

## Chapitre III

### Théorie de la couche limite

#### 2.1 Introduction

Le concept de couche limite a été introduit pour la première fois par un ingénieur allemand, Prandtl, en 1904. Selon la théorie de Prandtl, lorsqu'un fluide réel s'écoule sur une paroi solide fixe, l'écoulement est divisé en deux régions.

i) Une couche mince au voisinage de la paroi solide où les forces visqueuses et la rotation ne peuvent être négligées.

ii) Une région externe où les forces visqueuses sont très petites et peuvent être négligées.

Le comportement de l'écoulement est similaire à l'écoulement libre en amont.

#### 2.2 Définitions et caractéristiques de la couche limite

L'écoulement d'un fluide visqueux sur une paroi solide représente une région dans laquelle la vitesse augmente de zéro à la paroi et s'approche de la vitesse de l'écoulement libre. Cette région

s'appelle la couche limite.

La figure 2.1 montre le développement d'une couche limite sur un côté d'une longue plaque plane parallèle au sens de l'écoulement.

Le gradient de vitesse provoque une contrainte de cisaillement importante au niveau de la paroi  $\tau_0$  (ou  $\tau_w$ ). Comme le montre la **figure 2.1** :

$$\tau_0 = \mu \left( \frac{du}{dy} \right)_{y=0}$$

Le gradient de vitesse dans la couche limite turbulente est plus grand que celui dans la couche limite laminaire.

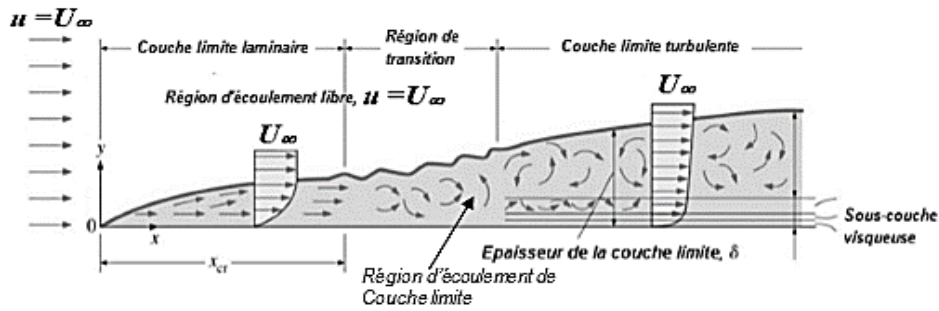
\* Une région d'entrée où la couche limite se développe et  $dp/dx \neq Cte$ , la pression est constante,

\* Une région où l'écoulement est complètement établi où :

- La couche limite remplit toute la zone d'écoulement.
- Les profils de vitesse, le gradient de pression, et la contrainte de cisaillement sont constants ; c'est-à-dire qu'ils ne sont pas en fonction de (x),
- L'écoulement est soit laminaire, soit turbulent sur toute la longueur de l'écoulement, c'est-à-dire que la phase de transition n'est pas prise en compte.

Cependant, les caractéristiques de la couche limite d'écoulement visqueux pour les écoulements externes sont comme indiqué ci-dessous pour l'écoulement sur une plaque plane :

Considérons un écoulement sur une plaque plane, comme illustré à la **figure 2.1**.

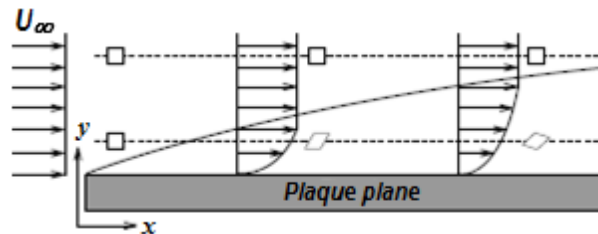


**Figure 2.1** Schéma d'écoulement de couche limite sur une plaque plane

L'écoulement sur la plaque peut être divisé en deux domaines.

**i)  $0 \leq y \leq \delta$  écoulement de couche limite** dans laquelle l'effet de force visqueuse est important.

En raison de la condition de non-glissement à la paroi, la première couche de fluide subit un retardement. Cette couche retardée provoque un retard supplémentaire pour la couche adjacente, développant ainsi une région mince dans laquelle la vitesse d'écoulement augmente de zéro à la paroi solide et se rapproche de la vitesse de l'écoulement libre.



**Figure 2.2** Rotation des particules fluides dans la zone de couche limite

En raison de la présence d'un gradient de vitesse à l'intérieur de la région de la couche limite, les particules fluides au sommet commencent à se déformer, lesquelles ont une vitesse supérieure à celle se trouvant en bas. Cette force provoque la rotation de la particule fluide lorsqu'elle pénètre dans la région de la couche limite (voir la **figure 2.2**). Par conséquent, cette couche de fluide est appelée également écoulement rotationnel.

**ii)  $y > \delta$  : Zone d'écoulement externe à la couche limite** où la force visqueuse est très faible et peut être négligée. Il n'y a pas de gradient de vitesse dans cette zone et la particule fluide ne fait pas de rotation lorsqu'elle entrera dans la région extérieure à la couche limite. Par conséquent, l'écoulement est également appelé écoulement irrotationnel.

Comme le montre la figure, les conditions de la couche limite sont que le fluide adhère à la paroi solide.

$$u = v = 0 \text{ à } y = 0 \quad (2.1)$$

Et à l'extérieur de la couche limite, la vitesse du fluide est égale à la vitesse de l'écoulement libre,

c'est-à-dire :

$$u = U_{\infty} \text{ à } y = \delta \quad (2.2)$$

La condition à la limite suivante est également valable pour l'écoulement de couche limite,

$$\frac{du}{dy} = 0 \text{ Lorsque } y \geq \delta \quad (2.3)$$

Ceci indique que la distribution de la vitesse est uniforme dans la direction  $y$  à l'extérieur de la zone de couche limite.

### 2.2.1 Épaisseur de couche limite

On distingue trois types d'épaisseur de couche limite, à savoir :

- \* Épaisseur conventionnelle de la couche limite,  $\delta$
- \* Épaisseur de déplacement de la couche limite,  $\delta^*$
- \* Épaisseur du moment de la couche limite,  $\theta$

### 2.2.2 Epaisseur conventionnelle de couche limite, $\delta$

L'épaisseur de la couche limite est définie comme la distance verticale entre la paroi solide et le point où la vitesse de l'écoulement atteint 99% ( $u=0.99 U_\infty$ ) de la vitesse de l'écoulement libre (Fig.2.3).

### 2.2.2 Epaisseur conventionnelle de couche limite, $\delta$

L'épaisseur de la couche limite est définie comme la distance verticale entre la paroi solide et le point où la vitesse de l'écoulement atteint 99% ( $u=0.99 U_\infty$ ) de la vitesse de l'écoulement libre (Fig.2.3).

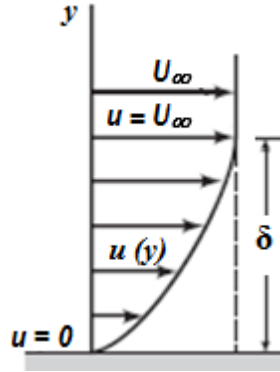


Figure 2.3 Epaisseur conventionnelle de la couche limite

### 2.2.3 Epaisseur de déplacement de la couche limite, $\delta^*$

L'épaisseur de déplacement représente la distance verticale dans laquelle la paroi solide doit être déplacée vers le haut de sorte que le fluide réel ait le même débit massique que le fluide idéal.

Considérons deux types d'écoulement de fluide sur une plaque plane horizontale fixe avec une vitesse d'écoulement  $U_\infty$ , comme illustré à la figure 2.4.

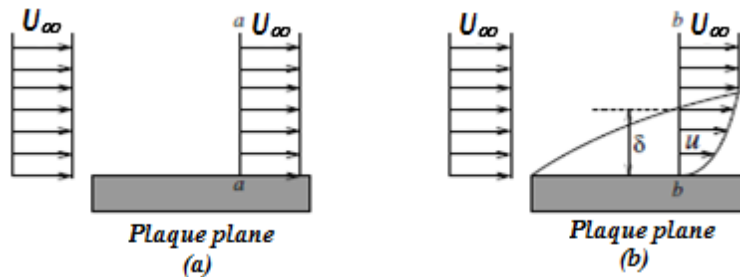


Figure 2.4 Ecoulement sur une plaque plane (a) pour un fluide parfait (b) pour un fluide réel.

En l'absence de viscosité dans le cas d'un fluide parfait (Figure 2.4 (a)), un profil de vitesse uniforme est développé au-dessus de la paroi solide. Cependant, dans le cas de fluide visqueux (fluide réel) et pas de glissement sur la paroi, un gradient de vitesse est développé dans la région de la couche limite, comme le montre la figure 2.4 (b).

Le déficit de vitesse à travers la bande d'élément de section transversale  $b$ - $b$  (Fig. 2.5) est  $(U_\infty - u)$ . Cependant, le déficit en débit massique est obtenu comme suit :

$$(U_\infty - u)b dy \quad (2.4)$$

Avec,  $b$  est la largeur de la plaque. Le déficit en masse totale due à la présence de viscosité par rapport au cas du fluide parfait.

$$\int_0^\delta \rho(U_\infty - u)b dy \quad (2.5)$$

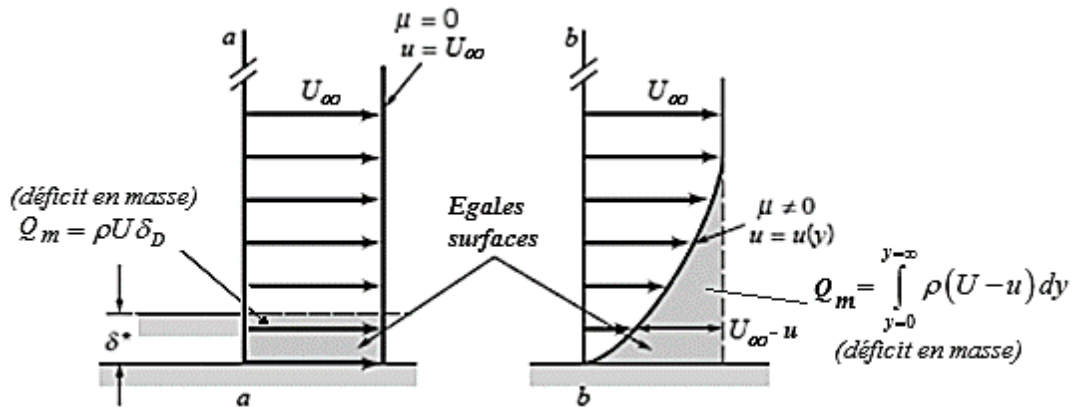
Cependant, si nous déplaçons la plaque d'une distance  $\delta^*$  vers le haut dans la section a-a (Fig.2.5) pour donner une réduction de masse de  $\rho U_\infty b\delta^*$ , le déficit de débits dans les deux cas sera identique si,

$$\int_0^\delta \rho(U_\infty - u)b dy = \rho U b \delta^* \quad (2.6) \text{ Et,}$$

$$\delta^* = \int_0^\delta \left(1 - \frac{u}{U_\infty}\right) dy \quad (2.7)$$

Avec,  $\delta^*$  est l'épaisseur de déplacement de la couche limite.

L'épaisseur de déplacement représente la distance verticale dans laquelle la paroi solide doit être déplacée vers le haut de sorte que le fluide parfait ait le même débit massique que le fluide réel.



**Figure 2.5** Epaisseur de déplacement de couche limite

### 2.2.4 Epaisseur de quantité de mouvement de la couche limite, $\theta$

Une autre épaisseur de la couche limite, il s'agit de l'épaisseur de quantité de mouvement, elle serve à prédire la force de traînée sur la surface de l'objet (Fig.2.6).

$$\rho u(U_\infty - u)b dy \quad (2.8)$$

Ainsi, le déficit total de la quantité de mouvement

$$\int_0^\delta \rho u(U_\infty - u)b dy \quad (2.9)$$

Cependant, si nous déplaçons la plaque d'une distance  $\theta$  vers le haut à la section a-a pour donner un déficit de quantité de mouvement de  $\rho U_\infty^2 b\theta$ , le déficit de quantité de mouvement dans les deux cas sera identique si,

$$\int_0^\delta \rho(U_\infty - u)b dy = \rho U_\infty^2 b\theta \quad (2.10)$$

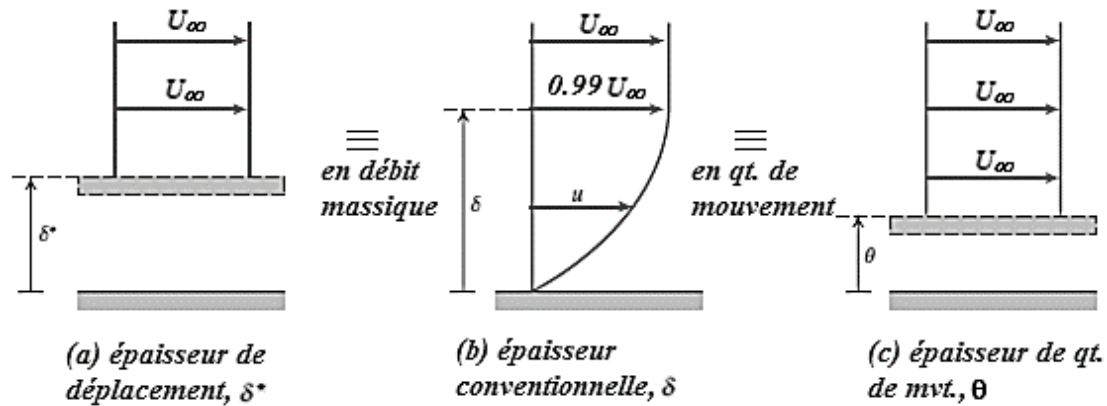
Et,

$$\theta = \int_0^\delta \frac{u}{U_\infty} \left(1 - \frac{u}{U_\infty}\right) dy \quad (2.11)$$

Ici,  $\theta$  est l'épaisseur de déplacement de la couche limite.

L'épaisseur de quantité de mouvement représente la distance verticale à laquelle la paroi solide doit être déplacée vers le haut, de sorte que le fluide parfait ait la même quantité de mouvement que le fluide réel.

Les trois différentes épaisseurs de la couche limite sont représentées et comparées dans la figure 2.7 suivante.



**Figure 2.7** Epaisseurs de couche limite

### 2.3 Equations de la couche limite

Tout d'abord, on résume les principales hypothèses que nous nous sommes déjà fixées sur l'écoulement considéré.

- écoulement laminaire, permanent, bidimensionnel dans le plan (Oxy).
- fluide incompressible ( $\rho = \text{Cte}$ )

L'écoulement est donc décrit par les équations de Navier-Stokes ainsi que l'équation de continuité, comme suit :

Suivant **x**,

$$\frac{du}{dt} + u \frac{\partial u}{\partial x} + v \frac{\partial u}{\partial y} + w \frac{\partial u}{\partial z} = -\frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial x} + \gamma \left( \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial z^2} \right) \quad (2.12)$$

Suivant **y**,

$$\frac{dv}{dt} + u \frac{\partial v}{\partial x} + v \frac{\partial v}{\partial y} + w \frac{\partial v}{\partial z} = -\frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial y} + \gamma \left( \frac{\partial^2 v}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 v}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 v}{\partial z^2} \right) \quad (2.13)$$

Suivant **z**,

$$\frac{dw}{dt} + u \frac{\partial w}{\partial x} + v \frac{\partial w}{\partial y} + w \frac{\partial w}{\partial z} = -\frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial z} + \gamma \left( \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 w}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 w}{\partial z^2} \right) \quad (2.14)$$

Sous forme vectorielle, elles peuvent être réécrites sous la forme :

$$\rho \vec{g} - \nabla p + \mu \nabla^2 \vec{v} = \rho \frac{d\vec{v}}{dt} \quad (2.15)$$

L'équation de continuité est :

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} + \frac{\partial \rho}{\partial x} (\rho u) + \frac{\partial \rho}{\partial y} (\rho v) + \frac{\partial \rho}{\partial z} (\rho w) = 0 \quad (2.16)$$

Compte tenu des hypothèses fixées ci-dessus, pour l'écoulement dans la couche limite. Par conséquent, les équations de Navier-Stokes et celle de continuité de l'écoulement du fluide sont réduites à :

Compte tenu des hypothèses fixées ci-dessus, pour l'écoulement dans la couche limite. Par conséquent, les équations de Navier-Stokes et celle de continuité de l'écoulement du fluide sont réduites à :

$$\begin{cases} u \frac{\partial u}{\partial x} + v \frac{\partial u}{\partial y} = -\frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial x} + \gamma \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} \\ \frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} = 0 \end{cases} \quad (2.19)$$

Le système d'équations 2. 19 s'appelle les **équations de couche limite** où (**équations de Prandtl**), elles sont valables seulement dans le domaine de couche limite.

### 2.3.1 Solution de Blasius de la couche limite sur une plaque plane

En général, la résolution des équations aux dérivées partielles non linéaires telles que les équations de couche limite, **Eqs. 2.19** est extrêmement difficile à obtenir. Cependant, en 1908 et en appliquant une transformation intelligente des coordonnées et un changement de variables, Blasius, un étudiant de Prandtl, proposa des équations simplifiées pour l'écoulement dans la couche limite en supposant que :

$$v \ll u \quad (2.20)$$

$$\frac{\partial}{\partial x} \ll \frac{\partial}{\partial y} \quad (2.21)$$

Par conséquent, les équations d'écoulement de fluide sont réduites à :

$$u \frac{\partial u}{\partial x} + v \frac{\partial u}{\partial y} = -\frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial x} + \gamma \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} \quad (2.22)$$

De l'équation de Bernoulli, on sait que :

$$\frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial x} = -U_\infty \frac{\partial U_\infty}{\partial x} \quad (2.23)$$

Ensuite, l'équation dans la couche limite devient

$$u \frac{\partial u}{\partial x} + v \frac{\partial u}{\partial y} = U_\infty \frac{\partial U}{\partial x} + \gamma \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} \quad (2.24)$$

Pour l'écoulement spécifique sur une plaque plane, on peut supposer une vitesse horizontale uniforme et donc  $\frac{\partial U_\infty}{\partial x} = 0$ , il vient alors,

$$u \frac{\partial u}{\partial x} + v \frac{\partial u}{\partial y} = \gamma \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} \quad (2.25)$$

Ici, nous introduisons l'équation de la fonction de courant comme suit :

$$u = \frac{\partial \psi}{\partial y}, \quad v = -\frac{\partial \psi}{\partial x} \quad (2.26)$$

En substituant  $u$  et  $v$  dans l'équation précédente, donne :

$$\frac{\partial \psi}{\partial y} \frac{\partial^2 \psi}{\partial x \partial y} - \frac{\partial \psi}{\partial x} \frac{\partial^2 \psi}{\partial y^2} = \gamma \frac{\partial^3 \psi}{\partial y^3} \quad (2.27)$$

Blasius a ensuite introduit la variable adimensionnelle  $\eta = y \left(\frac{Ux}{\gamma}\right)^{1/2}$  et la fonction de courant

$\psi = (\gamma x U_\infty)^{\frac{1}{2}} f(\eta)$ , où  $f(\eta)$  est une fonction inconnue.

En utilisant les lois de dérivation, on obtient :

$$\frac{\partial \psi}{\partial x} = \frac{1}{2} \left( \frac{\gamma U_\infty}{x} \right)^{\frac{1}{2}} [f - \eta f'] \quad (2.28)$$

$$\frac{\partial \psi}{\partial y} = U_\infty f' \quad (2.29)$$

$$\frac{\partial^2 \psi}{\partial x \partial y} = \frac{1}{2x} U_\infty \eta f'' \quad (2.30)$$

$$\frac{\partial^2 \psi}{\partial y^2} = U_\infty \left( \frac{U_\infty}{\gamma x} \right)^{\frac{1}{2}} f'' \quad (2.31)$$

$$\frac{\partial^3 \psi}{\partial y^3} = \frac{U_\infty^2}{\gamma x} f''' \quad (2.32)$$

Où,  $f' = \frac{\partial f}{\partial \eta}$ ,  $f'' = \frac{\partial^2 f}{\partial \eta^2}$ ,  $f''' = \frac{\partial^3 f}{\partial \eta^3}$

En substituant tous les termes de dérivation dans **Eq. (1.19)**, on aboutit à :

$$f''' + \frac{1}{2} f f'' = 0 \quad (2.33)$$

Les conditions aux limites de la couche limite décrit précédemment peuvent être exprimées comme suit :

$$f(0) = 0; \quad \frac{\partial f(0)}{\partial \eta} = 0; \quad \frac{\partial f}{\partial \eta} \rightarrow 1 \text{ Lorsque } \eta \rightarrow \infty$$

La solution de Blasius est tabulée comme suit,

**Tableau 2.1 Solution de Blasius**

| $\eta = y \left( \frac{U_\infty}{\gamma x} \right)^{1/2}$ | $f'(\eta) = \frac{u}{U_\infty}$ | $\eta$     | $f'$          |
|---|---------------------------------|------------|---------------|
| 0   | 0                               | 3.6        | 0.9233        |
| 0.4   | 0.1328                          | 4.0        | 0.9555        |
| 0.8   | 0.2647                          | 4.4        | 0.9759        |
| 1.2   | 0.3938                          | 4.8        | 0.9878        |
| 1.6   | 0.5168                          | <b>5.0</b> | <b>0.9916</b> |
| 2.0   | 0.6298                          | 5.2        | 0.9943        |
| 2.4   | 0.7290                          | 5.6        | 0.9975        |
| 2.8   | 0.8115                          | 6.0        | 0.9990        |
| 3.2   | 0.8767                          | $\infty$   | 1.0000        |

De la solution, on trouve que,  $\frac{u}{U_\infty} \cong 0.99$ , lorsque  $\eta = 5$ , donc, à partir des variables de similitude,

$$\delta = \delta \left( \frac{U_\infty}{\nu x} \right)^{\frac{1}{2}} \quad (2.34)$$

Où,

$$\delta = \frac{5x}{Re_x^{1/2}}, \quad \text{Avec, } Re_x = \frac{U_\infty x}{\nu} \quad (2.35)$$

En utilisant certaines manipulations mathématiques, l'épaisseur de déplacement ainsi que celle de quantité de mouvement peuvent être exprimés comme suit :

$$\delta^* = \frac{1.721x}{Re_x^{1/2}} \quad (2.36)$$

Et,

$$\theta = \frac{0.664x}{Re_x^{1/2}} \quad (2.37)$$

La contrainte de cisaillement à la paroi est ensuite déterminée en prenant,  $\left. \frac{\partial u}{\partial y} \right|_{y=0}$ , on trouve :

$$\tau_w = 0.332 U_\infty^{\frac{3}{2}} \sqrt{\frac{\rho \mu}{x}} \quad (2.38)$$