

Chapitre 03: Fonctions de plusieurs variables:

D'une manière générale, les fonctions réelles de plusieurs variables réelles sont de la forme:

$$y = f(x_1, x_2, \dots, x_n).$$

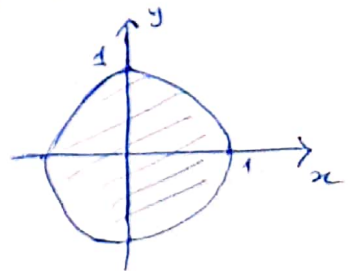
où $x_1, x_2, \dots, x_n$ et y sont des nombres réels.

1) Fonctions de deux variables:

Déf: on appelle fonction de deux variables une fonction f de $\mathbb{R}^2$ dans $\mathbb{R}$. L'ensemble D_f des éléments de $\mathbb{R}^2$ qui ont une image par f s'appelle le domaine de définition de f .

Par exemple, la fonction f définie par :

$f(x, y) = \sqrt{1 - x^2 - y^2}$ est une fonction de deux variables dont D_f est le disque de centre $(0, 0)$ et de rayon 1: $D_f = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : x^2 + y^2 \leq 1\}$.



* Représentation graphique:

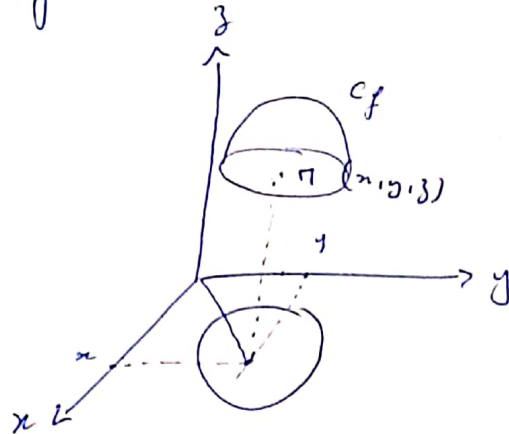
Soit f une fonction de 2 variables définie sur $D \subset \mathbb{R}^2$.

La fonction f fait correspondre à tout point (x, y) de D un réel $z = f(x, y)$.

Le graphe de f est une partie de $\mathbb{R}^2 \times \mathbb{R} = \mathbb{R}^3$.

$$C_f = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \mid z = f(x, y), (x, y) \in D\}$$

C_f est appelé surface.



2/ Dérivées partielles:

soit f une fonction de deux variables définie sur une partie D de $\mathbb{R}^2$. Lorsque l'on fixe l'une des deux variables, on obtient une fonction réelle d'une seule variable réelle.

* Dérivée partielles d'ordres 1:

soit f une fonction de deux variables et $(x, y), (x_0, y_0)$ soient des vecteurs de $\mathbb{R}^2$. Si l'on fixe l'une des composantes de x (disons $y = y_0$), on peut traiter f comme une fonction de l'autre variable x seule: $f(x, y_0) = f_1(x)$ et sa dérivée en x_0 est définie par:

$$f'_1(x_0) = \lim_{x \rightarrow x_0} \frac{f_1(x) - f_1(x_0)}{x - x_0} = \lim_{x \rightarrow x_0} \frac{f(x, y_0) - f(x_0, y_0)}{x - x_0}$$

de même, si l'on fixe n (soit $n = n_0$), $f(n_0, y) = f_2(y)$ et sa dérivée en y_0 est définie par:

$$f'_2(y_0) = \lim_{y \rightarrow y_0} \frac{f_2(y) - f_2(y_0)}{y - y_0} = \lim_{y \rightarrow y_0} \frac{f(n_0, y) - f(n_0, y_0)}{y - y_0}$$

Déf: On appelle dérivée partielle de f au point (n_0, y_0) par rapport à :

1) la variable n , le réel $f'_1(n_0)$ et on le note $f'_n(n_0, y_0)$ ($\frac{\partial f}{\partial n}(n_0, y_0)$).

2) la variable y , le réel $f'_2(y_0)$ et on le note $f'_y(n_0, y_0)$ ($\frac{\partial f}{\partial y}(n_0, y_0)$).

Exemples: soit la fonction f définie par:

$$f(n, y) = 3n^2 - 4y^2 + ny.$$

1) $\frac{\partial f}{\partial n} = 6n + y$ (dérivée de f par rapport à n).

2) $\frac{\partial f}{\partial y} = -8y + n$ (dérivée de f par rapport à y).

* Gradient:

Déf: si la fonction f admet des dérivées partielles d'ordre 1 en un point (n_0, y_0) , le vecteur $\text{grad } f(n_0, y_0)$

définie par: $\text{grad } f(n_0, y_0) = \left(\frac{\partial f}{\partial n}(n_0, y_0), \frac{\partial f}{\partial y}(n_0, y_0) \right)$

et on le note par $\nabla f(n_0, y_0)$.

* Dérivées partielles d'ordre 2:

soit f une fonction admettant des dérivées partielles en tout point (x, y) au voisinage du point (x_0, y_0) .

Les fonctions dérivée partielles f'_x, f'_y sont elles-mêmes des fonctions de deux ~~variables~~ variables. En dérivant par rapport à x et par rapport à y chacune des fonctions ci-dessus on obtient les dérivées partielles d'ordre 2, sous condition d'existence, et les note par:

$$f''_{xx} = \frac{\partial^2 f}{\partial x^2} = \frac{\partial f}{\partial x} \left(\frac{\partial f}{\partial x} \right), \quad f''_{xy} = \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y} = \frac{\partial f}{\partial x} \left(\frac{\partial f}{\partial y} \right)$$

$$f''_{yy} = \frac{\partial^2 f}{\partial y^2} = \frac{\partial f}{\partial y} \left(\frac{\partial f}{\partial y} \right), \quad f''_{yx} = \frac{\partial^2 f}{\partial y \partial x} = \frac{\partial f}{\partial y} \left(\frac{\partial f}{\partial x} \right)$$

Remarque: $\frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y} = \frac{\partial^2 f}{\partial y \partial x}$.

Exemple: $f(x, y) = 3x^2 - 4y^2 + xy$.

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x^2} = 6, \quad \frac{\partial^2 f}{\partial y^2} = -8,$$

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y} = 1 = \frac{\partial^2 f}{\partial y \partial x}$$

Intégrales doubles:

Nous avons défini l'intégrale de a à b d'une fonction continue sur l'intervalle fini $[a, b]$ dans le chapitre 2. De même analogue, on peut définir l'intégrale double, notée:

$$\iint_D f(x, y) \, dx \, dy.$$

d'une fonction continue $f(x, y)$ sur un domaine fini D du plan $\mathbb{R}^2$.

- un intégrale double se calcule en faisant deux intégrations successives:

* Intégration sur un rectangle:

Soit $D = [a, b] \times [c, d]$ un ~~car~~ rectangle de $\mathbb{R}^2$ et f une fonction continue sur D à valeurs réelles. On définit

$$\iint_D f(x, y) \, dx \, dy = \int_a^b \left[\int_c^d f(x, y) \, dy \right] dx.$$

- On admettra le théorème de Fubini qui énonce que le rôle des deux variables est symétrique, c'est-à-dire que l'on peut aussi écrire:

$$\iint_D f(x, y) \, dx \, dy = \int_c^d \left[\int_a^b f(x, y) \, dx \right] dy.$$

* Intégration sur un domaine non rectangulaire:

On étend aussi la définition précédente au cas où le domaine d'intégration D est de la forme;

$$D = \{ (x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid a \leq x \leq b, y_1(x) \leq y \leq y_2(x) \}.$$

alors :

$$\iint_D f(x, y) dx dy = \int_{x=a}^{x=b} \left[\int_{y_1(x)}^{y_2(x)} f(x, y) dy \right] dx.$$

La méthode générale de calcul de $\iint_D f(x, y) dx dy$ consiste donc à intégrer d'abord par rapport à une variable, y par exemple, les bornes dépendant de x puis à intégrer par rapport à l'autre variable.

Exemple: $I = \iint_D xy dx dy$

$$D = \{ (x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid x, y \geq 0 \text{ et } x + y \leq 1 \}$$

Sol: $D = \{ (x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid 0 \leq x \leq 1 \text{ et } 0 \leq y \leq 1 - x \}$

$$I = \int_0^1 \left(\int_0^{1-x} xy dy \right) dx = \int_0^1 \frac{1}{2} x (1-x)^2 dx$$

$$= \frac{1}{2} \int_0^1 x (x^2 + 1 - 2x) dx = \frac{1}{2} \int_0^1 x^3 + x - 2x^2 dx$$

$$= \frac{1}{2} \left[\frac{x^4}{4} + \frac{x^2}{2} - \frac{2x^3}{3} \right]_0^1 = \frac{1}{24}$$