

Chapitre 02: primitives (calcul intégrales):

* primitive d'une fonction:

Soit f une fonction définie sur un intervalle I .

Déf.: une fonction F est une primitive de f sur I si et seulement si, elle est dérivable sur I , et pour tout $x \in I$, $F'(x) = f(x)$.

Exemple: La fonction $f: x \mapsto 10x + 3$ admet pour primitive sur $\mathbb{R}$ la fonction: $F_1: x \mapsto 5x^2 + 3x$.

* f admet aussi la fonction $F_2: x \mapsto 5x^2 + 3x + 4$ pour primitive sur $\mathbb{R}$.

Théorème: soit f une fonction continue sur $I = [a, b]$ l'ensemble $P = \{ \varphi = F + c, c \in \mathbb{R} \}$ est l'ensemble de tous les primitives de f sur $[a, b]$, telle que F est une primitive de f sur $[a, b]$.

Théorème: (d'existence).

Toute fonction continue sur $[a, b]$ admet une primitive sur $[a, b]$.

Exemple: $f(x) = e^{-x^2}$.

Notation: $\int f(x) dx = F(x) + C$, avec F est une primitive de f .

* Intégration:

Déf: soient f une fonction continue sur un intervalle $I = [a, b]$, et F une de ses primitives. La quantité $F(b) - F(a) = [F(n)]_a^b$ est appelée intégrale de f entre a et b et est notée $\int_a^b f(n) dn$.

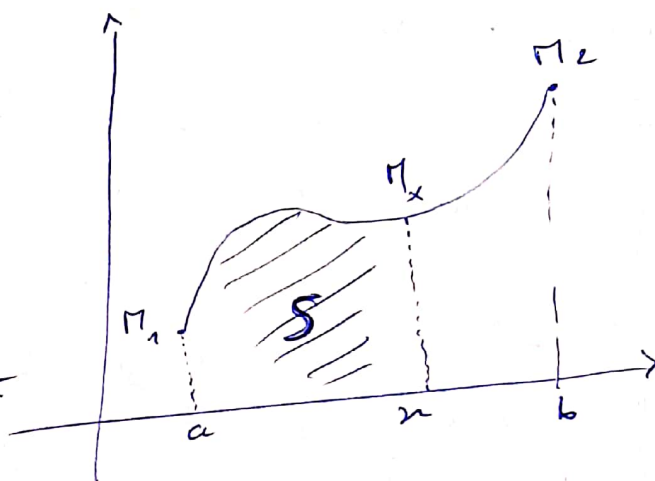
i.e: $\int_a^b f(n) dn = [F(n)]_a^b = F(b) - F(a).$

* Si $a = b$ alors: $\int_a^a f(n) dn = 0.$

* Interprétation géométrique:

soit f une fonction continue sur $[a, b]$, et (C_f) la courbe de f , et $n \in [a, b]$.

soit $S(n)$ est la surface entre $[a, n]$, (M_1, M_n) , $[a, M_1]$ et $[n, M_n]$, on a si $t \in [a, n]$



① si $f(t) > 0$ sur $[a, n]$ $\begin{cases} S(n) > 0, & \text{si } a < n. \\ S(n) < 0, & \text{si } a > n. \end{cases}$

② si $f(t) < 0$ sur $[a, n]$ $\begin{cases} S(n) < 0, & \text{si } a < n. \\ S(n) > 0, & \text{si } a > n. \end{cases}$

* propriétés de l'intégrale:

① Relation de Chasles:

soit $f: I = [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ une fonction continue et $c \in]a, b[$ alors:

$$\int_a^b f(n) dn = \int_a^c f(n) dn + \int_c^b f(n) dn$$

②

$$* \int_a^a f(x) dx = 0 \quad \text{et} \quad \int_a^b f(x) dx = - \int_b^a f(x) dx.$$

② Linéarité de l'intégrale:

soient f et g deux fonctions continues sur I ,

$\alpha, \beta \in \mathbb{R}$ alors:

$$\int_a^b \alpha f(x) + \beta g(x) dx = \alpha \int_a^b f(x) dx + \beta \int_a^b g(x) dx.$$

Remarque: $\int_a^b f(x) \cdot g(x) dx \neq \int_a^b f(x) dx \cdot \int_a^b g(x) dx.$

③ Positivité de l'intégrale:

soit $f: I \rightarrow \mathbb{R}$ une fonction continue et si f est positive alors: $\int_a^b f(x) dx \geq 0.$

④ « Croissance » de l'intégrale:

* Soient $f: I \rightarrow \mathbb{R}$ et $g: I \rightarrow \mathbb{R}$ deux fonctions continues
si $f(x) \leq g(x)$ alors: $\int_a^b f(x) dx \leq \int_a^b g(x) dx.$

$$* \left| \int_a^b f(x) dx \right| \leq \int_a^b |f(x)| dx.$$

* Méthode d'intégration:

④ Intégration directe: Tableau des primitives usuelles (série de TD or).

② Intégration par parties:

soient u et v deux fonctions de classe C^1 sur I
et $(a, b) \in I^2$, alors:

$$\int_a^b u(x) v'(x) dx = [u(x) v(x)]_a^b - \int_a^b u'(x) v(x) dx.$$

Exemple:

$$I_1 = \int_0^1 x e^x dx.$$

$$u(x) = x \rightarrow u'(x) = 1$$

$$v'(x) = e^x \rightarrow v(x) = e^x$$

$$I_1 = [x e^x]_0^1 - \int_0^1 e^x dx = e^1 - [e^x]_0^1 \\ = e^1 - e^0 + 1 = 1.$$

Déf: on dit que f est une fonction de classe C^n ($n \in \mathbb{N}$) ssi f est continue et tous les dérivées d'ordre inférieur ou égale à n sont continues.

③ changement de variable:

Théorème: si u dérivable avec u' continue sur $[\alpha, \beta]$

tel que: $u([\alpha, \beta]) \subset [a, b]$ alors,

$$\int_{\alpha}^{\beta} f \circ u(t) \cdot u'(t) dt = \int_{u(\alpha)}^{u(\beta)} f(x) dx.$$

avec $x = u(t)$ et $dx = u'(t) dt$.

Si u bijective i.e u^{-1} existe, alors;

$$\int_a^b f(u) du = \int_{u^{-1}(a)}^{u^{-1}(b)} f(u(t)) \cdot u'(t) dt$$

Exemples

$$I = \int_0^1 e^{\sqrt{t}} dt.$$

Soit $u = \sqrt{t}$ donc : $u^2 = t$ et alors;
 $2u du = dt$.

$$\begin{cases} t=0 \Rightarrow u = \sqrt{0} = 0 \\ t=1 \Rightarrow u = \sqrt{1} = 1 \end{cases}$$

$$\begin{aligned} \text{donc : } I &= \int_0^1 e^u \cdot 2u du = 2 \int_0^1 u e^u du \\ &= 2 \cdot 1 = 2. \end{aligned}$$

proposition : soit $f: I \rightarrow \mathbb{R}$ une fonction continue.

* si f est paire (زوجي) alors : $\int_{-a}^a f(u) du = 2 \int_0^a f(u) du$

* si f est impaire (فردی) alors : $\int_{-a}^a f(u) du = 0$.