag{3.5}$$

Où $\begin{cases} L = T - U \quad \textit{le Langrangien du système} \\ q \equiv x \quad \textit{la coordonée généralisée} \\ f_q \ = \ f_0 \sin(w.t + \varphi_0) \quad \textit{la force congégiée} \end{cases}$

$$L = T - U = \frac{1}{2}m\dot{x}^2 + \frac{1}{2}kx \tag{3.6}$$

- $\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial L}{\partial \dot{q}}\right) = m\ddot{x}$ (3.7)
- $\frac{\partial L}{\partial q} = kx$ (3.8)
- $f_q = f_0 \cos(w.t)$ (3.9)

Par remplacement,

$$\ddot{x} + \frac{k}{m}x = \frac{f_0}{m}\cos(w.t) \tag{3.10}$$

- **Solution de l'équation différentielle.**

L'équation du mouvement, est une équation différentielle du deuxième ordre avec seconde membre. La solution de cette équation est la somme de deux solutions (voire l'annexe 2) :

- Solution général $x_g$ de l'équation homogène (sans seconde membre).

- Solution particulière $x_p$ de l'équation non homogène (avec seconde membre).

La solution $x_g$ de l'équation homogène, $\ddot{x}+\frac{k}{m}x=0 \quad \Rightarrow \quad \ddot{x}+w_n^2 x=0$ est donnée par :

$$x_g = x_0 \cos(w_n t)+\frac{\dot{x}_0}{w_n}\sin(w_n t) \tag{3.11}$$

Puisque $w_n$ n'est pas une solution de l'équation caractéristique, la solution particulière $x_p$ est donnée par :

$$x_p = C_1 \cos(w.t)+C_2 \sin(w.t) \tag{3.12}$$

Pour trouver les constantes $C_1$ *et* $C_2$, il faut remplacer cette solution dans l'équation différentielle (3.10). Nous avons,

$$x_p = C_1 \cos(w.t)+C_2 \sin(w.t)$$

$$\dot{x}_p = -C_1 w \sin(w.t)+C_2 w \cos(w.t)$$

$$\ddot{x}_p = -C_1 w^2 \sin(w.t)-C_2 w^2 \sin(w.t)$$

Par remplacement on trouve,

$$-C_1 w^2 \sin(w.t)-C_2 w^2 \sin(w.t)+C_1 w_n \cos(w.t)+C_2 w_n \sin(w.t)=\frac{f_0}{m}\cos(w..t)$$

Par comparaison les deux membres de l'équation, on trouve :

$$C_1=\frac{\left(\frac{f_0}{m}\right)}{\left(w_n^2-w^2\right)}, \qquad C_2=0.$$

On met *X*=*C₁* et divisons le numérateur et le dénominateur par $k$ on trouve,

$$X = \frac{\left(f_0/k\right)}{\frac{m}{k}\left(w_n^2 - w^2\right)} \quad \Rightarrow \quad X = \frac{\delta_{st}}{1-\left(\frac{w}{w_n}\right)^2} \tag{3.13}$$

$\delta_{st} = \frac{f_0}{k}$ ***: représente la déflection de la masse sous l'application de la force*** $f_0$ ***et s'appelle la déflection statique de la masse.***

**N.B :**

- La solution générale $x_g$ de l'équation homogène représente un mouvement harmonique. Elle s'appelle réponse transitoire puisqu'elle va disparaitre avec le temps.
- La solution particulière $x_p$ de l'équation non homogène représente la réponse de la masse à la force d'excitation extérieure.

En fin, la solution particulière s'écrit :

$$x_p = \frac{\delta_{st}}{1-\left(\frac{w}{w_n}\right)^2}\cos(w.t) \tag{3.14}$$

On somme les solutions $x_g$ et $x_p$, la solution de l'équation différentielle du mouvement (1) s'écrit comme suit :

$$x = A_1\cos(w_n t) + A_2\sin(w_n t) + \frac{\delta_{st}}{\left(1-\left(\frac{w}{w_n}\right)^2\right)}\cos(w.t)$$

(3.15)

Les constantes $A_1$ et $A_2$ seront trouvées par les conditions initiales.

$$t = 0\begin{cases} x = x_0 \\ \dot{x} = \dot{x}_0 \end{cases}, \qquad \begin{cases} A_1 = x_0 - \dfrac{\delta_{st}}{\left(1-\left(\frac{w}{w_n}\right)^2\right)} \\ A_2 = \dfrac{\dot{x}_0}{w_n} \end{cases}$$

$$x=\left(x_0-\frac{\delta_{st}}{\left(1-\left(\frac{w}{w_n}\right)^2\right)}\right)\cos(w_n t)+\frac{\dot{x}_0}{w_n}\sin(w_n t)+\frac{\delta_{st}}{\left(1-\left(\frac{w}{w_n}\right)^2\right)}\cos(w.t) \qquad (3.16)$$

### 3.2.2 Facteur d'amplification :

Le rapport $\frac{X}{\delta_{st}}$ (le rapport de l'amplitude du mouvement dynamique à l'amplitude statique) représente le facteur d'amplification.

$$\frac{X}{\delta_{st}}=\frac{1}{1-\left(\frac{w}{w_n}\right)^2} \qquad (3.17)$$

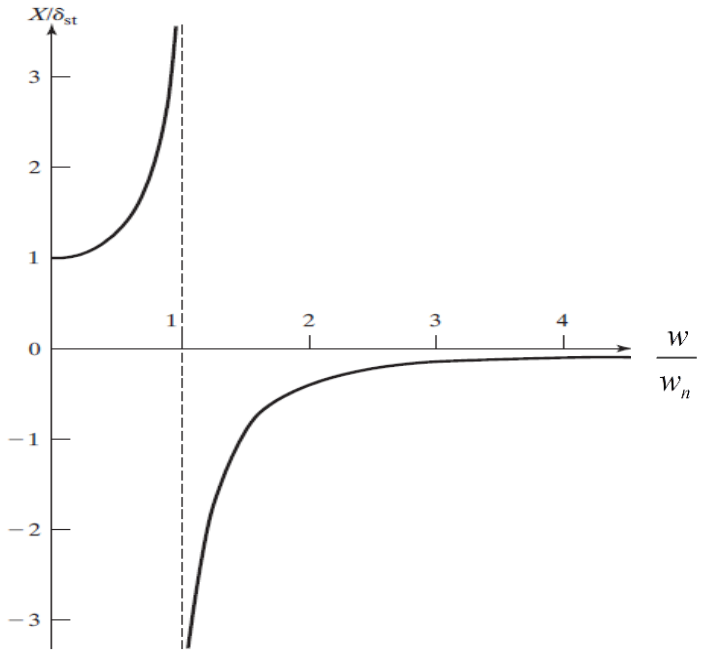


Figure 3. 2 : Facteur d'amplification pour un système non amortie [2]

De la figure, on distingue trois cas.

➢ **1ier cas :** Le facteur d'amplification est positif

$$0<\frac{w}{w_n}<1 \quad \Rightarrow \quad \left(1-\left(\frac{w}{w_n}\right)^2\right)>0 \quad \Rightarrow \quad X=\frac{\delta_{st}}{1-\left(\frac{w}{w_n}\right)^2}>0.$$

Donc $\begin{cases} f=f_0\cos(w.t) \\ x_p=X\cos(w.t) \end{cases}$, on dit que la réponse du système à l'excitation et l'excitation sont en phase.

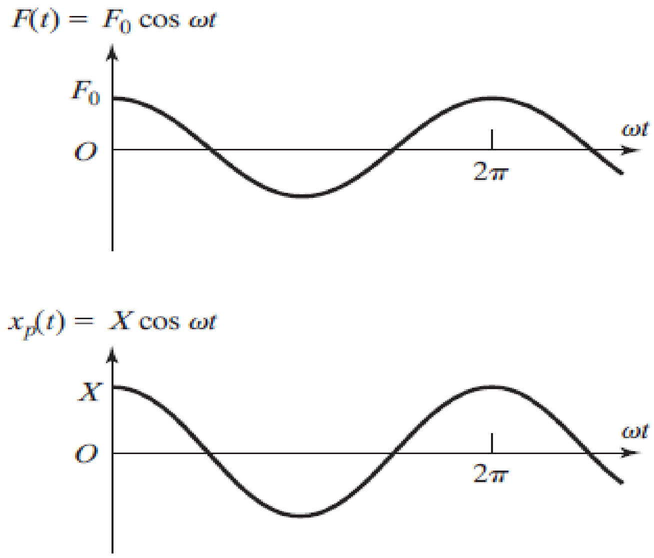


Figure 3. 3 : Réponse harmonique quand $0<\frac{w}{w_n}<1$

➢ **2ième cas :** Le facteur **d'amplification** est négatif

$$\frac{w}{w_n}>1 \quad \Rightarrow \quad \left(1-\left(\frac{w}{w_n}\right)^2\right)<0 \quad \Rightarrow \quad X=\frac{\delta_{st}}{1-\left(\frac{w}{w_n}\right)^2}<0.$$

Tant que l'amplitude $X$ est toujours positive on peut écrire,

$$-X = \frac{\delta_{st}}{\left(\frac{w}{w_n}\right)^2 - 1} < 0 \qquad \Rightarrow \qquad x_p = -X\cos(w.t)$$

Donc $\begin{cases} f = f_0\cos(w.t) \\ x_p = -X\cos(w.t) \end{cases}$, on dit que la réponse du système à l'excitation et l'excitation sont en déphasage.

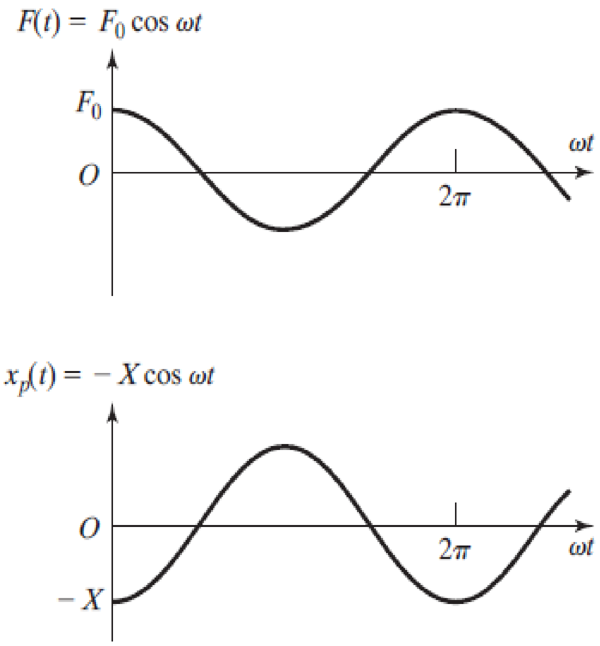


Figure 3. 4 : Réponse harmonique quand $\frac{w}{w_n} > 1$

> ***Remarque*** *: Si $\frac{w}{w_n} \to \infty$, ça veut dire que le battement de la force d'excitation est plus grand que le battement naturel du système, $X \to 0$. On conclut que le système ne répond pas (le système reste émouvant) à une excitation plus grand que leur propre battement (battement naturel).*

- **3[ième] cas Phénomène de la résonance :** $\frac{w}{w_n} = 1$

Lorsque la fréquence de la force d'excitation extérieure est égale à la fréquence naturelle du système, l'amplitude de la réponse du système croit jusque l'infini. Ce phénomène, s'appelle la résonance. L'étude du phénomène de la résonance a une grande importance dans la construction industrielle et dans l'ingénierie.

$$\frac{w}{w_n} = 1 \quad \Rightarrow \quad w = w_n \quad \Rightarrow \quad X = \frac{\delta_{st}}{1 - \left(\frac{w}{w_n}\right)^2} \to \infty .$$

L'équation du mouvement dans ce cas $w = w_n$ s'écrit ;

$$\ddot{x} + w_n^2 x = f_0 \cos(w_n.t) \tag{1.18}$$

Tant que $w_n$ est une solution de l'équation caractéristique (voir annexe 2), la solution particulière de l'équation non homogène est de la forme

$$x_p = t\left(C_1 \cos(w_n t) + C_2 \sin(w_n t)\right) \tag{1.19}$$

Pour trouver les constantes $C_1$ *et* $C_2$, on remplace par $x_p$ dans l'équation 2. 22.

$$\dot{x}_p = t(-c_1 w_n \sin(wt) + c_2 w_n \cos(w_n t) + c_1 \cos(w_n t) + c_2 \sin(w_n t)$$

$$\ddot{x}_p = t\left(-C_1 w_n^2 \cos(w_n t) - C_2 w_n^2 \sin(w_n t)\right) - 2C_1 w_n \sin(w_n t) + 2C_2 w_n \cos(w_n t)$$

Par remplacement et par comparaison des membres de l'équation 2. 22, on trouve

$$\begin{cases} C_1 = \dfrac{\frac{f_0}{m}}{2w_n} \\ C_2 = 0 \end{cases} \quad \Rightarrow \quad C_1 = X = \frac{\delta_{st}}{2} .$$

Donc $x_p = \dfrac{\delta_{st}}{2} t \cos(w_n t)$ (3.21)

La réponse du système à la force de l'excitation est périodique dont l'amplitude est croissante avec le temps.

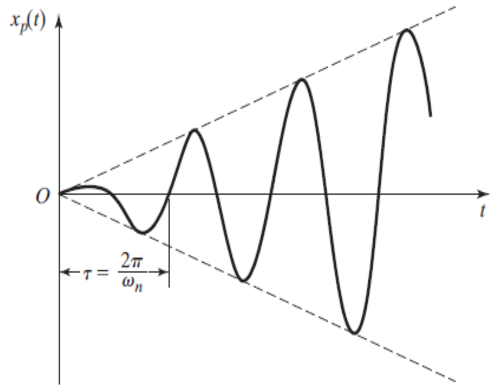


Figure 3. 5 : Réponse harmonique quand $\frac{w}{w_n} = 1$

### 3.2.3 Phénomène de battement :

Si le battement de l'excitation extérieure très proche du battement naturelle du système, il se produit un phénomène s'appelle phénomène de battement. L'amplitude du système s'augmente à un maximum puis se diminue jusque s'annule puis s'augmente et ainsi de suite.

Revenons à l'équation et mettons $w \cong w_n$. Dans les conditions initiales $x_0 = \dot{x}_0 = 0$, Pour simplification, l'équation peut être écrite sous la forme ;

$$x = \frac{\frac{f_0}{m}}{w_n^2 - w^2}\left(\cos(w.t) - \cos(w_n.t)\right)$$

$$x = -\frac{\frac{f_0}{m}}{w_n^2 - w^2}\left(\cos(w_n.t) - \cos(w.t)\right) \tag{3.22}$$

En utilisant la relation, $\cos\alpha - \cos\beta = -2\sin\left(\frac{\alpha+\beta}{2}\right).\sin\left(\frac{\alpha-\beta}{2}\right)$ Donc :

$$x = -\frac{\frac{f_0}{m}}{w_n^2 - w^2}\left(-2\sin\left(\frac{w_n + w}{2}t\right).\sin\left(\frac{w_n - w}{2}\right)\right) \tag{3.23}$$

On met $w_n + w = 2w$ *et* $w_n - w = 2\varepsilon$ et en multiplions les deux équations membre à membre, on trouve $w_n^2 - w^2 = 4\varepsilon \cdot w$.

$$x = \left( \frac{\frac{f_0}{m}}{w_n^2 - w^2} . \sin(\varepsilon . t) \right) \sin(w.t) \tag{3.24}$$

Le système oscille avec un battement $w$ (période $f = \dfrac{2\pi}{w}$) et avec une amplitude variante

$$\frac{\frac{f_0}{m}}{w_n^2 - w^2} . \sin(\varepsilon . t) \tag{3.25}$$

La période du battement est donné $\dfrac{2\pi}{\left(\frac{w_n - w}{2}\right)}$.

La période du battement est plus grande que le battement des vibrations.

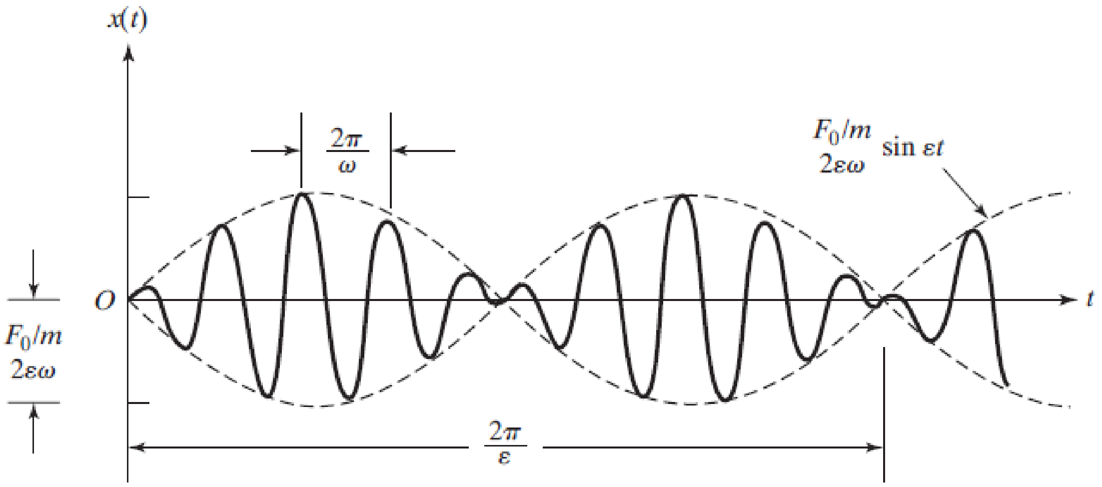


Figure 3. 6 : Phénomène de battement [2]

### 3.2 Excitation harmonique d'un système amortie.

#### 3.3.1 Réponse du système.

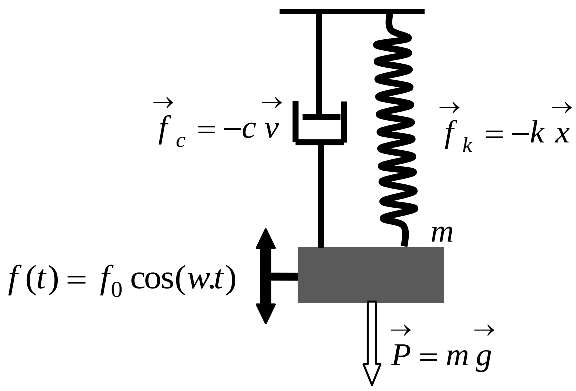


Figure 3.7 : Système excité, masse ressort amortisseur

- D'après la deuxième loi de Newton, $\sum \vec{f} = m\,\vec{\gamma}$ on peut écrire ce qui suit :

$$\vec{p} + \vec{f}_k + \vec{f}_c + \vec{f}_t = m\,\vec{\gamma} \tag{3.26}$$

Par projection,

$$m\ddot{x} + c\dot{x} + kx = f_0 \cos(w.t) \tag{3.27}$$

- De l'équation de Lagrange, $\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial L}{\partial \dot{x}}\right) - \frac{\partial L}{\partial x} + \frac{\partial D}{\partial \dot{x}} = f_t(x)$, pour un système amortie soumit à une force extérieure.
    - $L = T - U$ : (T, et U sont les énergies cinétique et potentielle du système).
    - $D = \frac{\partial f_c}{\partial \dot{x}}$ : la fonction de dissipation (voir annexe (2)).
    - $f_t(x)$ : la composante conjuguée de la force d'excitation correspond à la coordonnée $x$.
- $L = \frac{1}{2} m\dot{x}^2 - \frac{1}{2} kx$,

- $\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial L}{\partial \dot{x}}\right) = m\ddot{x}$ ,

- $\frac{\partial L}{\partial x} = -kx$ ,

- $\frac{\partial D}{\partial \dot{x}} = c\dot{x}$ ,

- $f(x)_t = f_0 \cos(w.t)$ .

En fin, par remplacement l'équation du mouvement s'écrit,

$$m\ddot{x} + c\dot{x} + kx = f_0 \cos(w.t) \tag{3.28}$$

L'équation différentielle du mouvement est une équation de deuxième degré non homogène. La solution est la somme de :

- Solution générale de l'équation homogène $x_g$ , qui va disparaitre avec le temps.

- Solution particulière $x_p$ , qui représente le mouvement.

Par suite on s'intéresse seulement à la solution particulière $x_p$ , qu'est de la forme

$$x_p = X \cos(w.t + \varphi) \tag{3.29}$$

Pour trouver les constantes $X$ *et* $\varphi$ , on dérive $x_p$ et on remplace dans l'équation.

$$\dot{x}_p = -Xw\sin(w.t + \varphi) \quad et \quad \ddot{x}_p = -Xw^2 \cos(w.t + \varphi) \tag{3.30}$$

$$X\left[\left(k - mw^2\right)\cos(w.t + \varphi) - cw\sin(w.t + \varphi)\right] = f_0 \cos(w.t) \tag{3.31}$$

On utilise : $\begin{cases} \cos(w.t + \varphi) = \cos(wt)\cos\varphi - \sin\varphi \sin wt \\ \sin(w.t + \varphi) = \cos\varphi \sin(w.t) + \sin\varphi \cos(w.t) \end{cases}$ on trouve,

$$\begin{aligned} &\left(k - mw^2\right)\cos\varphi - cw\sin\varphi = \frac{f_0}{X} \\ &\left(k - mw^2\right)\sin\varphi + cw\cos\varphi = 0 \end{aligned} \tag{3.32}$$

$$X = \frac{f_0}{\sqrt{\left(k - mw^2\right)^2 + c^2 w^2}} \tag{3.33}$$

$$\varphi = \tan^{-1} = \left( -\frac{cw}{k - mw^2} \right) \tag{3.34}$$

Nous avons, $w_n = \sqrt{\frac{k}{m}}$ et $\varepsilon = \frac{C}{C_c} = \frac{C}{2\sqrt{mk}}$ donc, on peut écrire : $\frac{c^2 w^2}{k^2} = \left( 2\varepsilon \frac{w}{w_n} \right)^2$

La réponse du système à la force d'excitation peut écrite sous la forme ;

$$X = \frac{\frac{f_0}{k}}{\sqrt{\left( 1 - \left( \frac{w}{w_n} \right)^2 \right)^2 + 4\varepsilon^2 \left( \frac{w}{w_n} \right)^2}} \tag{3.35}$$

$$\varphi = \tan^{-1} = \left( -\frac{2\varepsilon \left( \frac{w}{w_n} \right)}{1 - \left( \frac{w}{w_n} \right)^2} \right) \tag{3.36}$$

**3.3.2 Facteur d'amplification :** Nous avons vu auparavant que le facteur d'amplification est défini par le rapport de la réponse du système à la déflection statique $\delta_{st} = \frac{f_0}{k}$.

Donc,

$$\frac{X}{\delta_{st}} = \frac{1}{\sqrt{\left( 1 - \left( \frac{w}{w_n} \right)^2 \right)^2 + 4\varepsilon^2 \left( \frac{w}{w_n} \right)^2}} \tag{3. 37}$$

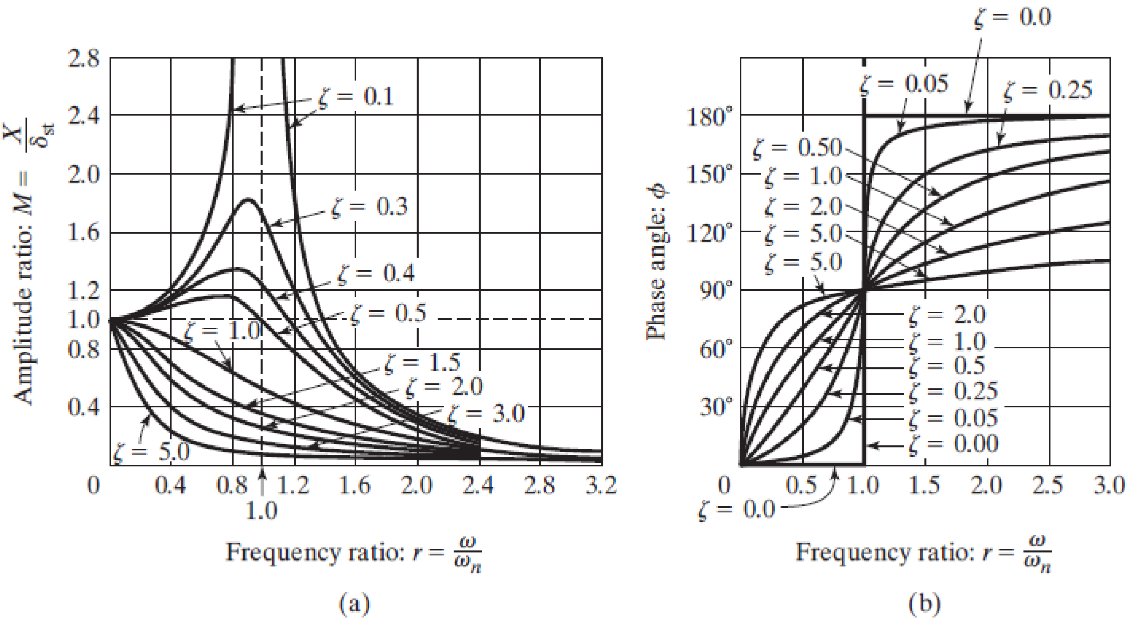


Figure 3. 8 : Réponse harmonique pour un système amortie [2]

- **Discussion sur le facteur d'amplification :**

1- Pour un système non amorti, $\varepsilon = 0$, le facteur d'amplification tend vers l'infini lorsque $w = w_n$ c'est la résonnance.

2- L'augmentation dans le facteur d'amortissement entraine une diminution dans le facteur d'amplification.

3- Le facteur d'amplification égal à 1, y'a aucune amplification, lorsque la fréquence de la force d'excitation s'annule $\frac{w}{w_n} = 0$.

4- Pour les fréquences les plus élevés de la force d'excitation, le système ne répond pas à l'excitation ( $X = 0$ ).

5- Réponse maximale **:** la réponse maximal du système à la force d'excitation est donnée par :

$$M_{\max} = \left(\frac{X}{\delta_{st}}\right)_{\max} = \frac{1}{2\varepsilon\sqrt{1-\varepsilon^2}} \qquad (3.\ 38)$$

A la résonance ( $w = w_n$ ), la réponse maximal du système à la force d'excitation est devenue

$$M_r = \frac{1}{2\varepsilon} \tag{3. 39}$$

- **Discussion sur la phase :**

1- Pour un système non amortie, $\varepsilon = 0$,

   a. pour $0 < \frac{w}{w_n} < 1$, $\varphi = 0$, la réponse et l'excitation sont en phase.

   b. pour $\frac{w}{w_n} > 1$, $\varphi = \pi$, la réponse et l'excitation sont en déphasage.

2- Pour un système amortie, $\varepsilon > 0$,

   a. pour $0 < \frac{w}{w_n} < 1$, $0 < \varphi < 90^\circ = 0$, la réponse est en retard par rapport à l'excitation.

   b. Pour $\frac{w}{w_n} > 1$, $90^\circ < \varphi < 180^\circ = 0$, la réponse conduit l'excitation.

   c. Pour $\frac{w}{w_n} = 1$, $\varphi = 90^\circ$.

### 3.3.3 Facteur de qualité

Nous avons vu dans le paragraphe suivant que, lorsque $\varepsilon$ est faible, le maximum pour le facteur d'amplification est donné par :

$$M_{\max} = \left(\frac{X}{\delta_{st}}\right)_{\max} = \frac{1}{2\varepsilon\sqrt{1-\varepsilon^2}} = \frac{1}{2\varepsilon} = \left(\frac{X}{\delta_{st}}\right)_{w=w_n}$$

le facteur d'amplification lorsque $w = w_n$ s'appelle le facteur de qualité $Q = \frac{1}{2\varepsilon}$.

### 3.3.4 Bande passante

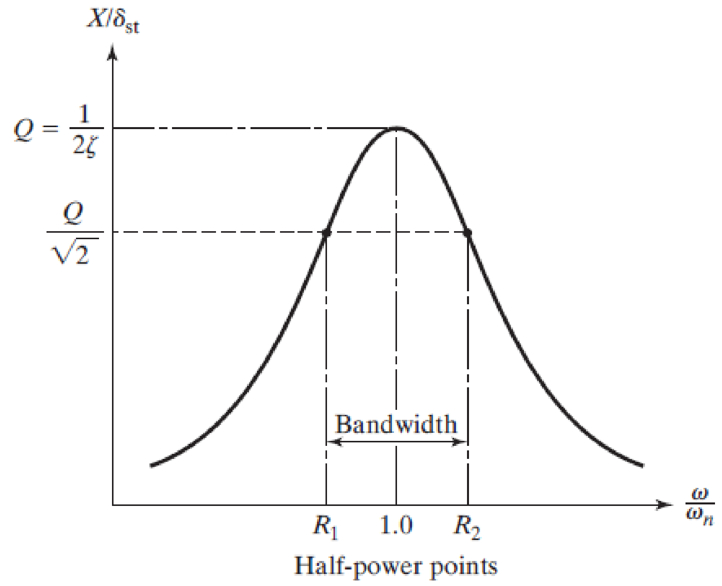


Figure 3. 9 : Bande passante [2]

Si on divise le facteur de qualité sur $\sqrt{2}$ où le facteur d'amplification devient $M = \dfrac{1}{2\sqrt{2}\varepsilon}$.

La ligne horizontale $y = \dfrac{1}{2\sqrt{2}\varepsilon}$ coupe la courbe du facteur de qualité en deux points correspond à $w_1$ *et* $w_2$. La différence entre les deux fréquences $(w_2 - w_1)$ s'appelle la bande passante.

Pour trouver $w_1$ *et* $w_2$ on utilise $\left(\dfrac{X}{\delta_{st}}\right) = \dfrac{1}{2\sqrt{2}\varepsilon}$. Mettant

$$\frac{w}{w_n} = r \Rightarrow r_1 = \frac{w_1}{w_n} \; et \; r_2 = \frac{w_2}{w_n} \tag{3. 40}$$

On trouve,

$$r^4 - (2 - 4\varepsilon^2) r^2 + (1 - 8\varepsilon^2) = 0 \tag{3.41}$$

$\begin{cases} r_1^2 = 1 - 2\varepsilon^2 - 2\varepsilon\sqrt{1+\varepsilon^2} \\ r_2^2 = 1 - 2\varepsilon^2 + 2\varepsilon\sqrt{1+\varepsilon^2} \end{cases}$, on peut éliminer $\varepsilon^2$ puisque $\varepsilon$ est faible.

$$\begin{cases} r_1^2 = 1 - 2\varepsilon \\ r_2^2 = 1 + 2\varepsilon \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} w_1^2 = (1 - 2\varepsilon) w_n^2 \\ w_2^2 = (1 + 2\varepsilon) w_n^2 \end{cases}$$

$$w_2^2 - w_1^2 = 4\varepsilon w_n^2 \tag{3.42}$$

Comme nous avons $w_1, w_2 \approx w_n$ on peut écrire $w_1 + w_2 = 2w_n$. L'équation (3.42) peut être écrite,

$$w_2 - w_1 = 2\varepsilon w_n \quad \Rightarrow \quad 2\varepsilon = \frac{w_2 - w_1}{w_n} \tag{3.43}$$

On peut écrire le facteur de qualité sous la forme,

$$Q = \frac{1}{2\varepsilon} = \frac{w_n}{w_2 - w_1} \tag{3.44}$$