

# Chapitre 3

## Systèmes chaotiques

L'histoire récente des systèmes dynamiques commence vers le début du 20ème siècle par les travaux d'Henri Poincaré dans les quels il propose des études qualitatives basées sur l'étude des points d'équilibre et des trajectoires périodiques, puis de leurs bassins d'attraction au lieu de chercher des solution analytique donnés par des formules (car pour la plus part des systèmes non-linéaires il est impossible de trouver de tel formules). Dans ses travaux H. Poincaré avais pressenti la nature complexe (sensibilité au conditions initiales) de certains systèmes dynamiques qui semblent être simples dans leurs formes.

Par la suite, dans les année 60 Edward Lorenz a établi le premier exemple de système d'équations différentielles simplifiées de trois variables seulement qui permettaient de déterminer l'évolution de masses d'air et dont la nature des solutions est complexe (premier système chaotique).

### 3.1 Propriétés et définitions du chaos

Le chaos est un phénomène qui n'est pas facile à classer ou identifié et Il n'y a pas de définition universellement acceptée pour le chaos.

Le terme "chaos" associé à une application itéré a été formellement introduit par Li et Yorke en 1975, où ils ont établi un critère simple pour le chaos dans les équations aux différences unidimensionnelles.

**Définition 3.1.1.** (Chaos au sens de Li-Yorke) Une application continue  $f : I \rightarrow I$  où  $I$  est l'intervalle unitaire ( $I = [0, 1]$ ), est dite chaotique au sens de Li-Yorke s'il y a un ensemble indénombrable  $S \subset I$  tel que les trajectoires de deux points distincts  $x, y$  dans  $S$  sont proximaux et non asymptotiques, c'est-à-dire  $\liminf_{n \rightarrow +\infty} d(f^n(x), f^n(y)) = 0$  et  $\limsup_{n \rightarrow +\infty} d(f^n(x), f^n(y)) > 0$

**Définition 3.1.2.** (définition de Devaney du chaos - 1989).

Soit  $V$  un ensemble. Une application continue  $f : V \rightarrow V$  est dite chaotique sur  $V$  si

- $f$  est topologiquement transitive : pour toute paire d'ensembles ouverts non vides  $U, W \subset V$  il existe un  $k > 0$  tel que  $f^k(U) \cap W \neq \emptyset$ .
- Les points périodiques de  $f$  sont denses dans  $V$ .
- $f$  possède une dépendance sensible aux conditions initiales : il existe un  $\delta > 0$  tel que, pour tout  $x \in V$  et tout  $y$  dans un voisinage de  $x$ , il existe  $n \geq 0$  tel que  $|f^n(x) - f^n(y)| > \delta$ .

Les phénomènes chaotiques ne sont pas aléatoires, mais au contraire qui obéissent à des lois déterministes, parfois assez simples dans leur représentation mathématique. Les phénomènes traités par les lois du chaos se caractérisent par les propriétés génériques fondamentales qui sont presque toujours présentes dans les systèmes chaotiques, en plus de la sensibilité aux conditions initiales on peut citer les propriétés suivantes :

### 1. La non-linéarité

Un système linéaire admet toujours des solutions, les effets sont prévisibles et proportionnels aux causes qui les ont engendrés. On peut le décomposer en sous ensembles ou le composer avec d'autres systèmes sans qu'il perde ses propriétés.

Mais un système non-linéaire, n'est en général pas soluble, plus on tente de le décomposer, plus la complexité interne se révèle.

### 2. La structure fractale

Le comportement d'un système chaotique se reproduit de manière auto-similaire à des échelles différentes. Plus on le regarde de près, plus on découvre de nouveaux détails comparables à ceux qu'on observait aux échelles supérieures. Sa représentation géométrique ne s'intègre pas dans un espace

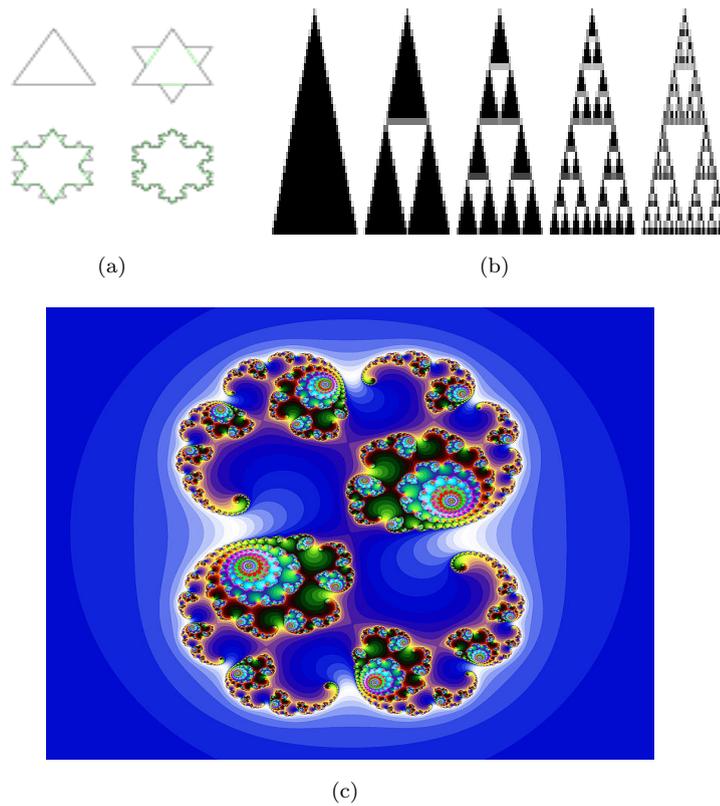


FIGURE 3.1: Structure fractale, (a) le flocon de Koch (b) triangle de Sierpiński. (c) l'ensemble de Julia.

de dimension entière, mais de dimension fractionnaire (ce n'est plus tout à fait une courbe, mais aussi elle n'est pas devenue une surface).

### 3. Les attracteurs étranges

Bien imprévisibles et infiniment complexes à toutes les échelles, les systèmes chaotiques ne suivent pas des trajectoires privilégiées. La courbe d'un tel système, sans jamais repasser par les mêmes points évolue toujours dans un espace délimité dans lequel elle finit par décrire une figure géométrique particulière qui représente son attracteur, appelé étrange en raison de l'étrangeté de ce comportement.

## 3.2 Scénarios de transition vers le chaos

On ne sait toujours pas à l'heure actuelle dans quelles conditions un système va devenir chaotique. Cependant, il existe un certain nombre de scénarios de transition vers le chaos qui sont universels, et si un système entre dans un de ces scénarios, son évolution peut être décrite. Supposons que la dynamique étudiée dépend d'un paramètre de contrôle. Lorsqu'on varie ce paramètre, le système peut passer d'un état stationnaire à un état périodique, puis au-delà d'un certain seuil, suivre un scénario de transition et devenir chaotique. On peut citer trois scénarios de transition vers le chaos

### 1. L'intermittence vers le chaos :

Qui se caractérise par l'apparition erratique de bouffées chaotiques dans un système qui oscille de manière régulière.

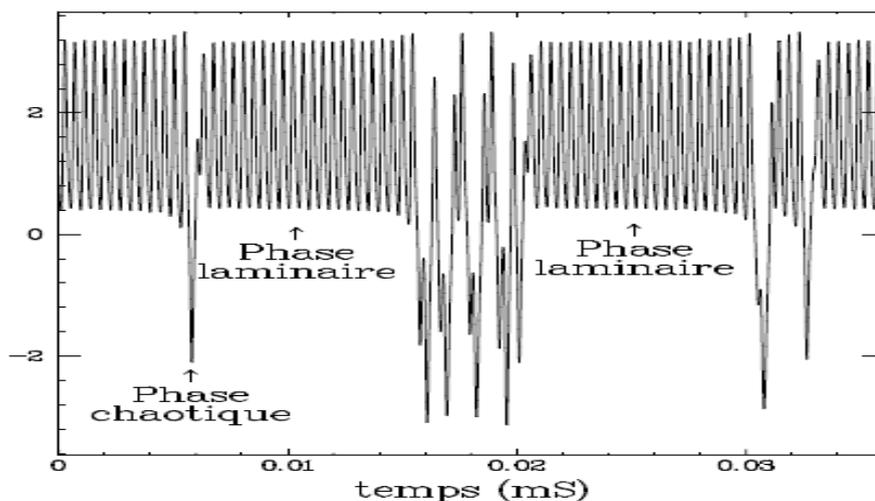


FIGURE 3.2: Transition vers le chaos par l'intermittence.

### 2. Le doublement de période

Qui est caractérisé par une succession de bifurcation fourches. A mesure que la contrainte augmente, la période d'un système forcé est multipliée par deux, puis par quatre, par huit, etc... ; ces doublements de période sont de plus en plus rapprochés ; lorsque la période est infinie, le système devient chaotique. La turbulence dans les fluides peut apparaître suivant ce scénario.

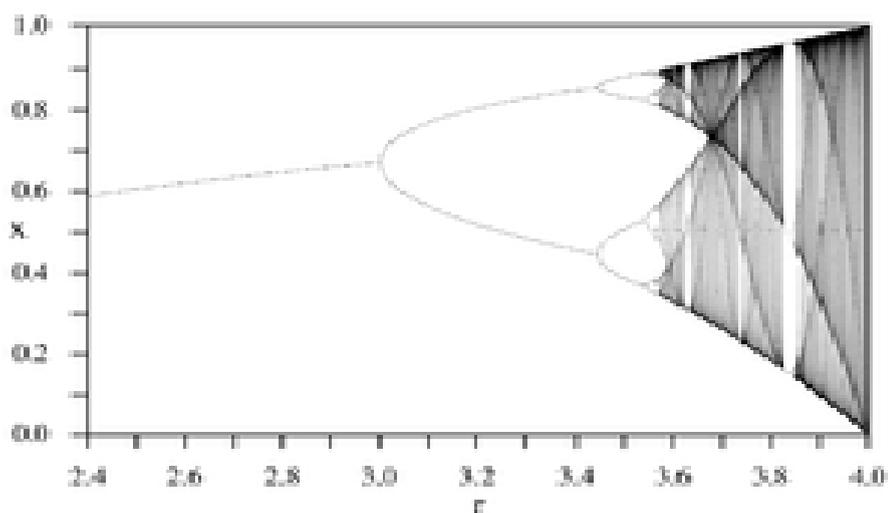


FIGURE 3.3: Transition vers le chaos via le doublement de période.

### 3. Le scénario via la quasi-périodicité

Dans lequel un comportement devient chaotique par l'apparition successive de trois fréquences incommensurables.

## 3.3 Exposants de Lyapunov

Alexandre Lyapunov a développé une quantité permettant de mesurer la divergence des trajectoires qui sont voisines au départ, cette quantité est appelée "exposant de Lyapunov" qui est souvent utilisé pour déterminer si un système est chaotique ou non.

### 1. Cas d'une application unidimensionnelle

Considérons un système dynamique décrit par une application discrète  $f$  (c'est à dire  $x_n = f(x_{n-1})$ ) et soit  $x_0$  une condition initiale, perturbons  $x_0$  par l'ajout d'une très petite erreur  $\epsilon$  et on observe le comportement des trajectoires  $x_n$  et  $\bar{x}_n$  issues des deux conditions initiales  $x_0$  et  $x_0 + \epsilon$ . Supposons qu'elles s'écartent en moyenne exponentiellement c'est à dire il existe un réel  $\lambda$  tel que après  $n$  itérations on a :  $|f^n(x_0 + \epsilon) - f^n(x_0)| \cong \epsilon e^{n\lambda}$  d'où  $n\lambda \cong \ln \frac{|f^n(x_0 + \epsilon) - f^n(x_0)|}{\epsilon}$

et pour  $\epsilon \rightarrow 0$  on a :

$$\begin{aligned}
\lambda &\cong \frac{1}{n} \ln \left| \frac{f^n(x_0 + \epsilon) - f^n(x_0)}{\epsilon} \right| = \frac{1}{n} \ln \left| \frac{df^n(x_0)}{dx_0} \right| \\
&\cong \frac{1}{n} \ln \left| \frac{df^n(x_0)}{df^{n-1}(x_0)} \cdot \frac{df^{n-1}(x_0)}{df^{n-2}(x_0)} \cdots \frac{df^1(x_0)}{dx_0} \right| \\
&\cong \frac{1}{n} \ln \left| \frac{df(x_{n-1})}{dx_{n-1}} \cdot \frac{df(x_{n-2})}{dx_{n-2}} \cdots \frac{df(x_0)}{dx_0} \right| \cong \frac{1}{n} \sum_{i=0}^{n-1} \ln \left| \frac{df(x_i)}{dx_i} \right|
\end{aligned}$$

finalement pour  $n \rightarrow +\infty$  on a :

$$\lambda = \lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{1}{n} \sum_{i=0}^{n-1} \ln |f'(x_i)|$$

$\lambda$  est appelé exposant de Lyapunov il indique le taux moyen de divergence.

\* Si  $\lambda > 0$  alors il y a une sensibilité aux conditions initiales.

\* Si  $\lambda < 0$  les trajectoires se rapprochent et on perd l'information sur les conditions initiales.

**Exemple 3.3.1.** Exposant de Lyapunov de l'application logistique

## 2. Cas d'une application multidimensionnelle

Dans ce paragraphe nous allons généraliser les concepts du paragraphe précédent à des trajectoires multidimensionnelles de type :

$$f : \mathbb{R}^m \rightarrow \mathbb{R}^m, \quad x_{n+1} = f(x_n)$$

Un système  $m$ -dimensionnel possède  $m$  exposants de Lyapunov, chacun d'entre eux mesure le taux de divergence suivant un des axes du système, de sorte qu'en moyenne un hyper-volume initial  $V_0$  évolue selon une loi de type :

$$V = V_0 e^{(\lambda_1 + \lambda_2 + \dots + \lambda_m)n}$$

Pour avoir du chaos, il est nécessaire qu'au moins un  $\lambda_i$  soit positif, pour avoir étirement selon au moins un axe. Mais il faut aussi que la somme des  $\lambda_i$  soit négative. Puisque, dans le cas contraire, le volume initial finirait par remplir tout

l'espace dans lequel il est immergé et on n'aurait plus un attracteur de faible dimension, ce qui signifie qu'on n'aura pas du chaos déterministe.

Tout d'abord nous devons calculer les  $\lambda_i$ . Dans ce but, nous fixons une hypersphère dans notre espace  $m$ -dimensionnel de rayon  $\epsilon$  (petit) de conditions initiales, et examinons son évolution. Comme précédemment, nous nous intéressons à :

$$f^n(x_0 + \epsilon) - f^n(x_0)$$

Posons  $x'_0 = x_0 + \epsilon$ , on a le développement en série limité d'ordre 1 de  $f^n(x_0)$  au voisinage de  $x'_0$  suivant :

$$x_n - x'_n = \frac{df^n(x_0)}{dx_0}(x_0 - x'_0) = J^n(x_0)(x_0 - x'_0)$$

$J^n(x_0)$  dénote la matrice jacobienne de  $f^n$  au point  $x_0$ , si elle est diagonalisable, alors il existe une matrice inversible  $P_n$  telle que  $D_m^n = P_n^{-1}J^n P_n$ ,  $D_m^n$  est une matrice diagonale contenant les valeurs propres de  $J^n$  qui seront notés par  $\Lambda_i^n$ ,  $i = 1, \dots, m$ .

On définit alors les  $m$  exposants de Lyapunov de la manière suivante :

$$\lambda_i = \lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{1}{n} \ln[\Lambda_i^n], \quad i = 1, \dots, m$$

### 3.4 Dimensions fractales des attracteurs étranges

On remarque qu'il y a un lien, entre les exposants de Lyapunov et la dimension de l'attracteur, comme nous l'avons mentionné précédemment si tous les exposants sont positifs la sphère de conditions initiales va remplir tout l'espace, mais s'il sont tous négatifs la sphère va se contracter en un point.

(a) **Dimension de Mori.**

Soient  $m_0$  le nombre des exposants de Lyapunov qui sont nuls,  $m_+$  le nombre d'exposants positifs,  $\bar{\lambda}_+$  la moyenne des exposants positifs et  $\bar{\lambda}_-$  celle des exposants

négatifs. La dimension de Mori est donnée par la relation suivante :

$$D_{M_0} = m_0 + m_+ \left(1 + \frac{\bar{\lambda}_+}{|\bar{\lambda}_-|}\right)$$

**Exemple 3.4.1.** Dimension de l'attracteur de (Henon, Lozi, Lorenz, Rosler)

(b) **Dimension de Kaplan et Yorke**

Soit  $j_0$  un entier positif tel que :

$$\sum_{i=1}^{j_0} \lambda_i \geq 0 \text{ et } \sum_{i=1}^{j_0+1} \lambda_i < 0$$

On définit alors la dimension de Kaplan et Yorke par la relation suivante :

$$D_{KY} = J_0 + \frac{\sum_{i=1}^{j_0} \lambda_i}{|\lambda_{j_0+1}|}$$

**Exemple 3.4.2.** Dimension de l'attracteur de (Henon, Lozi, Lorenz, Rosler )

État	Attracteur	Dimension	Exposants de Lyapunov
Point d'équilibre	Point	0	$\lambda_n \leq \dots \leq \lambda_1 \leq 0$
Périodique	Cercle	1	$\lambda_1 = 0$ $\lambda_n \leq \dots \leq \lambda_2 \leq 0$
Période d'ordre 2	Tore	2	$\lambda_1 = \lambda_2 = 0$ $\lambda_n \leq \dots \leq \lambda_3 \leq 0$
Période d'ordre K	K-Tore	K	$\lambda_1 = \dots = \lambda_k = 0$ $\lambda_n \leq \dots \leq \lambda_{k+1} \leq 0$
Chaotique		Non entier	$\lambda_1 > 0$ $\sum_{i=1}^n \lambda_i < 0$
Hyper chaotique		Non entier	$\lambda_1 > 0 \ \lambda_2 > 0$ $\sum_{i=1}^n \lambda_i < 0$

FIGURE 3.4: Exposants de Lyapunov et Dimensions

# Bibliographie

- [1] L. Afifi, A. ElJai, E. Zerrik 'Systèmes dynamiques' Presses universitaires de Perpignan p408 (2009)
- [2] W.E. Boyce, R.C. DiPrima 'Elementary differential equations and boundary value problems' New York (1996)
- [3] H.Dang-Vu, C. Delcarte 'Bifurcations et chaos : Introduction à la dynamique contemporaine avec des programmes en Pascal, Fortran et Mathematica' 'Ellipses p 420 (2000 )
- [4] J.P. Demailly 'Analyse numérique et équations différentielles' EDP science, France (2006)
- [5] C. Goumez 'Systèmes dynamiques' (2007)
- [6] L. Perko 'Differential Equations and Dynamical Systems' Springer (2006)
- [7] E. R. Scheinerman 'Invitation to Dynamical Systems' (2000)