Chapitre 1

Concepts fondamentaux sur les vibrations

1.1 Introduction

La plus part de nôtres activités quotidiennes se manifestent sur des vibrations cycliques :

- On écoute parce que le tombeur de l'oreille vibre avec un mouvement cyclique.
- On parle avec des vibrations cycliques des angines et de la langue.
- On marche avec des mouvements cycliques des pieds.
- Etc.…

Au début, les études concernant les mouvements vibratoires se concentrèrent sur le développement des théorèmes mathématiques pour comprendre les phénomènes physiques des vibrations. En revanche, les études récentes se concentrent sur les applications des vibrations dans le domaine de l'ingénierie, comme les moteurs mécaniques, les moteurs électriques, les engins, les bâtiments, les ponts…

L'origine des vibrations est due à l'existence des défauts dans l'équilibrage dans les moteurs ou dans les structures. Le déséquilibre peut être dû à une mauvaise conception, une mauvaise fabrication ou au vieillissement de certaines parties du système.

- Les vibrations dans le moteur d'un train peuvent entrainer des haussements des roues qui à son tour peuvent causer un déraillement.
- Les vibrations du moteur Diesel dans les engins provoquent un énorme bruit et des vibrations dans la croute de la terre ce qui, avec le temps, entrainent des endommagements dans les structures proches.
- Les vibrations dans les outils de découpage produisent des surfaces non homogènes.

- Les vibrations diminuent la durée de vie du moteur que ce soit mécanique ou électrique.
- Les vibrations dans les moteurs influent énormément sur la santé des utilisateurs.

Le grand problème des vibrations réside dans les structures, lorsque le battement naturel coïncide avec le battement d'une force extérieure (le phénomène de la résonance) ce qui entraine une amplification de l'amplitude produisant un énorme dégât dans les structures (le pont du Tacoma, 1 Juillet au 7 Novembre 1940). Pour ces raisons, les ingénieurs sont obligés de bien étudier les structures (ponts, constructions, immeubles,..) et améliorer l'équilibrage des machines mécaniques ou électriques. Malgré cela, les vibrations ont des applications importantes dans la vie quotidienne comme les machines de lavages…etc.

1.2 Définition des vibrations

Le mouvement qui se répète au cours du temps s'appelle un mouvement vibratoire ou un mouvement oscillatoire. Tout système mécanique ayant une masse et un élément flexible (un ressort par exemple) ou leur équivalence dans un système électrique (inductance, condensateur) peut faire des mouvements vibratoires. Dans la plupart des cas, ces systèmes ont un amortisseur pour les systèmes mécaniques ou une résistance pour les systèmes électriques. En général, on peut représenter un système vibratoire par les schémas suivants :

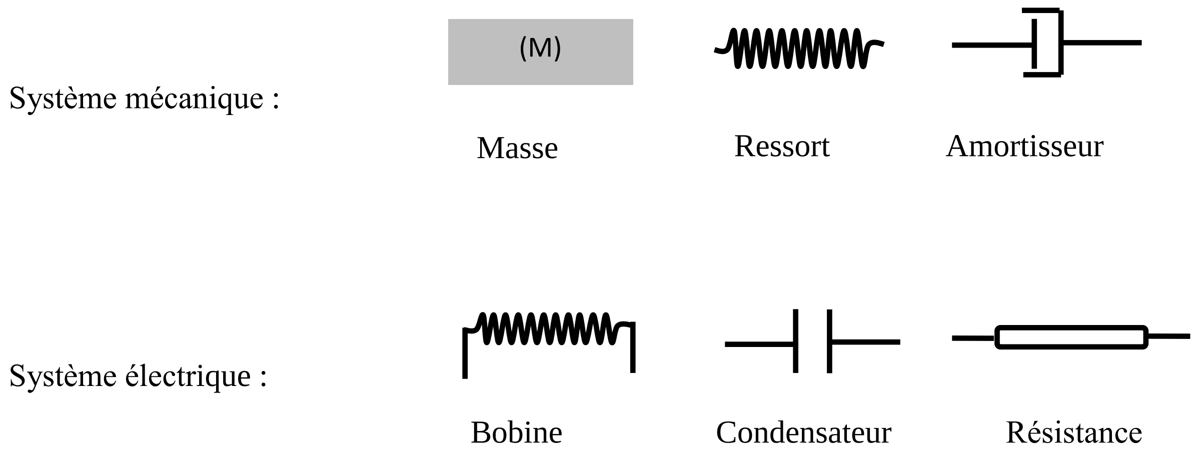


Figure 1. 1 : Représentation graphique des éléments du système vibratoire

D’une autre manière, on peut dire que tout système vibratoire contient trois moyens :

- **Système mécanique**
  - Moyen pour stocker l’énergie cinétique, c’est la masse.
  - Moyen pour stocker l’énergie potentielle, c'est le ressort.
  - Moyen de dissipation de l’énergie, c’est l’amortisseur.
- **Système électrique**
  - Moyen pour stocker l’énergie électrique, c’est le condensateur.
  - Moyen pour stocker l’énergie magnétique, c'est la bobine.
  - Moyen de dissipation de l’énergie, c’est la résistance électrique.

Pendant les vibrations (oscillations), l’énergie se transforme d’une forme à une autre : de l’énergie cinétique à l’énergie potentielle et vice versa dans un système mécanique ou de l’énergie électrique à l’énergie magnétique et vice versa dans un système électrique. L’exemple le plus simple représentant un système vibratoire mécanique est le pendule simple. Dans chaque oscillation, l’énergie se transforme de l’énergie potentielle à l’énergie cinétique et vice versa. Supposant qu'à l’instant initial la masse est à la position 1 (fig.1.2), l’énergie totale est sous la forme d’une énergie potentielle.

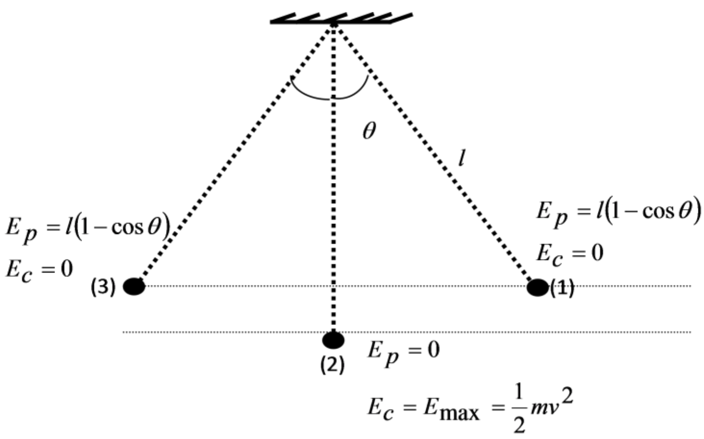


Figure 1. 2 : Transformation de l'énergie potentielle à l'énergie cinétique et vice versa dans les vibrations d'un pendule simple

On libère la masse, l’énergie cinétique augmente et l’énergie potentille diminue jusqu'à la transformation complète de l’énergie potentille en énergie cinétique à la position 2 (fig.1.2), la masse a fait un quart de cycle. A partir de la position 2, l’énergie potentille augmente et l’énergie cinétique diminue jusque la transformation complète en énergie potentille à la position 3 (la masse a fait un demi-cycle). Le retour de la masse à la position 1 avec le même processus, constitue un cycle complet. Dans le cas réel, durant le mouvement de la masse, une partie de l’énergie se communique avec le milieu extérieur. Cette partie est irrécupérable, donc le système perd de l’énergie dans chaque cycle.

1.3 Classification des vibrations

Les vibrations peuvent être classifiées sous plusieurs formes. On s’intéresse à la classification la plus commune qui range les vibrations dans trois catégories.

1.3.1 Vibrations libres et vibrations forcées

Après une perturbation initiale, un système vibratoire est laissé sans aucune action d'une force externe, les vibrations dans ce cas sont connues comme des vibrations libres. L'oscillation d'un pendule simple est un exemple de ce type de vibrations.

Si le système est soumis à une force extérieure au cours de toutes ces vibrations, les vibrations résultantes sont dites forcées. On peut prendre le pendule simple comme exemple si la masse est soumise à une force périodique extérieure.

1.3.2 Vibrations amorties et vibrations non amorties

Si l’énergie totale du système est conservée l’hors des vibrations (il n’y a pas de dissipation de l’énergie), ces vibrations sont dites non amorties. En revanche si le système perd de l’énergie au cours de ces vibrations (si l’on considère la résistance de l’air sur la masse du pendule simple dans l’exemple précédant), après certain temps la masse s’arrête à cause de la dissipation de l’énergie. Ces vibrations, sont dites vibrations amorties.

1.3.3 Vibrations régulières et vibrations non régulières

Si l’amplitude du mouvement vibratoire est connue à tout moment, les vibrations résultantes sont appelées régulières ou déterministes. D’une autre manière, c’est le mouvement vibratoire dont on peut prévoir la valeur de l'amplitude à n'importe quel moment. Dans le cas contraire, les vibrations sont dites non régulières ou non déterministes.

1.4 Nombre de degré de liberté

Le nombre minimal des coordonnées indépendantes nécessaires pour étudier un système vibratoire est appelé nombre de degré de liberté.

Exemples :

- **Pendule simple**

Le système de la figure 1. 3. peut être étudié (connaître la position de la masse m dans chaque instant) par la connaissance d'une seule coordonnée x ou y car elles sont liées par la relation $\boldsymbol{x^2+y^2=l^2}$. Connaitre l'une des deux coordonnées, ça veut dire que la deuxième est tirée directement par la relation précédente. On dit que les deux coordonnées ne sont pas indépendantes. L'étude de ce système nécessite une seule coordonnée, donc le système est à un degré de liberté.

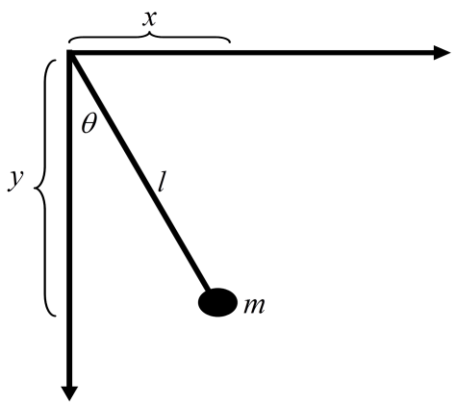


Figure 1.3 : Pendule simple

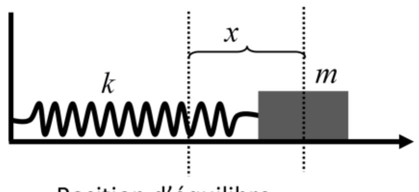


Figure 1.4 : Système masse-ressort

- **Masse ressort**

Pour connaitre la position de la masse dans chaque instant, il faut connaitre seulement l'abscisse x. L'étude de ce système nécessite donc une seule coordonnée, alors le système est à un degré de liberté.

- **Deux masses et deux ressorts**

Pour connaitre les positions des masses m_1 et m_2 dans chaque instant il faut connaitre les abscisses x_1 et x_2 (les deux coordonnées sont indépendantes, x_1 par exemple ; peut prendre des valeurs indépendamment des valeurs de x_2, l'étude de ce système nécessite deux coordonnées, donc le système est à deux degrés de liberté.

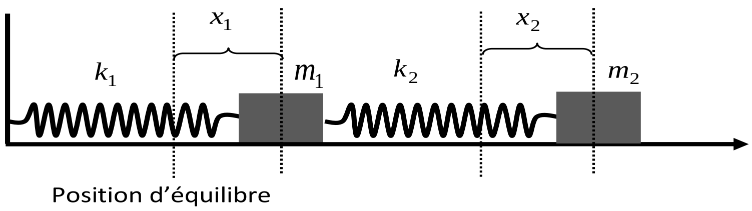


Figure 1.5 : Système à deux degrés de libertés, deux masses et deux ressorts

- **Masse ressort et pendule couplé**

Pour connaitre la position de la masse M reliée au ressort et la position de la masse m du pendule dans chaque instant, il faut déterminer l'abscisse x et l'angle θ. L'étude de ce système nécessite deux coordonnées, alors le système est à deux degrés de liberté.

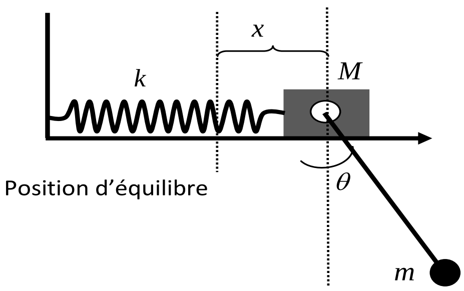


Figure 1. 6 : Système masse ressort et pendule couplés

1.5 Procédure d'analyse d'un système vibratoire

Dans le cas réel, presque la totalité des systèmes sont trop compliqués ainsi que les paramètres externes qui influent sur ces systèmes. Pour étudier ce genre de système, il faut suivre des étapes pour arriver à un modèle simple à étudié.

- Détermination des composants du système et les forces agissant sure ce système.
- Simplification du système réel (modèle physique), à un modèle plus simple dit modèle mathématique.
- Détermination de nombre de degré de liberté.
- Utilisation des approches mathématiques (petites angles, ...) pour assurer l'étude analytique.

Exemple (voir la figure 1.7)

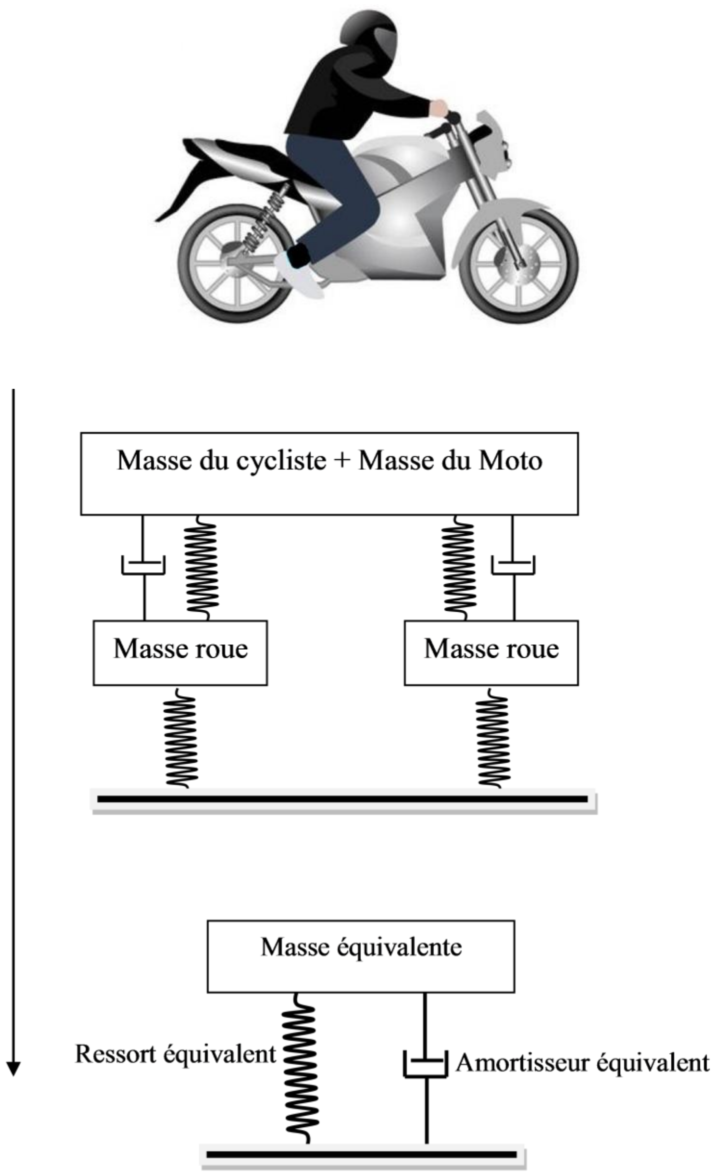


Figure 1.7 : Schéma illustre le passage du modèle physique au modèle mathématique (le model simple) [2].

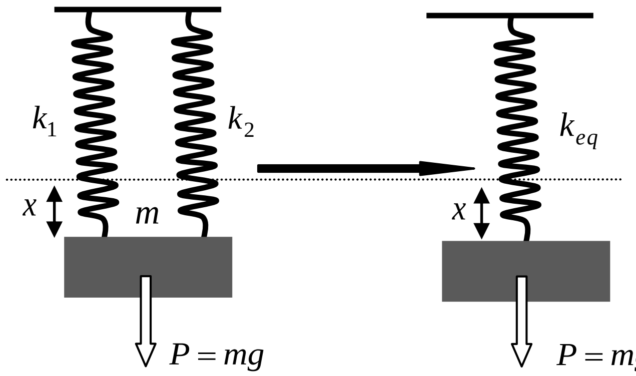
1.6 Système mathématique (modèle simple)

La simplification du système vibratoire compliqué à un modèle simple représentant le cas réel s'effectue par la détermination du ressort équivalant de tous les ressorts existant ainsi que la masse équivalente de toutes les masses qui constituent le système. Dans ce qui suit nous allons donner des exemples simples pour arriver à comprendre le ressort équivalant et la masse équivalente.

1.6.1 Ressort équivalant

Dans la pratique on trouve des ressorts en série et d'autres en parallèle.

a. Ressorts en parallèle



Système physique Modèle mathématique

Figure 1. 8 : ressort équivalant à deux ressort en série dans un système masse ressorts

Les équations du système à l’équilibre s'écrivent comme suit :

Pour le système réel :

$$P = k_1 x + k_2 x \tag{1.1-a}$$

$$P = (k_1 + k_2)x \tag{1.1-b}$$

Pour le modèle mathématique :

$$P = k_{eq} x \tag{1.2}$$

A partir des relations (1.1), (1.2) on peut déduire la constante de raideur du ressort équivalent par la relation suivante :

$$k_{eq} = (k_1 + k_2) \tag{1.3}$$

Si le système est constitué de plusieurs ressorts en série, alors la constante de la raideur du ressort équivalent est donnée par :

$$k_{eq} = \sum_i k_i \tag{1.4}$$

b. Ressorts en série

La suspension de la masse m à l'extrémité libre des deux ressorts k_1 et k_1 cause des allongements x_1 et x_2 dans k_1 et k_1 respectivement. L'allongement total est $x_t = x_1 + x_2$

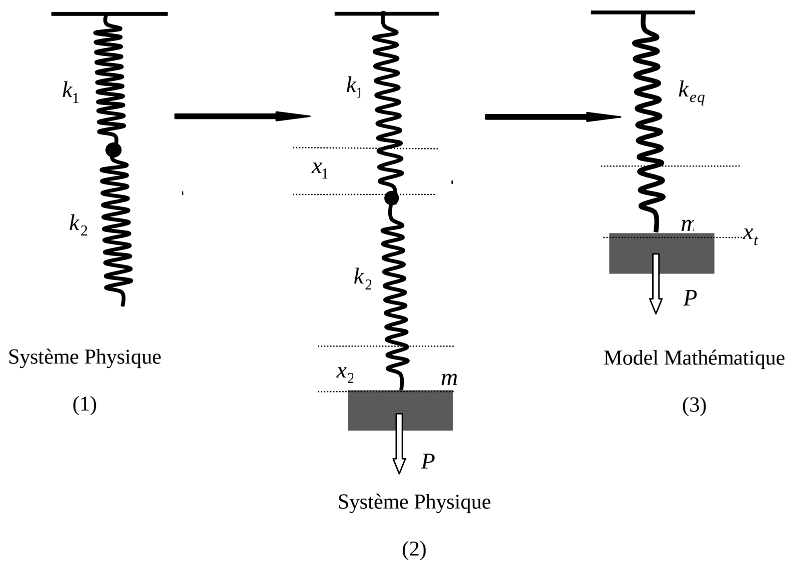


Figure 1.9 : Ressort équivalant d'un système mass-ressort à deux ressorts en série

A l'équilibre mécanique : Si on considère le système réel, on peut écrire ce qui suit :

$$P = k_1 x_1 \tag{1.5}$$

$$P = k_2 x_2 \tag{1.6}$$

Pour le modèle mathématique

$$P = k_{eq} x_t \tag{1.7}$$

À partir des relations précédentes, on peut écrire :

$$k_1 x_1 = k_{eq} x_t \quad \Rightarrow \quad x_1 = \frac{k_{eq}}{k_1} x_t \tag{1.8}$$

$$k_2 x_2 = k_{eq} x_t \quad \Rightarrow \quad x_2 = \frac{k_{eq}}{k_2} x_t \tag{1.9}$$

On somme les relations (1.8) et (1.9) et tenant compte de la relation $x_t = x_1 + x_2$

$$x_1 + x_2 = \frac{k_{eq}}{k_1} x_t + \frac{k_{eq}}{k_2} x_t \quad \Rightarrow \quad x_t = k_{eq}\left(\frac{1}{k_1} + \frac{1}{k_2}\right) x_t$$

A la fin on trouve la relation qui donne la constante de raideur du ressort équivalent.

$$\frac{1}{k_{eq}} = \frac{1}{k_1} + \frac{1}{k_2} \tag{1.10}$$

Dans le cas général où le système est constitué de plusieurs ressorts en parallèle, la constante de la raideur du ressort équivalent peut être donnée comme suit :

$$\frac{1}{k_{eq}} = \sum_i \frac{1}{k_i} \tag{1.11}$$

1.6.2 La masse équivalente

a. Ressort avec une masse non négligeable

Dans certains cas (voitures, camions…) on ne peut pas négliger les masses des ressorts introduits dans la constitution des systèmes mécaniques. Pour simplifier l'étude, on cherche une masse équivalente du ressort qui l'on suppose suspendue à son extrémité, finalement le ressort est devenu de masse négligeable. La masse du ressort est m sa longueur est L, donc la masse linéique du ressort est donnée par $\frac{m}{L}$. La masse d'un élément *s* de longueur dl est donnée par $\frac{m}{L} dl$ .La vitesse des éléments constituant le ressort (points du ressort) sont linéaire avec la distance l . La vitesse de l'élément qu'est à l'extrémité fixe est nulle alors que la vitesse

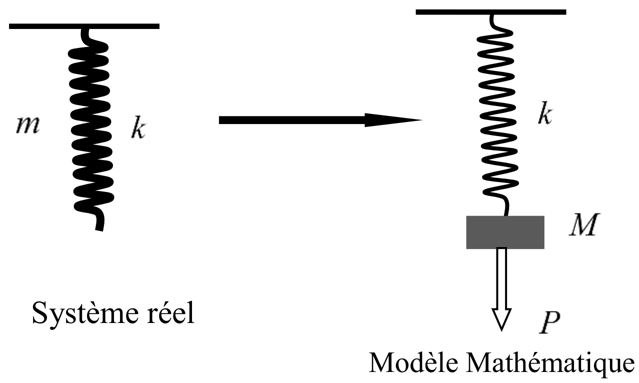


Figure 1.10 : Masse équivalente pour un ressort de masse non négligeable

de l'élément qu'est à l'extrémité libre $\dot{x}$ est maximale. La vitesse de l'élément dl peut être donnée comme suit :

$$\dot{x}_S(t) = \frac{l}{L}\dot{x}(t).$$

L'énergie cinétique T du ressort est égale à la somme de toutes les énergies de ses éléments et comme la distribution de la masse est continue alors la somme sera remplacée par une intégrale :

$$T = \int_0^L \frac{1}{2}\left(\frac{m}{L}dl\right)\left(\frac{l}{L}\dot{x}\right)^2 = \frac{1}{2}\frac{m}{L^3}\dot{x}^2\int_0^L l^2 dl \qquad (1.12)$$

$$T = \frac{1}{2}\left(\frac{m}{3}\right)\cdot\dot{x}^2 \qquad (1.13)$$

Sachant que l'énergie cinétique du système équivalant (modèle mathématique) s'écrit :

$$T = \frac{1}{2}m_{eq}\cdot\dot{x}^2 \qquad (1.14)$$

Tenant compte des relations (1.13) et (1.14) on déduit ce qui suit :

$$m_{eq} = \frac{m}{3}. \qquad (1.15)$$

- **Masse équivalente de trois masses**

Dans la plupart des cas pratiques, plusieurs masses apparues en combinaison. Pour rendre l'étude simple, elles doivent être remplacées par une seule masse équivalente. Pour illustrer cette supposition on donne un exemple de trois masses m_1, m_2 *et* m_3 attachées sur une barre de longueur l qui pivote autour d'un axe quelconque (figure 1.11). Supposant que les masses sont attachées à des distances x_1, x_2 *et* x_3 de l'axe de rotation.

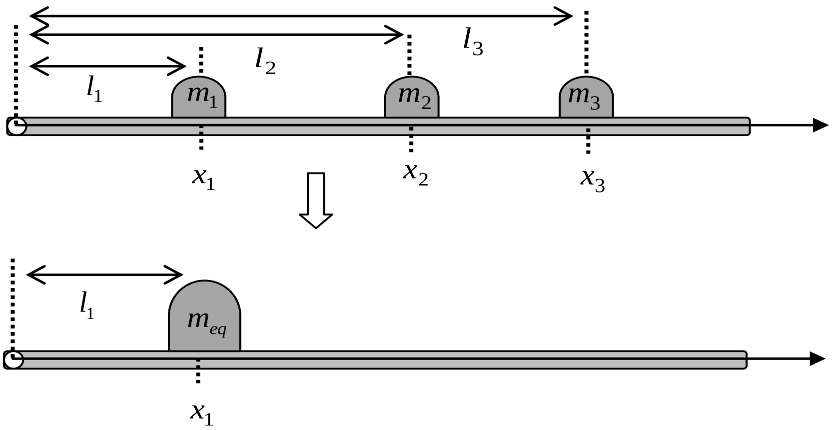


Figure 1.11 : Masse équivalente de trois masses m_1, m_2 *et* m_3 attachées sur une barre

On cherche la masse équivalente de ces trois masses supposées attachées à la place de m_1 (la masse équivalente attachée dans x_1). Pour simplifier l'analyse, on suppose que la barre pivote avec des petites vitesses angulaires. Dans cette approximation, on peut écrire les vitesses des masses en fonction de la longueur de la barre l par les relations suivantes,

- La vitesse de la masse m_2 : $\dot{x}_2 = \dfrac{l_2}{l}\dot{x}_1$

- La vitesse de la masse m_3 : $\dot{x}_3 = \dfrac{l_3}{l}\dot{x}_1$

- La vitesse de la masse équivalente m_{eq} : $\dot{x}_{eq}$

L'énergie cinétique du système réel est donnée par :

$$T = \frac{1}{2} m_1 \dot{x}_1^2 + \frac{1}{2} m_2 \dot{x}_2^2 + \frac{1}{2} m_3 \dot{x}_3^2 \tag{1.16}$$

L'énergie cinétique du modèle mathématique est donnée par :

$$T = \frac{1}{2} m_{eq} \dot{x}_{eq}^2 \tag{1.17}$$

A partir des deux relations précédentes, on peut écrire ce qui suit :

$$\frac{1}{2} m_{eq} \dot{x}_{eq}^2 = \frac{1}{2} m_1 \dot{x}_1^2 + \frac{1}{2} m_2 \dot{x}_2^2 + \frac{1}{2} m_3 \dot{x}_3^2 \tag{1.18}$$

Tant que la masse équivalente est supposée attachée à la place de la masse m_1 (c'est-à-dire à la distance x_1), la vitesse de la masse équivalente m_{eq} est égale à la vitesse de la masse m_1, c'est à dire $\dot{x}_{eq} = \dot{x}_1$. En l'introduisant dans l'équation (1.18), on trouve :

$$m_{eq} = m_1 + \left(\frac{l_2}{l_1}\right)^2 m_2 + \left(\frac{l_3}{l_1}\right)^2 m_3 \tag{1.19}$$

1.7 Mouvement harmonique

Le mouvement qui se répète dans des temps égaux, s'appelle un mouvement périodique. Le plus simple mouvement périodique est le mouvement harmonique où l'amplitude reste constante (forces dissipatives sont négligeables). Le mouvement d'un point sur un trajet circulaire avec une vitesse angulaire constante et le mouvement d'une masse accrochée à un ressort sont des exemples qui représentent ce type le mouvement harmonique.

Le mouvement harmonique peut être représenté mathématiquement par le sinus ou le cosinus. Pour illustrer cette idée on schématise ou le mouvement d'une masse suspendue à un ressort (fig. 1.12) ou par le mouvement d'un point matériel qui se déplace autour d'un cercle (fig. 1.13).

- **Amplitude :** L'amplitude est l'écart maximal du système vibratoire par rapport à sa position d'équilibre (fig. 1.13).

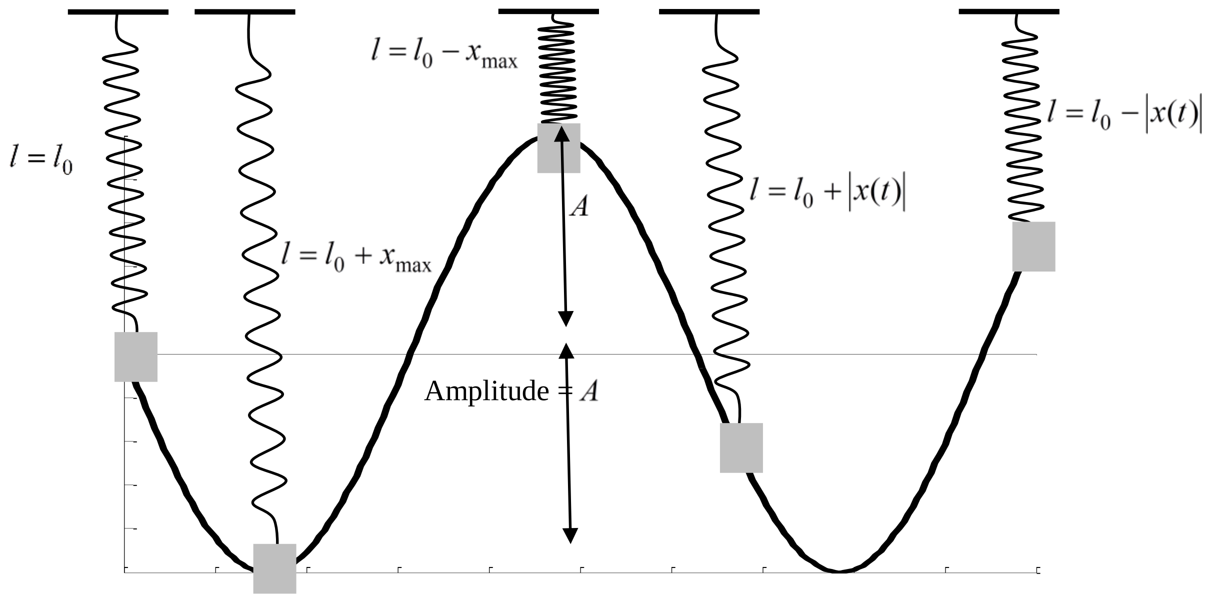


Figure 1.12 : Schéma illustre la représentation du mouvement harmonique par le sinus ou le cosinus.

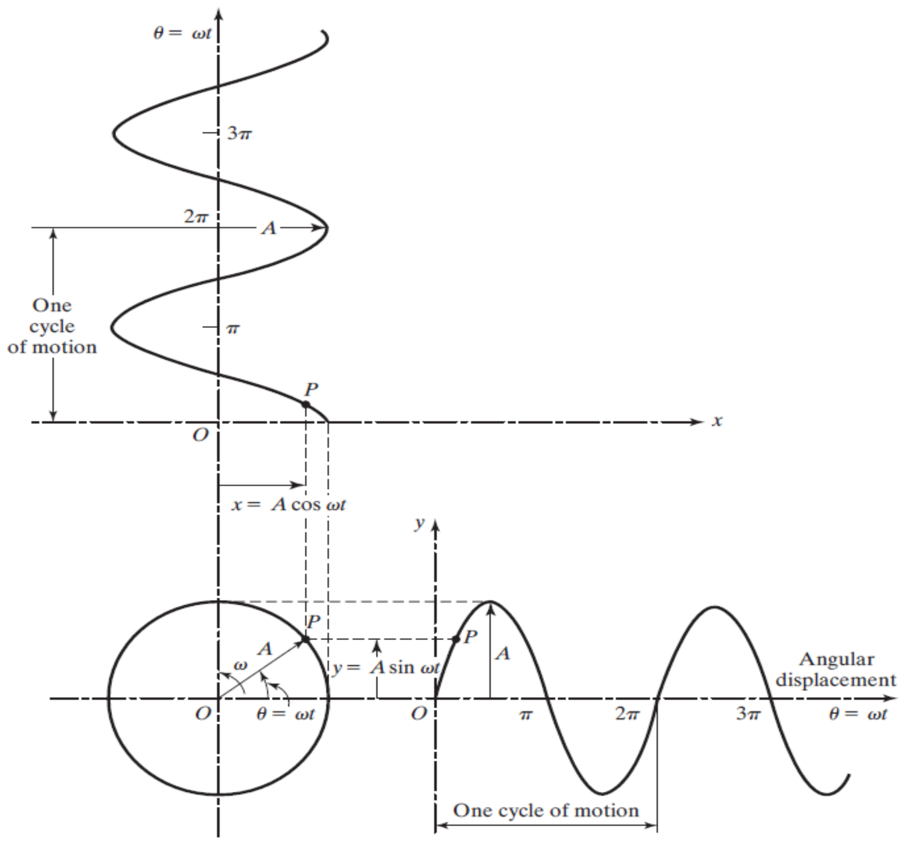


Figure 1.13 : Schéma illustre la représentation du mouvement harmonique par le sinus ou le cosinus[2].

- **Cycle :** le déplacement du système vibratoire de la position d'équilibre à la position extrême dans une direction puis le retour jusqu'à la position extrême dans la direction opposée, passant par la position d'équilibre, puis le retour à la position d'équilibre initial est appelé un cycle.
- **Période :** la période d'un mouvement vibratoire est le temps nécessaire pour que le système complète un cycle. L'unité du période T est la seconde s.

1.7.4 Représentation complexe du mouvement harmonique :

Un nombre complexe Z peut être représenté par un point dans le plan complexe, où le point Z(x, y) représente le nombre complexe Z=x + i y (fig : 1.14 a)

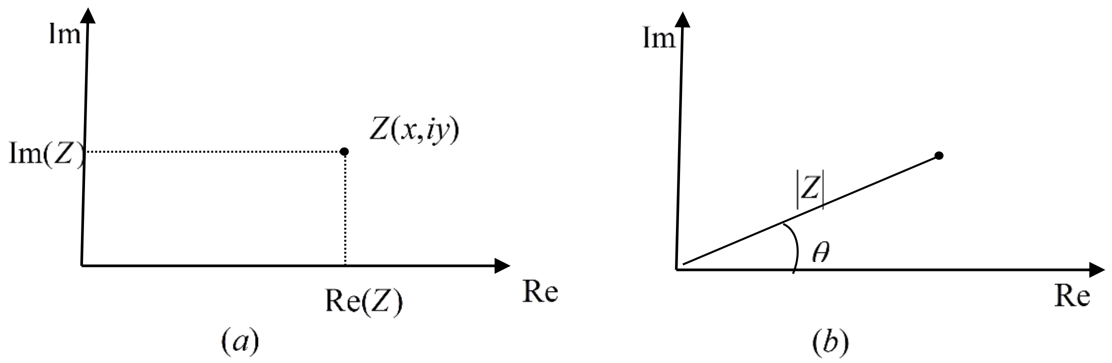


Figure 1.14 Représentation d'un nombre complexe.

L'amplitude du nombre complexe $|Z|$ est sa distance à l'origine. L'angle entre la ligne radiale et l'axe des réels fait un angle appelé l'argument de z ($\arg(Z)$) ou la phase de z (fig : 1.14 b).

Example: $Z = 2 + i3$

$$|Z| = \sqrt{2^2 + 3^2} = 3.6\ ,\ \arg(Z) = \tan^{-1}\left(\frac{3}{2}\right) = 56.31^\circ = 0.98rad\ .$$

On peut écrire le nombre complexe en fonction de l'amplitude et de la phase avec,

$$\mathrm{Re}(Z) = |Z|\cos(\theta), \quad \mathrm{Im} = |Z|\sin(\theta) \tag{1.20}$$

Alors

$$Z = \mathrm{Re}(Z) + i\,\mathrm{Im}(Z) = |Z|\cos(\theta) + i|Z|\sin(\theta) \tag{1.21}$$

En fin,

$$Z = |Z|(\cos(\theta) + i\sin(\theta)) \tag{1.22}$$

Nous avons, $i^2 = -1, \quad i^3 = -i, \quad i^4 = 1, \quad i^5 = i, \quad i^6 = -1, \ldots$

$$\cos\theta = 1 - \frac{\theta^2}{2!} + \frac{\theta^4}{4!} - \frac{\theta^6}{6!} + \ldots = 1 + \frac{(i\theta)^2}{2!} + \frac{(i\theta)^4}{4!} + \frac{(i\theta)^6}{6!} + \ldots$$

$$\sin\theta = \theta - \frac{\theta^3}{3!} + \frac{\theta^5}{5!} - \frac{\theta^7}{7!} + \ldots$$

$$i\sin\theta = i\theta + \frac{(i\theta)^3}{3!} + \frac{(i\theta)^5}{5!} + \frac{(i\theta)^7}{7!} + \ldots$$

On peut écrire,

$$\cos\theta + i\sin\theta = 1 + \theta + \frac{(i\theta)^2}{2!} + \frac{(i\theta)^3}{3!} + \frac{(i\theta)^4}{4!} + \ldots = e^{i\theta} \tag{1.23}$$

Alors le nombre complexe peut être écrit sous la forme la plus simple,

$$Z = |Z|e^{i\theta} \tag{1.24}$$

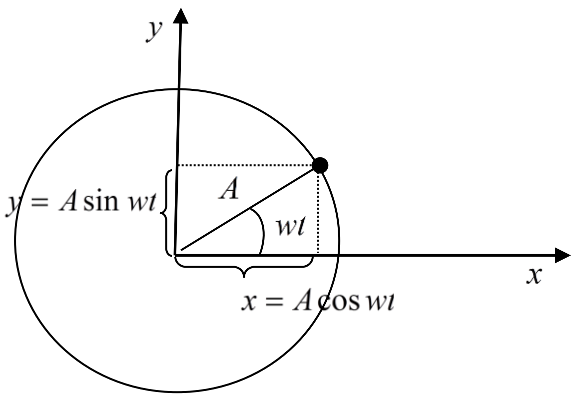


Figure 1.15 Mouvement circulaire d'un point matériel.

Considérons, dans le plan (x, y) un point se déplace dans le sens contraire des aiguilles d'une montre sur un cercle de rayon A avec une vitesse angulaire wt .

Les coordonnées de ce point correspondent au nombre complexe sont données par

$\mathrm{Re}(Z) = A\cos(\theta), \quad \mathrm{Im} = A\sin(\theta)$

Donc, le mouvement harmonique simple peut être donné par

$$Z = Ae^{iwt} \tag{1.25}$$

Dans l'étude du mouvement harmonique où on prend soit la partie réelle soit la parie imaginaire. Cette écriture est très utile pour étudier le mouvement harmonique. Elle est simple à dériver, à intégrer, à sommer …