Centre universitaire abdelhafid boussouf Mila
Institut des Sciences et de la Technologie
1^{ere} Année maths **(Algèbre1)**

Série de TD N^0 1
Notions de Logique

Exercise 1.
Soit P, Q et R trois propositions. Démontrer que

1. $P \wedge (Q \vee R) \equiv (P \wedge Q) \vee (P \wedge R)$, $\qquad P \vee (Q \wedge R) \equiv (P \vee Q) \wedge (P \vee R)$.
2. $\overline{P \wedge Q} \equiv \overline{P} \vee \overline{Q}$, $\qquad \overline{P \vee Q} \equiv \overline{P} \wedge \overline{Q}$.
3. $(P \Rightarrow Q) \equiv (\overline{P} \vee Q)$.
4. $\overline{(P \Rightarrow Q)} \equiv (P \wedge \overline{Q})$.
5. $(P \Rightarrow Q) \equiv (\overline{Q} \Rightarrow \overline{P})$.

Exercise 2.
Soit $f : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ une fonction. Nier les assertions suivantes :

1. $\forall x \in \mathbb{R}, \quad f(x) \neq 0$.
2. $\forall M > 0, \quad \exists A > 0, \quad \forall x \geq A, \quad f(x) > M$.
3. $\forall x \in \mathbb{R}, \quad f(x) > 0 \Rightarrow x \leq 0$.
4. $\forall \epsilon > 0, \quad \exists \eta > 0, \quad \forall (x, y) \in I^2, \quad (|x - y| \leq \eta \Rightarrow |f(x) - f(y)| \leq \epsilon)$.

Exercise 3. *(Raisonnement direct)*
Montrer que si $a, b \in Q$ alors $a + b \in Q$.

Exercise 4. *(Raisonnement par disjonction de cas)*
Montrer que pour tout $x \in \mathbb{R}, \quad |x - 1| \leq x^2 - x + 1$.

Exercise 5. *(Raisonnement par l'absurde)*
On rappelle que $\sqrt{2}$ est un nombre irrationnel. Démontrer que si a et b sont deux entiers relatifs tels que $a + b\sqrt{2} = 0$, alors $a = b = 0$.

Exercise 6. *(Raisonnement par contraposée)*
Soit n un entier. Énoncer et démontrer la contraposée de la proposition suivante :

$$\boxed{\textit{Si } n^2 \textit{ est impair, alors } n \textit{ est impair.}}$$

Exercise 7. *(Contre-exemple)*
Montrer que l'assertion suivante est fausse « Tout entier positif est somme de trois carrés ».