Chapitre 1 : Fonction numérique d'une variable réelle :

Soit $f : D_f \longrightarrow \mathbb{R}$

$x \longmapsto f(x)$

une fonction numérique d'une variable réelle telle que $D_f = \{x \in \mathbb{R} \mid f(x) \text{ a un sens}\}$,

D_f est le domaine de définition de f.

* Intervalles de $\mathbb{R}$:

Soient $a, b \in \mathbb{R}$ tel que $a < b$, on appelle

① intervalle overt d'extrémités a et b l'ensemble :

$]a, b[= \{x \in \mathbb{R} \mid a < x < b\}$

② intervalle fermé d'extrémités a et b l'ensemble :

$[a, b] = \{x \in \mathbb{R} \mid a \leq x \leq b\}$.

③ intervalle semi-ouvert, les ensembles suivantes :

$[a, b[= \{x \in \mathbb{R} \mid a \leq x < b\}$ et

$]a, b] = \{x \in \mathbb{R} \mid a < x \leq b\}$

Scanné avec CamScanner

④ intervalle ouvert de centre a l'ensemble :

$]a-\varepsilon, a+\varepsilon[$ avec $\varepsilon > 0$.

⑤ Soient les ensembles :

$[a, +\infty[= \{x \in \mathbb{R}, x \geq a\}$

$]a, +\infty[= \{x \in \mathbb{R}, x > a\}$

$]-\infty, a] = \{x \in \mathbb{R}, x \leq a\}$

$]-\infty, a[= \{x \in \mathbb{R}, x < a\}$.

* <u>valeur absolue</u> :

Soit $x \in \mathbb{R}$, la valeur absolue de x est le nombre positive $|x|$ définie par :

$$|x| = \begin{cases} x & \text{si } x \geq 0 \\ -x & \text{si } x < 0 \end{cases}$$

<u>propriétés</u> : soient $x, y \in \mathbb{R}$, on a :

* $\forall x \in \mathbb{R}$, $|x| \geq 0$, $|x| = |-x|$ et $|x| \geq x$

* $|x \cdot y| = |x| \cdot |y|$

* $|x+y| \leq |x| + |y|$

Scanné avec CamScanner

* **Voisinage :**

Déf. On appelle un voisinage d'une point $x_0 \in \mathbb{R}$ est un intervalle ouvert qui contient x_0. i.e :

$$V_\varepsilon(x_0) = \{x \in \mathbb{R} : x_0 - \varepsilon < x < x_0 + \varepsilon\}$$
$$= \{x \in \mathbb{R} , |x_0 - x| < \varepsilon\}$$

* **Limite d'une fonction :**

Déf : On dit qu'une fonction f définie au voisinage de $x_0 \in \mathbb{R}$, sauf peut être en x_0, admet une limite $l \in \mathbb{R}$ quant x tend vers x_0 et on écrit :

$\lim_{x \to x_0} f(x) = l$ si :

$\forall \varepsilon > 0, \exists \delta > 0, \forall x \in \mathbb{R}$ tel que $|x - x_0| < \delta$ alors :
$$|f(x) - l| < \varepsilon.$$

* on définit la limite à droite et à gauche de f comme suit :

a) **limite à droite :**

$\lim_{x \overset{>}{\to} x_0} f = l$ si $\forall \varepsilon > 0, \exists \delta > 0, \forall x \in \mathbb{R}$ tel que $0 < x - x_0 < \delta$ alors $|f(x) - l| < \varepsilon$

Scanné avec CamScanner

et on note : $\lim\limits_{x \to x_0^+} f(x) = \ell$.

b) limite à gauche :

$\lim\limits_{x \overset{<}{\to} x_0} f(x) = \ell$ si $\forall \varepsilon > 0, \exists \delta > 0$, $\forall x \in \mathbb{R}$ telque $0 < x_0 - x < \delta$ alors $|f(x) - \ell| < \varepsilon$

et on note : $\lim\limits_{x \to x_0^-} f(x) = \ell$.

Remarque : la limite d'une fonction f, lorsqu'elle existe, est unique.

$\left(\lim\limits_{x \to x_0} f(x) = \ell = \lim\limits_{x \to x_0^+} f(x) = \lim\limits_{x \to x_0^-} f(x)\right)$.

* Opérations sur les limites :

supposons que $\lim\limits_{x \to x_0} f(x) = \ell_1$ et $\lim\limits_{x \to x_0} g(x) = \ell_2$ et soit $\lambda \in \mathbb{R}$, alors :

1/ $\lim\limits_{x \to x_0} (f + g) = \ell_1 + \ell_2$

2/ $\lim\limits_{x \to x_0} (f \cdot g) = \ell_1 \cdot \ell_2$

3/ $\lim\limits_{x \to x_0} |f(x)| = |\ell_1|$

4/ $\lim\limits_{x \to x_0} (\lambda f)(x) = \lambda \ell_1$.

5/ $\lim\limits_{x \to x_0} \left(\frac{f}{g}\right)(x) = \frac{\ell_1}{\ell_2}$, $\ell_2 \neq 0$.

6/ si $f \geq g$ au voisinage de x_0 alors $\ell_1 \geq \ell_2$.

Scanné avec CamScanner

* Formes indéterminées:

Les quatres formes indéterminées les plus connus sont:

$$\frac{0}{0}, \quad \frac{\infty}{\infty}, \quad \infty - \infty, \quad 0 \times \infty.$$

Exemple: calculer : $\lim_{x \to \frac{1}{2}} \frac{4x^2 - 1}{2x - 1}$

$$\Rightarrow \lim_{x \to \frac{1}{2}} \frac{4x^2-1}{2x-1} = \frac{0}{0}. \quad f.I.$$

$$= \lim_{x \to \frac{1}{2}} \frac{(2x-1)(2x+1)}{(2x-1)} = \lim_{x \to \frac{1}{2}} (2x+1) = 2.$$

Exercice: Montrer que:

$$\lim_{x \to 0} \frac{\sin(3x) - 3\sin(x)}{\tan(2x) - \sin(2x)} = -1.$$

* Fonctions continues:

Déf: on dit que f est continue en $x_0 \in \mathbb{R}$ si:

1/ f est définie en x_0 ($x_0 \in D_f$)

2/ $\lim_{x \to x_0} f(x) = f(x_0)$.

Remarque:

a) On dit que f est continue sur une partie $A \subseteq D_f$ si f est continue en tout point de A.

b) soient f et g deux fonctions continues en x_0

Scanné avec CamScanner

et soit $\lambda \in \mathbb{R}$ alors : $(f+g)$; $(f \times g)$, (λf), $|f|$ et $\left(\frac{f}{g}\right)$ $(g(x_0) \neq 0)$ sont des fonctions continues en x_0.

* **Prolongement par continuité :**

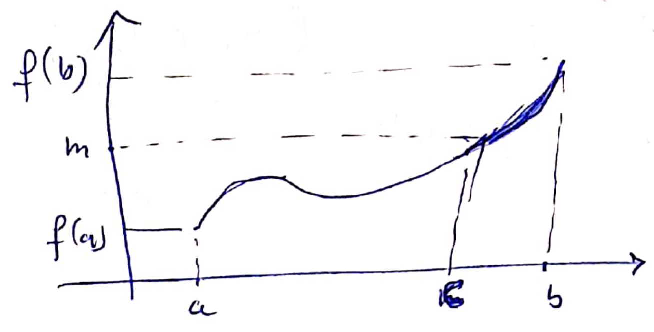
soit f une fonction définie au voisinage de x_0 sauf en x_0 ($x_0 \notin D_f$) et $\lim_{x \to x_0} f(x) = \ell$. Alors la fonction $\tilde{f}$ définie par :

$$\tilde{f}(x) = \begin{cases} f(x) & \text{si } x \neq x_0 \\ \ell & \text{si } x = x_0 \end{cases}$$

est continue en x_0.

* **Théorème :** (des valeurs intermédiaires) :

soit $f : I = [a,b] \to \mathbb{R}$ une fonction continue sur I, alors $\forall m$ comprise entre $f(a)$ et $f(b)$, $\exists$ (il existe) au moins un $c \in [a,b]$ tel que : $f(c) = m$.



* **Corollaire :** Si une fonction f continue sur $I = [a,b]$ et $f(a) \cdot f(b) < 0$, alors il existe au moins un $c \in]a,b[$ tel que $f(c) = 0$.

Scanné avec CamScanner

* **Dérivabilité :**

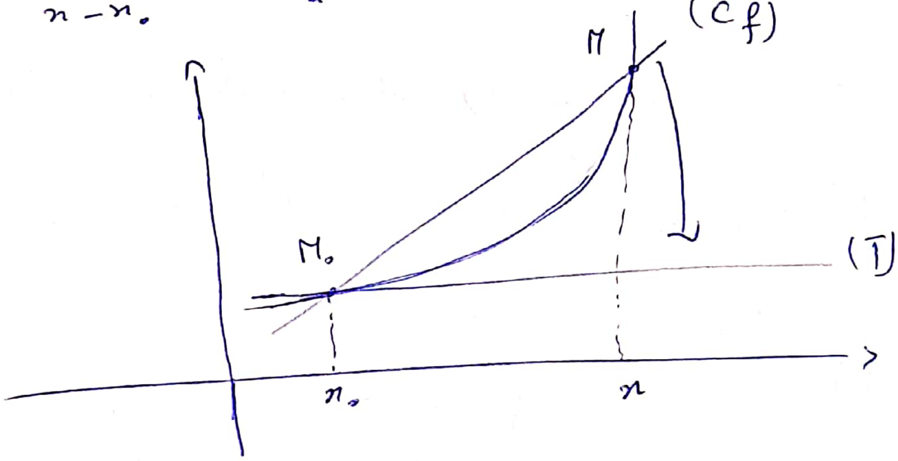
Soit $f : D_f \subset \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ une fonction continue en $x_0 \in D_f$.

Déf : On dit que f est dérivable en x_0 si et seulement si la fonction $x \longmapsto \dfrac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0}$

admet une limite finie quand x tend vers x_0. Lorsque cette limite existe et finie, elle sera notée $f'(x_0)$ et elle est appelée la dérivée de f en x_0.

$$f'(x_0) = \lim_{x \to x_0} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} = \lim_{h \to 0} \frac{f(x_0+h) - f(x_0)}{h}$$

$x = x_0 + h$.



* On défini la dérivée à gauche et la dérivée à droite de f comme suit :

Déf, f est dérivable à droite en x_0 si $\lim\limits_{x \to x_0^+} \dfrac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} = f'_d(x_0)$

Déf, f " " " gauche en x_0 si $\lim\limits_{x \to x_0^-} \dfrac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} = f'_g(x_0)$

Remarque; On dit que f est dérivable en x_0 ssi $f'_d(x_0)$ et $f'_g(x_0)$

Scanné avec CamScanner

existent et $f'_d(x_0) = f'_g(x_0)$.

<u>Théorème</u>: f dérivable en x_0 $\Longrightarrow$ f continue en x_0.

* <u>opérations sur les fonctions dérivables</u>:

soient f et g deux fonctions dérivables en $x_0 \in D_f \cap D_g$, et soit $\lambda \in \mathbb{R}$ alors;

1) $(f+g)'(x_0) = f'(x_0) + g'(x_0)$

2) $(\lambda f)'(x_0) = \lambda f'(x_0)$

3) $(f \times g)'(x_0) = f'(x_0).g(x_0) + f(x_0).g'(x_0)$

4) si $g(x_0) \neq 0 \Rightarrow \left(\frac{f}{g}\right)'(x_0) = \dfrac{f'(x_0).g(x_0) - f(x_0).g'(x_0)}{g^2(x_0)}$

5) si de plus f est dérivable en $g(x_0)$, alors;

$$(f \circ g)'(x_0) = g'(x_0) . f'(g(x_0)).$$

$$(f^{-1})'(x_0) = \frac{1}{f'(f^{-1}(x_0))}.$$

<u>exemple</u>: $(e^x)' = \dfrac{1}{\log'(e^x)} = \dfrac{1}{\frac{1}{e^x}} = e^x$, $\forall x \in \mathbb{R}$

* <u>Dérivées usuelles</u>:

$f(x)$	D_f	$f'(x)$	$D_{f'}$
$x^n, n \in \mathbb{N}$	$\mathbb{R}$	$n x^{n-1}$	$\mathbb{R}$
$x^\alpha, \alpha \in \mathbb{R}$	par rapport à α	$\alpha x^{\alpha-1}$	par rapport à $\alpha-1$
$\cos x$	$\mathbb{R}$	$-\sin x$	$\mathbb{R}$
$\sin x$	$\mathbb{R}$	$\cos x$	$\mathbb{R}$
e^x	$\mathbb{R}$	e^x	$\mathbb{R}$

Scanné avec CamScanner

$\log x$ $\quad\quad$ $\mathbb{R}_+^*$ $\quad\quad$ $\frac{1}{x}$ $\quad\quad$ $\mathbb{R}^*$

* **Règle de l'hopital :**

soit f et g deux fonctions dérivables sur un voisinage de x_0 avec $f(x_0) = g(x_0) = 0$ et $g'(x_0) \neq 0$ alors :

$$\lim_{x \to x_0} \frac{f(x)}{g(x)} = \lim_{x \to x_0} \frac{f'(x)}{g'(x)} .$$

Dérivées successives :

soit f dérivable sur $I \subset \mathbb{R}$. Si f' est dérivable sur I on note f'' ou $f^{(2)}$ la dérivée de f'.

f'' s'appelle la dérivée second de f.

Par recurrence sur $n \in \mathbb{N}$, $n \geq 2$, la dérivée $n^{ème}$ de f noté $f^{(n)} = (f^{(n-1)})'$, lorsque $f^{(n-1)}$ est dérivable sur I.

* **variation d'une fonction :**

soit f une fonction dérivable sur $I \subset \mathbb{R}$, si on a

* $f'(x) > 0$ sur $I \Rightarrow f$ strictement croissante sur I.
* $f'(x) < 0$ sur $I \Rightarrow f$ " décroissante sur I.

Scanné avec CamScanner

* Maximum - Minimum :

* On dit que f admet un maximum local en x_0, si $\exists J \subset I$ de centre x_0 : $\forall x \in J$ $f(x) \leq f(x_0)$.

* On dit que f admet un minimum local en x_0, si $\exists J \subset I$ de centre x_0 : $\forall x \in J$: $f(x) \geq f(x_0)$.

* si f est dérivable en x_0, une condition nécessaire pour que $f(x_0)$ soit max (min) local en x_0 est :
$f'(x_0) = 0$.

Théorème (Rolle) : soit $f : [a,b] \longrightarrow \mathbb{R}$ $(a \neq b)$ continue sur $[a,b]$, dérivable sur $]a,b[$.
Si on a $f(a) = f(b)$ alors : $\exists c \in]a,b[$ tel que : $f'(c) = 0$.

Corollaire : (Formule d'égalité des accroissement finis) :
soit $f : [a,b] \longrightarrow \mathbb{R}$, $(a \neq b)$, continue sur $[a,b]$, dérivable sur $]a,b[$, alors : $\exists c \in]a,b[$ tel que :

$$\frac{f(b) - f(a)}{b-a} = f'(c).$$

Scanné avec CamScanner