Chapitre 04 : Analyse Combinatoire :

L'analyse combinatoire est une branche de mathématiques qui étudie comment compter les objets. Elle fournit des méthodes de dénombrements particulièrement utiles en théorie des probabilités..

1/ Arrangements :

Déf : Soit E un ensemble de n objets. On appelle arrangements de p objets toutes suites ordonnées de p objets pris parmi les n objets.

* Le nombre d'arrangements de p objets pris parmi n est noté : A_n^p, tel que $1 \leq p \leq n$ et $n, p \in \mathbb{N}^*$.

Remarque : si $n < p$ alors $A_n^p = 0$.

* Deux arrangements de p objets sont donc distincts s'ils diffèrent par la nature des objets qui les composent ou par leurs ordre dans la suite.

Exemple:

* une (suite) séquence d'ADN est constituée d'une enchaînement de 4 nucléotides [A(Adénine), C(cytosine), G(Guanine) et T(Thymine)].

il existe différents arrangements possibles de 2 nucléotides avec $p = 2$ et $n = 4$

: Arrangement avec répétitions:

Lorsqu'un objet peut être observé plusieurs fois dans un arrangement, le nombre d'arrangement avec répétition de p objets pris parmi n est alors,

$$A_n^p = n^p \quad \text{avec} \quad 1 \leq p \leq n.$$

Exemple:

le # (nombre) de 2 nucléotides attendus si l'on fait l'hypothèse qu'une base peut être observée plusieurs fois dans la séquence (ce qui correspond effectivement à la réalité) est donc :

$$A_4^2 = 4^2 = 16.$$

Le 16 dinucléotides identifiables dans une séquence d'ADN sont:

AA AC AG AT CA CC CG CT

GA GC GG GT TA TC TG TT.

<u>Arrangement sans répétitions:</u>

Lorsque chaque objet ne peut être observé qu'une seule fois dans un arrangement, le nombre d'arrangements sans répétition de p objets pris parmi n est alors: $A_n^p = \frac{n!}{(n-p)!}$ avec $1 \leq p \leq n$.

<u>Exemple:</u>

le # de dinucléotides attendu dans une séquence si l'on fait l'hypothèse qu'une base n'est observée qu'une seule fois est donc:

$$A_4^2 = \frac{4!}{(4-2)!} \quad 12.$$

$$\left(n! = n(n-1)(n-2) \cdots 3 \times 2 \times 1 \right).$$

sous cette contrainte, le 12 dinucléotides possibles sont: AC AG AT CA GG CT

GA GC GT TA TC TG.

* Permutations :

* permutation sans répétition :

Etant donné un ensemble E de n objet, on appelle permutations de n objets distincts toutes suites ordonnées de n objets ou tout arrangement n à n de ces objets. Le nombre de permutations de n objets est noté :

$$P_n = n!$$

Exemple :

Le nombre de manières de placer 8 convives autour d'une table est : 8! = 40320 possibilités.

* permutation avec répétition :

Dans le cas où il existerait plusieurs répétitions k d'un même objet parmi les n objets, le nombre de permutations possibles des n objets doit être rapporté au nombre de permutations des k objets identiques.

Le nombre de permutations de n objets est alors

$$P_n = \frac{n!}{k!}$$

Exemple :

considérons le mot « Cellule ». Le # de mots possible (avec ou sans signification) que l'on peut écrire en permutant ces 7 lettres est :

$$P_7 = \frac{7!}{2!\,3!} = 420 \text{ mots possibles.}$$

(L (3 fois) et e (2 fois)).

: Combinaisons :

Déf : Si l'on reprend l'exemple de la séquence d'ADN, à la différence des arrangements où les dinucléotides AC et CA formaient deux arrangements distincts, ces derniers ne formeront qu'une seule combinaison. Pour les combinaisons, on ne parle plus de suite ni de série puisque la notion d'ordre des objets n'est plus prise en compte.

On parle alors de tirages avec ou sans remise.

* Combinaisons sans remise :

Le # de combinaisons de p objets pris parmi n est noté : $C_n^p = \frac{n!}{p!(n-p)!}$, notée $\binom{p}{n}$.

Remarque : $1 \leq p \leq n$ et $n, p \in \mathbb{N}^*$, si $n < p$

donc : $C_n^p = 0$.

Exemple :

* La formation d'une délégations de 5 personnes parmi un groupe de 50 constitue une combinaison avec $p = 5$ et $n = 50$.

$$C_n^p = \frac{n!}{p!(n-p)!} = \frac{50!}{5!(45)!}$$

Combinaisons avec remise :

Le nombre de combinaisons de p objet parmi n avec remise est : $C_{n+p-1}^{p} = \frac{p!}{(n+p-1)!\,(p-(n+p-1))!}$

$$= \frac{p!}{(n+p-1)!\,(1-n)!}$$

Exemple :

Soit la constitution de mots de 3 lettres à partir d'un alphabet à 5 lettres avec remise, on distingue 3 cas possibles :

+ C_5^3 le # de mots de 3 lettres différents et sans ordre.
* $C_5^2 \times 2$ " " " " 2 " " et une lettre redondante
* C_5^1 " " " " 3 lettres identiques.

donc : $C_5^3 + C_5^2 \times 2 + C_5^1 = C_7^3 = 35 = C_{5+3-1}^3$.