Introduction aux systèmes dynamiques

Allal MEHAZZEM

Centre Universitaire Abdlehafidh Boussouf Mila

2022 2021

Chapitre 3. *Notions de stabilité*

Notions de stabilité

La question de la stabilité se pose de la façons suivante :
Si on écarte le système de sa position d'équilibre y reviendra -t-il? ou bien une petite perturbation, qui éloigne le système légèrement de son régime stationnaire peut avoir des conséquences importantes et être amplifiée au cours du temps? Considérons le système autonome suivant

$$\dot{x} = f(x) \qquad (1)$$

tel que $f \in C^1(E)$ et E un ouvert de $\mathbb{R}^n$.
Un point a dans E vérifiant $f(a) = 0$ est appelé point d'équilibre ou point critique $x(0) = x_0$.
Les points critiques correspondent au solutions constantes du système différentiel. Nous utilisons la notation (t, x_0) pour noter l'unique solution $x(t)$ de (1) qui satisfait $x(0) = x_0$.

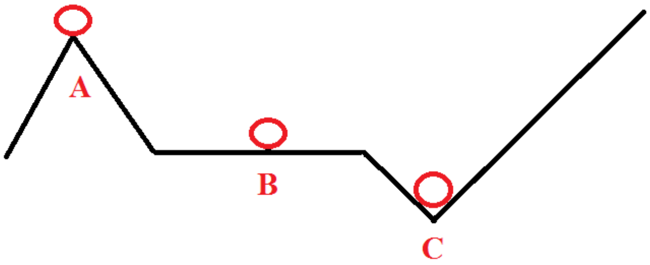

Figure 1: A) Instable B) localement stable C) Asymptotiquement stable.

L'application paramétrée $\phi(t,.)$:$\mathrm{R}^n \to \mathbb{R}^n$ est appelée flot du système (1). Une propriété importante des orbites est donnée dans le théorème suivant:

Théorème 1. (*Propriété des semi-groupes*)

Soient $x_0 \in R^n$ *et* $(\alpha, \omega) l' intervallemaximald' existencede$(t,$\mathrm{x}_0$).

Alors:

$$\phi(t+\tau, x_0) = phi(t, (\tau, x_0)),$$

pour $t, \tau, t+\tau \in (\alpha, \omega)$.

Démonstration. Soit $x_0 \in R^n$ et (,) l'intervalle maximal d'existence de (t, x_0) . Supposons que $t, \tau, t + \tau \in (\alpha, \omega)$. La fonction $\psi(t)$=$\phi(t+$,x$_0$) est solution de (31) sur $(\alpha - \tau, \omega - \tau) mais \psi(.) et \phi(., \phi(\tau$,x$_0$)) sont des solutions de (1) vérifiant la même condition initial en $t = 0$. Par l'unicité de la solution on en déduit que:

$$\psi(t) = \phi(t + \tau, x_0) = phi(t, (\tau, x_0)),$$

Définition 2. **(Stabilité locale)**
- Un point d'équilibre a de (31) est stable au sens de Lyapunov si pour tout $\epsilon > 0$, $\epsilon > 0$, il existe $\mu > 0$ tel que, pour tout $x \in E$ vérifiant $||x - a|| \leq \mu$ on a $||\phi(t, x) - a|| \leq \epsilon$ pour tout $t \geq 0$.
- Un point d'équilibre a de (1) est asymptotiquement stable au sens de Lyapunov s'il est stable au sens de Lyapunov et de plus pour tout x suffisamment proche de a on a

$$\lim_{t \to +\infty} \phi(t, x) = a.$$

Maintenant nous présentons deux méthodes pour étudier la stabilité d'un système non-linéaire

- Méthode indirecte basée sur la linéarisation.
- Méthode directe basée sur l'utilisation d'une fonction appelée fonction de Lyapunov.

1 Méthode indirecte (Linéarisation)

Le point critique de (31) se ramène à l'origine ($f(0) = 0$) par le changement de variable ($x = x - a$) et le développement de Taylor de $f(x)$ autour de $x = 0$ donne

$f(x) = Df(0)x + \frac{1}{2!}D^2f(0)(x, x)+$

Lorsque$x$ est très proche de 0 les termes non-linéaires devient négligeables devant le terme linéaire et la méthode indirecte de Lyapunov pour étudier la stabilité autour du point d'équilibre 0, consisteà étudier le système linéaire

$$\dot{x} = Ax \quad (2)$$

avec

$$A = Df(0) = \begin{pmatrix} \frac{\partial f_1}{\partial x_1}(x) & \frac{\partial f_1}{\partial x_2}(x) & \cdots & \frac{\partial f_1}{\partial x_n}(x) \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ \frac{\partial f_n}{\partial x_1}(x) & \frac{\partial f_n}{\partial x2}(x) & \cdots & \frac{\partial f_n}{\partial x_n}(x) \end{pmatrix} x = 0$$

la matrice Jacobienne de f en 0. Le système (2) s'appelle le linéarisé du système non-linéaire (1) au point d'équilibre 0.

Définition 3. Un point d'équilibre a de (31) est dit point hyperbolique si aucune valeur propre de la matrice $A = Df(a)$ n'a la partie réelle nulle.

Définition 4. Un point d'équilibre a de (31) est appelé puits si toutes les valeurs propres de la matrice $A = Df(a)$ ont les parties réelles négatives, il est appelé source si toutes les valeurs propres de la matrice $A = Df(a)$ ont les parties réelles positives et il est appelé point selle (col) si en moins une valeurs propres de la matrice $A = Df(a)$ a la partie réelle positive et en moins une valeurs propre a la partie réelle négative.

Définition 5. Deux systèmes autonomes sont dits topologiquement équivalent dans un voisinage de l'origine (ou bien ont la même structure) s'il y a un homéomorphisme H appliquant l'ouvert U contenant l'origine a l'ouvert V contenant l'origine qui transforme les trajectoires du premier système dans U en les trajectoires du deuxième système dans V et préserve leurs orientations via le temps.

Exemple 3.1: *Considérons les deux systèmes linéaires*

$$\dot{x} = Ax \quad (3)$$

$$\dot{y} = By \quad (4)$$

avec $A = \begin{pmatrix} -1-3 \\ -3-1 \end{pmatrix}$ *et* $B = \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & -4 \end{pmatrix}$.

Soit $H(x) = Rx$ *avec* $R = \frac{1}{\sqrt{2}}\begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$ *et*

$R^{-1} = \frac{1}{\sqrt{2}}\begin{pmatrix} -1 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$

on a B=RAR^{-1}.

Soit $y = H(x) = Rx$ *ou* $x = R^{-1}y$ *alors*

$\dot{y} = R\dot{x}$

$= RAx$

$= RAR^{-1}y$

$= By,$

d'où, si $x(t) = e^{At}x_0$ est la solution du premier système passant par x_0, alorsy$(t) = H(x(t)) = Rx(t) = Re^{At}x_0 = e^{Bt}Rx_0$ est la solution du deuxième systèmepassant par $y_0 = Rx_0$.
L'application $H(x) = Rx$ est une simple rotation de 45[U+25E6] qui est clairement unhoméomorphisme.

Théorème 3.6. (*Hartman-Grobman*)
Soient U, V *deux ouverts de* $\mathbb{R}^n$ *contenant l'origine, soit* $f \in C^1(U)$ *et* ϕ_t *le* flot *du système non-linéaire* (1). *Supposons que l'origine est un point d'équilibre hyperbolique. Alors, il existe un homéomorphisme* H *de l'ouvert* U *dans l'ouvert* V *tel que pour chaque* $x_0 \in U$ *il y a un intervalle ouvert* $I_0 \subset \mathbb{R}$ *contenant* 0 *et pourtout* $t \in I_0$

$$H \quad \phi_t(x_0) = e^{At} H(x_0)$$

i.e ., H applique les trajectoires du système non-linéaire (1) *vers les trajectoiresde son système linéarisé* (2) *et préserve la direction du temps*.
Le théorème affirme (sous certaines conditions) que, au voisinage d'un point a tel que $f(a) = 0$, le système non-linéaire (1) est équivalent au système linéarisé (2) (dans l'énoncé du théorème $a = 0$ mais bien sûr on peut toujours se ramener à ce cas, il suffit de considérer la fonction $x \to f(x+a) - f(a)$).

par conséquence nous avons ce corollaire:
Corollaire 7: *Considérons le système* (31) *avec son linéarisé* (32). *Si toutes*
les valeurs propres de A ont leurs parties réelles négatives alors a est localement asymptotiquement stable.
S'il existe en moins une valeur propre de A à partie réelle positive, alors a est instable.

Exemple 2**:** *Considérons le système d'un pendule avec frottement*

$$\begin{cases} \dot{x} = y \\ \dot{y} = -ry - \frac{g}{L}\sin(x) \end{cases}$$

(3.5)

avec les points d'équilibres $(n, 0)$ *pour tout entier* n. *La matrice jacobienne aupoint* $(n, 0)$ *est*

$$\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ \frac{g}{L}(-1)^{n+1} & -r \end{pmatrix}$$

avec les valeurs propres

$$\lambda_{1,2} = \frac{-r \pm \sqrt{r^2 + (-1)^{n+1} 4g/L}}{2}.$$

Si n est pair alors les deux valeurs propres sont à parties réelles négatives d'où lepoint d'équilibre est localement asymptotiquement stable.
Si n est impair alors les deux valeurs propres sont réelles de signes opposés

$$\lambda_1 = \frac{-r - \sqrt{r^2 + 4g/L}}{2} < 0 < \lambda_2 = \frac{-r + \sqrt{r^2 + 4g/L}}{2}$$

d'où le point d'équilibre est un point selle (instable).